prof. dr hab. Andrzej Szczepański
Instytut Matematyki UG
Gdańsk

Gdańsk 14 stycznia 2021

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Piotra Mizerki
pt. "Excluding and constructing of exotic group actions on spheres"

Przedstawiona praca doktorska, omawia problemy związane z działaniami grup skończonych, na rozmaitościach, w tym przede wszystkim na sferach z jednym lub dwoma punktami stałymi. Autor skupia się na tak zwanych działaniach egzotycznych, to znaczy nie równoważnych z działaniami liniowymi. Autor koncentruje się szczególnie na dwóch zagadnieniach, po pierwsze wykluczenie egzotycznych działań, a z drugiej strony ich konstrukcja.

Pierwszym tematem rozważanym w pracy, jest wykluczanie gładkich działań grup skończonych, na sferach z jednym punktem stałym. Podana jest strategia wykluczania działań z jednym punktem stałym na sferach o zadanym wymiarze. Polega ona na wykorzystaniu własności homologicznych danych dotyczących punktów stałych oraz użycia teorii przecięć. Podane są algebraiczne warunki, wystarczające do wykluczenia działań z jednym punktem stałym. Podany jest algorytm pozwalający wykluczyć rozważane działania. Weryfikuje on pewne warunki opisane w pracach Morimoto i Tamury [41] oraz Borowieckiej i autora [5,6]. [1] Algorytm ten zaimplementowany w języku GAP [23], dostarcza nowe wyniki wykluczające. Jego opis i konstrukcja jest szczegółowo opisana w rozdziale 5. Natomiast w podroździale 5.1 (Twierdzenie 5.29) podana jest lista grup skończonych, które można wykluczyć rozważając działania na sferach wymiaru od 6 do 10. Ponadto zaprezentowano tam przykład działania algorytmu na grupie permutacji $S_5$. W tej części rozprawy najbardziej cenne wydaje się być twierdzenie 5.29 oraz wykorzystywanie softweru (programu GAP). Należy także podkreślić że wyniki tej partii pracy zostały już częściowo opublikowane.

W przypadku działań grupy skończonej na sferze z dwoma punktami stałymi, rozważane są te przypadki, gdzie przestrzenie styczne w punktach

[1] Numeracja cytowań jak w pracy.

stałych mają nieizomorficzne struktury $\mathbb{R}G$-modułów.

Tematyka ta jest związana z pytaniem P. A. Smitha z roku 1960.

*Załóżmy, że grupa $G$ działa na sferze $S^n, n \geq 0$ z dwoma punktami stałymi $x$ i $y$. Czy przestrzenie styczne $T_xS^n$ i $T_yS^n$ są izomorficzne jako $\mathbb{R}G$-moduły ?*

Prezentacja pozytywnych i negatywnych odpowiedzi na pytanie Smitha jest przedstawiona na początku rozdziału 6. Natomiast, w rozdziale 7 przedstawione są nowe rezultaty, w tym autora związane z hipotezą Laitinena proponującą negatywną odpowiedź na pytanie Smitha.

Przedstawimy kilka definicji potrzebnych do zrozumienia twierdzenia 7.3.

1. Przez rzeczywistą klasę sprzężoności elementu $g \in G$ będziemy rozumieli sumę klas sprzężoności elementów $g$ i $g^{-1}$ $(g)^{\pm} = (g) \cup (g^{-1})$. Natomiast, przez liczbę Laitinena $\lambda(G)$ będziemy rozumieli liczbę różnych rzeczywistych klas sprzężoności grupy $G$, których reprezentanci mają rząd nie będący potęgą liczby pierwszej.

2. Dwa $\mathbb{R}-G$ moduły $U$ i $V$ są Smith-równoważne gdy $U \simeq T_x(\Sigma)$ i $V \simeq T_y(\Sigma)$ jako $\mathbb{R}G$-moduły, gdzie grupa $G$ działa gładko na sferę homotopijną $\Sigma$ z dokładnie dwoma punktami stałymi $x$ i $y$.

3. Powyższe działanie spełnia *warunek Laitinena*, jeżeli dla każdego $g \in G$ rzędu $2^k, k \geq 3, \Sigma^g$ jest zbiorem spójnym.

4. $\mathbb{R}G$-moduły $U$ i $V$ nazywamy $\mathcal{P}$ - dopasowanymi jeżeli dla dowolnej podgrupy $P \leq G$ rzędu potęgi liczby pierwszej, obcięcia $\mathrm{Res}^G_P(U)$ i $\mathrm{Res}^G_P(V)$ są izomorficzne jako $\mathbb{R}P$-moduły.

5. Oznaczmy przez $G^{nil}$ najmniejszą, normalną podgrupę grupy $G$ taką, że $G/G^{nil}$ jest grupą nilpotentną. Będziemy mówili, że $G$ spełnia warunek *Sumi* $G^{nil}$ jeżeli istnieją dwa elementy $a, b \in G$ o złożonym rzędzie, które nie są *rzeczywiście* sprzężone w $G$, $aG^{nil} = bG^{nil}$ i co najmniej jeden z następujących warunków jest spełniony:

- $|a|$ i $|b|$ są parzyste i inwolucje podgrup cyklicznych $< a >$ i $< b >$ są sprzężone w $G$

- $a$ i $b$ należą do tej samej "gap" podgrupy w $G$.

Przy czym $K$ jest *gap grupą*, o ile istnieje $\mathbb{R}K$-moduł $V$ taki, że dla dowolnej podgrupy $P < L \leq K$ i $P$ rzędu równego potędze liczby pierwszej, zachodzi $\mathrm{dim}V^P > 2\mathrm{dim}V^L$ oraz dla każdej *dużej* podgrupy $X$ grupy $K$, zachodzi $\mathrm{dim}V^X = 0$. Gdzie podgrupa $Y \subset K$ jest *duża*, kiedy $\mathcal{O}^p(K) \leq Y$ dla pewnej liczby pierwszej $p$. Tutaj $\mathcal{O}^p(K)$ jest najmniejszą podgrupą normalną grupy $K$, taką że $K/\mathcal{O}^p(K)$ jest $p$-grupą.

6. $G$ jest *specjalną* grupą Olivera o ile jest skończoną grupą rozwiązalną

rzędu parzystego, każdy cykliczny iloraz $G$ jest albo parzysty albo rzędu potęgi liczby pierwszej i $G$ nie spełnia warunku *Sumi* $G^{nil}$.

7. Oznaczmy przez $p, q$ nieparzyste liczby pierwsze takie, że $q|(p-1)$. Niech $D_{2pq} =< a, b | a^{pq} = b^2 = 1, bab = a^{-1} >$ oznacza grupę dyhedralną rzędu $2pq$ i $C_q = < c >$ grupę cykliczną rzędu $q$. Ponadto niech $\varphi : C_q \to \mathrm{Aut}(D_{2pq})$ będzie homomorfizmem zdefiniowanym wzorem $\varphi(c)(a) = a^{\omega}$ i $\varphi(c)(b) = b$, gdzie $\omega \in \{1, 2, \ldots, pq-1\}$ i $\omega \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ pq)$ oraz $\omega^q \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ pq)$. Zdefiniujmy produkt pół-prosty

$$G_{p,q} = D_{2pq} \rtimes_{\varphi} C_q.$$

**Hipoteza Laitinena** ([30]) *Jeżeli G jest grupą Olivera, tzn. działa na dysk bez punktów stałych, z $\lambda(G) \geq 2$, to istnieją Smith równoważne $\mathbb{R}G$-moduły U i V oraz działanie G na sferę homotopijną z pytania Smitha spełniające warunek Laitinena.*

Główny wynik pracy doktorskiej, związany z hipotezą Laitinena, jest następujący.

**Twierdzenie** (7.3) *Dla dowolnych nieparzystych liczb pierwszych p, q takich, że $q|(p-1)$, $G_{p,q}$ jest specjalną grupą Olivera z $\lambda(G_{p,q}) \geq 2$, dla której istnieją pary nie izomorficznych $\mathcal{P}$ - dopasowanych, Smith równoważnych $\mathbb{R}G_{p,q}$-modułów.*

Zanim przejdę do końcowych podsumowań i uwag, przedstawię swoją opinię, na temat wstępu do rozdziału siódmego.

Przygotowanie, do sformułowania twierdzenia 7.3, jest bardzo skrótowe i chaotyczne. Występuje tam bardzo dużo nowych definicji z teorii grup skończonych, z teorii reprezentacji, czy w końcu, z działań grup. Na przykład, pojęcie specjalnej grupy Olivera. Nie wiem, gdzie ono zostało sformułowane po raz pierwszy, ale w rozprawie powinno być wyróżnione, w oddzielnej definicji. Przyznam się, że miałem problemy ze zrozumieniem tej ważnej partii materiału, czyli w konsekwencji twierdzenia 7.3.

Podsumowanie i inne uwagi.

Ogólnie ta ponad 80 stronicowa rozprawa robi dobre wrażenie. Imponujący wstęp, będący kompendium wiedzy między innymi z teorii reprezentacji grup, topologii algebraicznej i geomerii różniczkowej. Historyczne dodatki bardzo urozmaicają i ułatwiają czytanie. Są jednak, także pewne niedociągnięcia. O problemach z redakcją rozdziału siódmego już pisałem. Teraz inne drobne uchybienia.

1. Przy tw.5.29 nie ma wzmianki, że jest to tw. 1.4 ze wstępu;
2. W twierdzeniu 6.2 (strona 53) różnica $T_x\Sigma - T_y\Sigma$ jest zdefiniowana dopiero na stronie 55;
3. Na stronie 54 we wniosku 6.5 brak nawiasu przy punktach stałych;
4. Pozycji 41 w bibliografii brak- stron;
5. Na stronie 58, 3 linijki przed problemem 7.2 jest $P$-"modules", powinno być $\mathbb{R}P$-"modules";
6. Definicja warunku $Sumi\,G^{nil}$ w powyższym punkcie 5 jest niepoprawna, patrz definicja 3.7.1 w pracy [51]

Informacje zawartą w powyższym punkcie 6. otrzymałem od autora.

Podsumowując, pomimo wspomnianych powyżej zastrzeżeń, uważam, że praca pana mgra Piotra Mizerki bez wątpienia spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Andrzej Szczepański

Andrzej Szczepański