Prof. dr hab. Robert Wolak,
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
Kraków

Kraków, 22 lutego 2021 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Piotra Mizerki

Excluding and constructing of exotic group actions on spheres

Praca dotyczy gładkich działań grup skończonych na rozmaitościach, a właściwie na sferach, czy bardziej ogólnie homotopijnych sferach. Jest to ciekawa i ważna tematyka, nad którą pracowało wielu topologów. Jednym z jeszcze nie do końca rozwiązanych problemów jest istnienie egzotycznych, tj. nierównoważnych działaniom liniowym, działań takich grup na sferach, działań, które posiadają jeden lub dwa punty stałe.

Rozprawa składa się z 3 części podzielonych na 7 rozdziałów. Pierwsza składająca się z 3 rozdziałów prezentuje wstępne wiadomości potrzebne do zrozumienia tematyki pracy doktorskiej. Część druga składająca się z dwóch rozdziałów przedstawia wyniki dotyczące działań grup z jednym punktem stałym. Natomiast część trzecia także składająca się z 2 rozdziałów omawia osiągnięcia na temat działań na sferach z dwoma punktami stałymi. Rozprawę uzupełnia bardzo potrzebny i wygodny spis notacji oraz obszerna i aktualna bibliografia.

Mgr Piotr Mizerka bardzo pięknie przedstawia historię tej tematyki od pracy P.A.Smith'a [1960], gdzie problem został postawiony, poprzez pracę E.Laitinen'a, M. Morimoto & K.Pawałoskiego [1995], gdzie autorzy sugerują negatywną odpowiedź na pytanie Smith'a dla pewnych grup skończonych. Warto podkreślić, że p. Mizerka kontaktował się wieloma topologami aktualnie pracującymi nad tym problemem. Na tle tego pejzażu topologicznego doktorant jasno przedstawia swoje osiągnięcia.

Jak już wspomniałem część druga rozprawy jest poświęcona działaniom z jednym punktem stałym. W zasadzie mgr Mizerka przedstawia metodę, jak on sam określa, strategię wykluczania istnienia takich działań, dokładniej mówiąc warunki algebraiczne, które zapewniają, że takie działania nie mogą istnieć.

W trzeciej części pracy doktorant prezentuje nową nieskończoną rodzinę grup dla których istnieją działania z dwoma punktami stałymi.

Część druga rozprawy poświęcona działaniom na sferach z jednym punktem stałym rozpoczyna się Rozdziałem 4, w którym przypomniane są podstawowe wyniki dotyczące grup skończonych o tej własności. Są to tak zwane grupy Olivera dzięki Twierdzeniu Laitinen'a – Morimoto [1998]. Ponieważ twierdzenie to dobrze charakteryzuje grupy o tej własności, uwaga badaczy skoncentrowała się na oszacowaniu najmniejszego wymiaru sfery, na której pewna taka grupa działa z jednym punktem stałym. W ciągu kilka lat stwierdzono, że wymiar takiej sfery musi być większy od 4. Z drugiej strony zostały skonstruowane działania pewnej rodziny grup skończonych na S^7, a w roku 1987 Morimoto pokazał, ze najmniejsza grupa Olivera A_5 dopuszcza działanie na S^6. Ostatecznie problem rozstrzygnęła praca opublikowana w Inventiones Math. w roku 1990, gdzie autorzy wykluczyli wymiar 5. Pozostały zatem problemy szczegółowe, tj. określenie dopuszczalnych wymiarów sfer dla kolejnych/poszczególnych klas grup Olivera. W tym przypadku warto wspomnieć pracę Morimoto i Tamury z roku 2018, w której autorzy badali ten problem dla grup S_5 i SL(2,5).

W kolejnej części mgr Mizerka przedstawia algorytm (exclusion algorithm), który pozwala wykluczyć istnienie działań z jednym punktem stałym na sferach o pewnych wymiarach. Algorytm bierze pod uwagę charakterystykę Eulera zbioru punktów stałych podgrup pewnego typu danej grupy Oliver'a, obliczoną przez Morimoto i Tamurę w/w pracy z 2018 roku. Dzięki temu autor otrzymuje twierdzenie (Theorem 5.3), które zapewnia, że pod pewnymi warunkami zbiór punktów stałych działania jest dwuelementowy. Kolejną własnością jest liczba przecięć, co przy pewnych dodatkowych założeniach o grupie pozwala stwierdzić, że zbiór punktów stałych działania nie może być jednopunktowy, (Theorem 5.8). Kolejne twierdzenie, (Theorem5.10), także korzystające z własności liczby przecięć zbiorów punktów stałych pewnych podgrup danej grupy Olivera, zapewnia, że moc zbioru punktów stałych działania nie może być nieparzysta. Wyniki te pozwalają na podanie konkretnej odpowiedzi na pytanie:

Dla danej grupy Olivera określ wymiary sfer, które dopuszczają efektywne działania tej grupy z jednym punktem stałym.

Pozostałą część tego rozdziału zajmuje przedstawienie algorytmu opartego na powyższych wynikach pozwalającego na wykluczenie pewnych wymiarów sfer. Obliczenia są dokonane przy pomocy programu GAP. Otrzymane wyniki są zebrane w Theorem 5.29. Ostatnią cześć tego rozdziału zawiera w miarę dokładne, krok po kroku, omówienie algorytmu oraz wyników w przypadku grupy S_5.

Trzecia część pracy jest poświęcona odpowiedzi na pytanie Smith'a dotyczące własności reprezentacji izotropowych dla działań grup skończonych na sferach z dwoma punktami stałymi, tj. czy i kiedy reprezentacje tego typu są izomorficzne. W Rozdziale 6 Autor najpierw (6.1) przytacza w kontekście historycznym wyniki dające odpowiedź twierdzącą, a następnie (6.2) odpowiedzi negatywne. Wyniki te oraz rozważania doprowadziły do sformułowania pojęcia równoważnych w sensie Olivera RG-modułów, [Pawałowski 2018], jako takich dla których istnieje egzotyczne działanie grupy G na sferze o dwóch punktach stałych, w których to punktach reprezentacje izotropii definiują RG-moduły izomorficzne do danych.

W ostatnim rozdziale pracy mgr Mizerka pokazuje, że pewna rodzina grup skończonych spełnia hipotezę Laitinen'a sformułowaną w pracy Laitinen & Pawałowski 1999.

Jeśli G jest grupą Oliver'a z liczbą Oliver'a większą lub równą 2, to istnieją dwa nieizomorficzne RG-moduły, które są równoważne w sensie Smith'a, a działanie na homotopijnej sferze dające tę równoważność spełnia warunek Laitinen'a.

Prawdziwość tej hipotezy została udowodniona dla kilku rodzin grup skończonych, a dla kilku innych wiadomo, że nie jest prawdziwa. W kontekście tej hipotezy K. Pawałowski sformułował następujące pytanie w 2018 roku:

Dla których specjalnych grup Oliver'a z liczbą Oliver'a większą lub równą 2, istnieją pary P-zgodnych i równoważnych w sensie Smith'a RG-modułów, które jednak nie są izomorficzne.

Przykłady grup dla których odpowiedź na to pytanie jest negatywna znane są już od roku 2009 (Pawałowski & Sumi).

W swojej rozprawie Autor pokazuje (Theorem 7.3), że rodzina grup G_p,q, gdzie p i q liczbami pierwszymi, q dzieli p-1, jest rodziną specjalnych grup Oliver'a z liczbą Oliver'a większą lub równą 2 oraz, że dla każdej z tych grup istnieje para nieizomorficznych P-zgodnych i równoważnych w sensie Smith'a RG_p,q-modułów. A zatem twierdzenie to daje częściową pozytywną odpowiedź na pytanie Pawałowskiego.

Dowód tego twierdzenia jest bardzo techniczny i żmudny, zajmuje prawie 12 stron rozprawy. Jest rozbity na liczne lematy i wnioski, w których mgr Mizerka pokazuje kolejne własności tej rodziny grup. Dzięki temu dowód jest przejrzysty i czytający może się skupić na poznaniu kolejnych własności bez wchodzenia techniczne zawiłości obliczeń.

Rozprawa jest napisana w sposób bardzo jasny i rzeczowy. Autor wykazuje bardzo dużą znajomość literatury przedmiotu. Dowody są przeprowadzane konkretnie i w miarę możliwości prosto. Metody i własności stosowane w rozumowaniach nie są nowe, ale mgr Mizerka używa ich bardzo skutecznie. Wyniki pracy nie są sztucznymi, wymyślonymi na potrzeby rozprawy, ale wypełniają konkretne luki teorii. Omówione powyżej wyniki stanowią bardzo ważny i oryginalny wkład doktoranta w rozwój tej ciekawej tematyki, nad którą pracowało wielu wybitnych matematyków. Są ważnym krokiem ku pełnemu zrozumieniu gładkich działań grup skończonych na sferach.

Uważam, że praca spełnia wszelkie wymagania rozprawy doktorskiej i wnioskuję o dopuszczenie mgr Piotra Mizerka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.