

Załącznik nr 3 - Autoreferat

Kolorowanie sprawiedliwe,
jego warianty i zastosowania

dr Hanna Furmańczyk

Instytut Informatyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Imiona i nazwisko: Hanna Ryszarda Furmańczyk (z d. Damrath)

Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

doktor nauk matematycznych:

uczelnia:

Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki

tytuł rozprawy doktorskiej:

Sprawiedliwe i ograniczone kolorowanie grafów

promotor: prof. dr hab. Marek Kubale

przewód doktorski w terminie: 10.05.2001-22.09.2005

data obrony: 30.06.2005

magister matematyki:

uczelnia:

Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki

tytuł pracy magisterskiej:

Sprawiedliwe kolorowanie grafów

promotor: prof. dr hab. Marek Kubale

data obrony: 1.07.1997

Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

asystent: Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, 1997-2005

adiunkt: Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, 2005-2008

adiunkt: Wyższa Szkoła Bankowa w Gdańsku, 2005-2018

adiunkt Instytut Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego od roku 2008

Spis treści

1	Osiągnięcie naukowe	4
2	Cel naukowy i omówienie wyników	5
2.1	Wprowadzenie	5
2.2	Sprawiedliwe kolorowanie grafów prostych	6
2.2.1	Wprowadzenie	6
2.2.2	Omówienie wyników	8
2.3	Sprawiedliwe kolorowanie hipergrafów	11
2.3.1	Wprowadzenie	11
2.3.2	Omówienie wyników	12
2.4	Pólsprawiedliwe kolorowanie grafów prostych	14
2.4.1	Wprowadzenie	14
2.4.2	Omówienie wyników	14
2.5	Zastosowania modeli kolorowania sprawiedliwego oraz modeli pokrewnych w szeregowaniu zadań	16
2.6	Sprawiedliwa listowa drzewiastość grafów prostych	19
2.6.1	Wprowadzenie	19
2.6.2	Omówienie wyników	20
2.7	Podsumowanie	24
	Bibliografia	26
3	Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i ich omówienie	30
	Artykuły w czasopismach znajdujących się z bazy JCR	30
	Rozdziały w książkach, monografie	31
	Artykuły w innych czasopismach oraz recenzowanych materiałach konferencyjnych	32
3.1	Omówienie	32
3.1.1	Kolorowanie grafów mieszanych	33
3.1.2	Etykietowanie krawędzi grafów prostych	34
3.1.3	Sprawiedliwe i r -sprawiedliwe kolorowanie grafów	35
3.1.4	r -dynamiczne kolorowanie grafów	37
3.1.5	Gwiazdowe kolorowanie grafów	38

1 Osiągnięcie naukowe

Wskazanie osiągnięcia naukowego wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowiący jednotematyczny cykl publikacji:

Tytuł osiągnięcia:

Kolorowanie sprawiedliwe, jego warianty i zastosowania

Osiągnięciem stanowiącym przedmiot niniejszego wniosku jest następujący monotematyczny cykl artykułów:

- [A1] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Equitable coloring of corona products of cubic graphs is harder than ordinary coloring. *Ars Mathematica Contemporanea*, 10:333–347, 2016.
- [A2] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale, Stanisław Radziszowski. On bipartization of cubic graphs by removal of an independent set. *Discrete Applied Mathematics*, 209:115–121, 2016.
- [A3] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Tight bounds on the complexity of semi-equitable coloring of cubic and subcubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 237:116–122, 2018.
- [A4] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Scheduling of unit-length jobs with cubic incompatibility graphs on three uniform machines. *Discrete Applied Mathematics*, 234:210–217, 2018.
- [A5] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Scheduling of unit-length jobs with bipartite incompatibility graphs on four uniform machines. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 65(1):29–34, 2017.
- [A6] Hanna Furmańczyk, Paweł Obszarski. Equitable vertex colorings of hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.01.016>.
- [A7] Ewa Drgas-Burchardt, Janusz Dybizbański, Hanna Furmańczyk, Elżbieta Sidorowicz. Equitable list vertex colourability and arboricity of grids. *Filomat*, 32(18):6353–6374, 2018. <https://doi.org/10.2298/FIL1818353D>.

2 Cel naukowy i omówienie wyników

2.1 Wprowadzenie

Procesy zachodzące w otaczającym nas świecie mogą być bardzo często zamodelowane przy użyciu języka teorii grafów. W obecnych czasach jednym z najważniejszych aspektów takich procesów jest ich szeroko pojęta optymalizacja. Problem kolorowania grafów jest jednym z najbardziej znanych zagadnień w teorii grafów. Jest to zagadnienie bardzo ważne ze względu na wiele zastosowań (układanie planów zajęć, szeregowanie zadań, problemy transportowe, sieci, itp.). Jest to zagadnienie trudne (w sensie złożoności obliczeniowej) i pozostaje w kręgu zainteresowań wielu znanych naukowców z całego świata od roku 1852 (słynne twierdzenie o 4 barwach). Jest bardzo naturalnym modelowaniem wielu problemów za pomocą grafu i ich rozwiązywanie poprzez odpowiednie pokolorowanie tego grafu. W bogatej literaturze rozważane są różne modele kolorowania grafów. Badania prowadzone w tej dziedzinie w głównej mierze skupiają się na analizie złożoności problemu, projektowaniu algorytmów dokładnych dla przypadków wielomianowych, czy algorytmów przybliżonych lub heurystyk dla przypadków trudnych. Dokonuje się również analizy własności parametrów związanych z danym tematem. Taki kierunek badań został przyjęty również przez aplikantkę.

Osiągnięcia naukowe niniejszego autoreferatu dotyczą sytuacji, w których pożądanym jest „zbalansowany” podział zasobów zawierających konflikty. Rozważmy np. problem konstruowania planu zajęć. Może on być zamodelowany przy użyciu grafu i odpowiedniego jego pokolorowania. Jeżeli mamy bardzo ograniczone zasoby sal, w których mają odbywać się zajęcia, chcemy ułożyć plan tak, aby w każdej jednostce czasu wykorzystanie sal było jak największe – „zbalansowane”. Właśnie w takich sytuacjach z pomocą przychodzi nam sprawiedliwe kolorowanie grafów. W życiu codziennym spotykamy się z różnymi wariantami „zbalansowania”. Dlatego też wyniki badań zawarte w pracach z prezentowanego osiągnięcia dotyczą:

- kolorowania sprawiedliwego grafów prostych,
- kolorowania sprawiedliwego hipergrafów,
- kolorowania półsprawiedliwego grafów prostych,
- zastosowania modeli kolorowania sprawiedliwego oraz modeli pokrewnych w szeregowaniu zadań,
- sprawiedliwej listowej drzewiastości grafów prostych.

Warto podkreślić, że powyżej wymieniona tematyka jest bardzo popularna w literaturze, między innymi wśród takich matematyków jak H.L. Bodlaender [BF05, BJ95], F.V. Fomin [BF05], czy A.V. Kostochka [KN03, KNP05, KKMS10, KK12]. Ciekawy przegląd wyników z tej tematyki można znaleźć w [M2] i [Lih98]. Ponadto zakres prowadzenia badań poszerza się ciągle o nowe zagadnienia związane z tematyką sprawiedliwego kolorowania, takie jak np. o sprawiedliwe kolorowanie rozróżnialne [BPP⁺17] czy o sprawiedliwą listową drzewiastość [Zha16a].

2.2 Sprawiedliwe kolorowanie grafów prostych

2.2.1 Wprowadzenie

Zacznijmy od definicji podstawowego modelu sprawiedliwego kolorowania grafów. Została ona wprowadzona przez Meyera w 1973 roku.

Definicja 1 ([Mey73]) Jeżeli wierzchołki grafu $G = (V, E)$ można podzielić na k klas V_1, V_2, \dots, V_k takich, że każde V_i jest zbiorem wierzchołków niezależnych oraz $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ dla wszystkich i, j , to mówimy, że graf G jest *sprawiedliwie k -kolorowalny*. Najmniejszą liczbę k dopuszczającą sprawiedliwe pokolorowanie wierzchołków grafu G nazywamy *sprawiedliwą liczbą chromatyczną* i oznaczamy przez $\chi_=(G)$.

Znane są pewne ograniczenia na sprawiedliwą liczbę chromatyczną. Najsłynniejsze z nich to

$$\chi_=(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Wynika ono z dowodu hipotezy Erdösa podanego przez Hajnala i Szemeriediego w 1970 roku.

Twierdzenie 1 ([HS70]) Niech G będzie dowolnym grafem z maksymalnym stopniem $\Delta(G)$. Wówczas istnieje sprawiedliwe k -pokolorowanie grafu G dla wszystkich $k \geq \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie to porusza jeszcze jedną bardzo ważną własność kolorowania sprawiedliwego. Należy mieć świadomość, że fakt istnienia sprawiedliwego k -pokolorowania grafu G nie implikuje istnienia jego sprawiedliwego $(k + 1)$ -pokolorowania. Sztandarowym przykładem jest graf $K_{3,3}$, który można pokolorować sprawiedliwie dwoma kolorami, ale nie istnieje jego sprawiedliwe 3-pokolorowanie. Najmniejszą liczbę kolorów k taką, że graf G jest sprawiedliwie t -kolorowalny dla wszystkich $t \geq k$, nazywamy *sprawiedliwym progiem*

chromatycznym grafu G i oznaczamy przez $\chi_{=}^*(G)$. Zatem z twierdzenia Hajnala i Szemeriediego otrzymujemy

$$\chi_{=}^*(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (1)$$

W 2010 roku Kierstead i in. [KKMS10] podali szybki algorytm, o złożoności $O(\Delta(G)|V(G)|^2)$, wyznaczający sprawiedliwe $(\Delta(G) + 1)$ -pokolorowanie. Meyer już w 1973 roku postawił hipotezę, że dla większości grafów jedynka po prawej stronie nierówności (1) może być pominięta.

Hipoteza 1 (ECC (ang. *Equitable Coloring Conjecture*, [Mey73]))
Niech G będzie grafem spójnym. Jeśli $G \neq K_n$ i $G \neq C_{2n+1}$, to

$$\chi_{=}^*(G) \leq \Delta(G).$$

Ponad dwadzieścia lat później Chen [CLW94] postawił drugą hipotezę związaną ze sprawiedliwym kolorowaniem grafów.

Hipoteza 2 (Δ ECC (ang. *Equitable Δ -Coloring Conjecture*, [CLW94]))
Spójny graf G jest sprawiedliwie $\Delta(G)$ -kolorowalny, jeżeli $G \neq K_n$, $G \neq C_{2n+1}$ i $G \neq K_{2n+1, 2n+1}$ dla każdego $n \geq 1$.

Są to dwie główne hipotezy w omawianej dziedzinie, ciągle niepotwierdzone w ogólnym przypadku. Dowodzenie ich prawdziwości dla poszczególnych klas grafów stanowi jeden z kilku podstawowych nurtów badań w omawianej dziedzinie. Dla przykładu przytoczmy kilka wyników: Chen i Yen [CY12] – prawdziwość hipotez dla grafów dwudzielnych, Kierstead i Kostochka [KK12] – prawdziwość hipotezy Δ ECC dla grafów z $\Delta \leq 4$, Kostochka, Nakprasit i Pemmaraju [KNP05] – sprawiedliwe kolorowanie grafów d -zdegenerowanych, czy Kostochka i Nakprasit [KN03] – hipoteza Δ ECC dla grafów ze średnim stopniem grafu $d(G) \leq \Delta(G)/5$. Takich prac weryfikujących prawdziwość hipotez jest dużo więcej. Również w prezentowanym osiągnięciu pojawi się kilka rezultatów w tym zakresie. Warte podkreślenia jest następujące twierdzenie udowodnione przez Chena, Lih i Wu:

Twierdzenie 2 ([CY12]) *Hipoteza Δ ECC jest prawdziwa, jeżeli zachodzi dla wszystkich grafów regularnych.*

Dlatego również w prezentowanych wynikach dość często pojawiają się grafy regularne, głównie grafy kubiczne.

Ponieważ pokolorowanie sprawiedliwe jest pokolorowaniem poprawnym z dodatkowym warunkiem, więc sprawiedliwa liczba chromatyczna nie może

być mniejsza niż klasyczna liczba chromatyczna grafu G . Zachodzi zatem nierówność

$$\chi_=(G) \geq \chi(G).$$

Można zadać pytanie, jak dalece te dwa parametry mogą się różnić. Okazuje się, że różnica $\chi_=(G) - \chi(G)$ może być dowolnie duża. Rozważmy np. gwiazdy $K_{1,n}$. Ponieważ są one przykładem grafów dwudzielnych, to $\chi(K_{1,n}) = 2$, podczas gdy do ich sprawiedliwego pokolorowania potrzebujemy co najmniej $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ kolorów. Pojawiły się kolejne pytania o dalsze związki modeli klasycznego oraz sprawiedliwego. Jednym z celów moich rozważań było porównanie złożoności tych problemów oraz znalezienie klas grafów, dla których te dwa modele mają różną złożoność obliczeniową. W wybranych przypadkach przedstawiliśmy algorytmy – dokładne lub przybliżone. W toku prowadzonych badań, biorąc pod uwagę potrzeby pojawiające się przy analizie zastosowań modelu sprawiedliwego, został wprowadzony model półsprawiedliwego kolorowania grafów. Również ten model został poddany analizie. Ponadto za cel postawiliśmy sobie również zbadanie uogólnienia modelu sprawiedliwego kolorowania grafów na hipergrafy, ograniczając się na początku do hipergrafów dwudzielnych. Z uwagi na pojawienie się w literaturze w ostatnim czasie tematów pokrewnych kolorowaniu sprawiedliwemu, prowadziliśmy również badania nad sprawiedliwą listową drzewiastością grafów prostych. Przedstawiliśmy przede wszystkim nowe narzędzia pomocne w badaniu tematyki. Dzięki nim uzyskaliśmy rezultaty dla krat d -wymiarowych oraz oszacowania parametru $\rho_l^-(G)$ dla dowolnych klas grafów.

2.2.2 Omówienie wyników

Złożoność obliczeniowa. Przypomnijmy, że problem k -KOLOROWANIA grafów jest NP-zupełny już dla $k \geq 3$ [Kar72]. Może on być dość prosto zredukowany do problemu SPRAWIEDLIWEGO k -KOLOROWANIA przez dodanie odpowiedniej liczby wierzchołków izolowanych. A zatem i problem SPRAWIEDLIWEGO k -KOLOROWANIA grafów jest NP-zupełny dla $k \geq 3$. Tyle w przypadku dowolnego grafu. Znacznie ciekawszym jest porównanie złożoności kolorowania klasycznego oraz sprawiedliwego dla wybranych klas grafów. Już wcześniej aplikantka udowodniła twierdzenie:

Twierdzenie 3 ([M2], Thm. 3.2) *Problem zdecydowania, czy $\chi_=(G) \leq 3$ jest NP-zupełny również wtedy, gdy G jest grafem krawędziowym grafu kubicznego.*

W większości przypadków problem SPRAWIEDLIWEGO k -KOLOROWANIA grafów nie jest łatwiejszy niż jego wersja klasyczna. Okazuje się

jednak, że są klasy grafów, dla których kolorowanie klasyczne jest trudniejsze niż kolorowanie sprawiedliwe.

Stwierdzenie 4 ([A6], Fact 2.1) *Problem k -KOLOROWANIA, $k \geq 3$, ograniczony do grafów $G + N_1$, gdzie G jest dowolnym grafem, jest NP-zupełny, podczas gdy wartość $\chi_=(G + N_1)$ może być wyznaczona w czasie wielomianowym.*

W dowodzie stwierdzenia 4 wskazujemy, jak uzyskać sprawiedliwe pokolorowanie grafu $G + N_1$ najmniejszą możliwą liczbą kolorów poprzez wyznaczenie najliczniejszego skojarzenia w dopełnieniu grafu G .

W 2015 roku, kiedy pracowaliśmy nad wynikami opublikowanymi później w pracy [A1], była znana tylko jedna klasa grafów – grafy dwudzielne, o której wiadomo było, że kolorowanie właściwe grafów z tej klasy można uzyskać w czasie wielomianowym, podczas gdy kolorowanie sprawiedliwe jest już obliczeniowo trudne [BJ95]. My wyznaczyliśmy kolejną klasę grafów o takiej własności, mianowicie korony grafów kubicznych, które oznaczamy przez $G \circ H$ (G, H – grafy kubiczne). Dla danych dwóch grafów prostych G oraz H , ich *koronę* nazywamy graf $G \circ H$ otrzymany poprzez wzięcie jednej kopii grafu G , $|V(G)|$ kopii grafu H oraz połączenie krawędziami i -tego wierzchołka grafu G z wszystkimi wierzchołkami i -tej kopii grafu H . Ten rodzaj produktu grafowego został wprowadzony przez Fruchtę i Harary’ego w 1970 roku [FH70]. Warto dodać, że sprawiedliwym kolorowaniem produktów grafowych zajmowano się m.in. w pracach [CXYZ09, LC10, LC12, YW14], czy w [C9].

Ponieważ dla każdego spójnego grafu kubicznego G zachodzi $2 \leq \chi(G) \leq 4$ (wynika to z tw. Brooks’a) oraz $\chi_=(G) = \chi(G)$ [CLW94], klasę spójnych grafów kubicznych można podzielić na trzy podklasy. Q_i , $i = 2, 3, 4$, oznacza zbiór i -dzielnych grafów kubicznych, czyli takich, dla których $\chi(G) = i$. Ponadto, $Q_3(t)$ ($Q_3(t) \subset Q_3$) oznacza klasę grafów trójdzielnych, w których wszystkie trzy partycje podziału są mocy t .

Rozważania dotyczące sprawiedliwego kolorowania koron grafów kubicznych doprowadziły nas do następujących wniosków.

- a) Problem wyznaczenia optymalnego klasycznego pokolorowania koron grafów kubicznych jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym.
- b) Problem wyznaczenia optymalnego sprawiedliwego pokolorowania koron grafów kubicznych $G \circ H$ jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym w przypadkach, gdy $H \in Q_2 \cup Q_4$ ([A1], Thm. 2.3 i Col. 3.2) oraz w przypadku, gdy $G \in Q_4$ and $H \in Q_3$.

W tym przypadku wskazane zostały algorytmy wielomianowe wyznaczające optymalne pokolorowanie odpowiednich koron.

- c) W przypadku, gdy $G \in Q_2 \cup Q_3$ i $H \in Q_3$, są możliwe tylko dwie wartości dla sprawiedliwej liczby chromatycznej: $4 \leq \chi_=(G \circ H) \leq 5$ ([A1], Thm. 3.3 i 3.4), a stwierdzenie, która z nich jest właściwa, jest problemem trudnym (por. tw. 5).

Twierdzenie 5 ([A1], Thm. 4.3) *Problem zdecydowania, czy $\chi_=(K_{3,3} \circ H) = 4$ jest NP-zupełny nawet wtedy, gdy $H \in Q_3(t)$ i $10|t$.*

Dowód twierdzenia 5 polega na redukcji problemu istnienia $(4m/10, 3m/10, 3m/10)$ pokolorowania grafu kubicznego o m wierzchołkach. Z kolei do pokazania NP-zupełności tego problemu zredukowaliśmy problem $IS_3(H, 4m/10)$, czyli problem INDEPENDENT SET dla grafu kubicznego H , w którym pytamy o zbiór niezależny mocy co najmniej $4m/10$. Wcześniej udowodniliśmy NP-zupełność tego właśnie podproblemu ([A1], Lemma 4.1).

Lemat 6 ([A1], Lemma 4.2) *Problem zdecydowania, czy graf kubiczny H o m wierzchołkach, m jest podzielne przez 10, ma pokolorowanie typu $(4m/10, 3m/10, 3m/10)$ jest NP-zupełny.*

Co warto podkreślić, w dowodzie lematu 6 korzystaliśmy z twierdzenia udowodnionego w pracy [A2], a dotyczącego bipartyzacji grafów kubicznych poprzez usuwanie zbioru niezależnego. Zagadnienie to omówimy w kolejnym paragrafie.

- d) Każdą koronę $G \circ H$, gdzie $G \in Q_2 \cup Q_3$ i $H \in Q_3$, potrafimy pokolorować sprawiedliwie 5 kolorami.

Wskazaliśmy liniowy algorytm kolorujący odpowiednie korony 5 kolorami. Ponieważ $4 \leq \chi_=(G \circ H) \leq 5$, nasz algorytm jest 1-absolutnie przybliżony i jest to najlepszy możliwy algorytm, chyba że $P = NP$.

- e) Hipotezy ECC i Δ ECC są prawdziwe dla koron grafów kubicznych.

Bipartyzacja grafu kubicznego. Problem bipartyzacji grafu, jako problem mający wiele zastosowań, jest zagadnieniem szeroko znanym w literaturze, w którym to problemie usuwamy zbiór elementów grafu (wierzchołków lub krawędzi), aby otrzymać graf dwudzielny. Dowód lematu 6 wymusił zajęcie się problemem bipartyzacji grafów kubicznych polegającej na usunięciu

zbioru wierzchołków, ale usuwany zbiór musi być zbiorem niezależnym. Formalnie, problem $\text{BIS}(Q, k)$ zdefiniowany jest następująco:

Dane: Spójny graf kubiczny Q , dodatnia liczba całkowita k .

Pytanie: Czy istnieje zbiór niezależny I rozmiaru co najmniej k taki, że $Q - I$ jest dwudzielny?

Problem $\text{BIS}(Q, k)$ ma pozytywne rozwiązanie dla n wierzchołkowych grafów kubicznych $Q \in \mathcal{Q}_3(n)$, dla których liczba niezależności $\alpha(Q)$ spełnia warunek: $\alpha(Q) \geq 2n/5$, natomiast dla k zachodzi: $\lfloor (n - \alpha(Q))/2 \rfloor \leq k \leq \alpha(Q)$ ([A2], Thm. 3 i 6). W dowodzie zaproponowaliśmy algorytm o złożoności $O(n^3)$, który dla dowolnego zbioru niezależnego I mocy k zwraca zbiór niezależny I' takiej samej mocy oraz taki, że $Q - I'$ jest grafem dwudzielnym. Co więcej, biorąc pod uwagę strukturę podgrafu $Q - I'$, pokazaliśmy, że może on być pokolorowany sprawiedliwie, czyli każdy spójny graf kubiczny spełniający założenia posiada pokolorowanie typu $(|I|, \lceil (n - |I|)/2 \rceil, \lfloor (n - |I|)/2 \rfloor)$. Co również warto podkreślić, Frieze i Suen [FS94] udowodnili, że

$$\alpha(Q) \geq 4.32n/10 - \epsilon n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

czyli wraz ze wzrostem liczby wierzchołków wzrasta prawdopodobieństwo istnienia odpowiedniego dla nas zbioru niezależnego.

Problem $\text{BIS}(Q, k)$ dla $k < \lfloor (n - \alpha(Q))/2 \rfloor$ w klasie $\mathcal{Q}_3(n)$ z $\alpha(Q) \geq 2n/5$ pozostaje nadal otwarty – tak samo jak ten sam problem dla grafów kubicznych z $\alpha(Q) < 2n/5$.

W rozważanej postaci problem *odd cycle transversal* pojawił się w pracy [A2] po raz pierwszy. Praca ta stała się inspiracją do powstania innej pracy, autorstwa D. Rautenbach i in. [LRSS18], zaprezentowanej na konferencji COCOA w 2018., w której to autorzy rozważają problem bipartyzacji grafu poprzez usuwanie skojarzenia w danym grafie. Temat rozważany jest również w pracy M. Bonamy i in. [BDF⁺18] z 2018 r.

2.3 Sprawiedliwe kolorowanie hipergrafów

2.3.1 Wprowadzenie

Hipergraf definiujemy jako parę $H = (V, \mathbb{E})$, gdzie V (lub $V(H)$) jest n -elementowym zbiorem wierzchołków hipergrafu H , natomiast \mathbb{E} (lub $\mathbb{E}(H)$) jest rodziną m niepustych podzbiorów V , które nazywamy krawędziami lub *hiperkrawędziami*. k -pokolorowanie hipergrafu H jest funkcją $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ taką, że dla każdej hiperkrawędzi $e \in \mathbb{E}$ z $|e| \geq 2$ istnieją wierzchołki $u, v \in e$ takie, że $c(u) \neq c(v)$. Oznacza to, że żadna z hiperkrawędzi rozmiaru co

najmniej 2 nie jest monochromatyczna. Jeżeli dla wszystkich hiperkrawędzi zachodzi $|e| = r$, dla pewnego r , to taki hipergraf nazywamy *r-jednolitym*.

Definicja 2 *Sprawiedliwym k-pokolorowaniem wierzchołkowym hipergrafu $H = (V, \mathbb{E})$ nazywamy podział zbioru wierzchołków V na podzbiory V_1, \dots, V_k takie, że żaden podzbiór V_j , $1 \leq j \leq k$ nie zawiera krawędzi e_i z $|e_i| \geq 2$, $1 \leq i \leq m$, oraz $||V_x| - |V_y|| \leq 1$, $x, y = 1, \dots, k$.*

Definicja sprawiedliwego kolorowania grafów prostych została przeniesiona na hipergrafy po raz pierwszy w 1977 roku w pracy Berge'a i Sterboula [BS77]. Od tego czasu ukazało się tylko kilka publikacji poświęconych sprawiedliwemu kolorowaniu hipergrafów (por. [Sha15, Shi15, Shi16]). Zagadnienia, które poruszają, można wspólnie określić jako wyznaczenie ograniczeń parametru zdefiniowanego jako najmniejsza liczba krawędzi hipergrafu H rozmiaru n , który ma/nie ma sprawiedliwego k -pokolorowania. Rozważano grafy *r-jednolite* (ang. *r-uniform*), *niejednolite*, czy *liniowe*. W porównaniu ze sprawiedliwym kolorowaniem grafów prostych, sprawiedliwe kolorowanie hipergrafów jest o wiele bardziej skomplikowane. O ile, dla grafów prostych wiemy, że sprawiedliwa liczba chromatyczna jest ograniczona przez maksymalny stopień grafu plus 1 (Hajnal, Szemerédi [HS70]; $\chi_=(G) \leq \Delta(G) + 1$), o tyle dla hipergrafów nie mamy żadnego ograniczenia wykorzystującego maksymalny stopień hipergrafu. Autorzy pracy [Shi15] podali ograniczenie górne na maksymalny stopień k -jednolitego hipergrafu, który posiada sprawiedliwe 2-pokolorowanie.

2.3.2 Omówienie wyników

Niestety, mimo że zarówno kolorowanie hipergrafów, jak i same hipergrafy mają wiele zastosowań – ze względu na swoją bardziej skomplikowaną strukturę, mogą one modelować bardziej złożone sytuacje – nie została opublikowana żadna praca dotycząca złożoności problemu sprawiedliwego kolorowania hipergrafów. Ponieważ problem 2-KOLOROWANIA hipergrafu jest NP-trudny [Lov73], problem SPRAWIEDLIWEGO 2-KOLOROWANIA, w przypadku ogólnego hipergrafu, nie może być łatwiejszy. W pracy [A6] badamy złożoność następującego problemu:

SPRAWIEDLIWE k -KOLOROWANIE HIPERGRAFU (ang. *Equitable k-Coloring of Hypergraph*), $ECH(H, k)$

Dane: Hipergraf H na n wierzchołkach, dodatnia liczba całkowita k .

Pytanie: Czy istnieje sprawiedliwe k -pokolorowanie H ?

oraz jego podproblemu:

SPRAWIEDLIWE k -KOLOROWANIE 3-JEDNOLITEGO HIPERGRAFU (ang. *Equitable k -Coloring of 3-Uniform Hypergraph*), $ECH_3(H, k)$

Dane: 3-jednolity hipergraf H na n wierzchołkach, liczba całkowita k .

Pytanie: Czy istnieje sprawiedliwe k -pokolorowanie H ?

Zostało udowodnione następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7 ([A6], Thm. 2.3) *Problem $ECH_3(H, 2)$ jest NP-zupełny, nawet jeśli H jest hipergwiazdą.*

W dowodzie twierdzenia wykorzystujemy udowodnioną w tej samej pracy NP-zupełność problemu zbioru niezależnego $IS(G, \lceil n/2 \rceil - 1)$ grafu prostego G ([A6], Fact 2.2).

Zauważmy, że hipergwiazdy są przykładem klasy hipergrafów, dla których kolorowanie właściwe jest rozwiązywalne w czasie wielomianowym, podczas gdy kolorowanie sprawiedliwe jest już problemem trudnym. W pracy [A6] przedstawiamy również porównanie złożoności wspomnianych dwóch modeli kolorowania dwudzielnych grafów prostych oraz dwudzielnych hipergrafów ([A6], Rysunek 2, str. 6). Pozwoliło to określić granicę pomiędzy problemami trudnymi a problemami rozwiązywalnymi w czasie wielomianowym.

Ponieważ problem sprawiedliwego kolorowania hipergrafów okazał się trudny już dla hipergwiazd, postawiliśmy sobie za cel znalezienie podklasy hipergrafów dwudzielnych, dla których przedmiotowy problem jest wielomianowy.

Twierdzenie 8 ([A6], Thm. 3.2) *Istnieje algorytm o złożoności $O(n^2)$, który sprawdza, czy dane hiperdrzewo liniowe H na n wierzchołkach jest sprawiedliwie 2-kolorowalne.*

Algorytm z dowodu twierdzenia 8 opiera się na technice programowania dynamicznego. Ogólna idea jego działania polega na wyznaczeniu liczników wszystkich możliwych 2-pokolorowań hipergrafu H oraz na sprawdzeniu, czy wśród nich jest licznik odpowiadający 2-pokolorowaniu sprawiedliwemu. W przypadku pozytywnym, możliwe jest wyznaczenie odpowiedniego pokolorowania. Nasz algorytm może być w łatwy sposób rozszerzony na sprawiedliwe k -kolorowanie, oczywiście kosztem zwiększenia jego złożoności. Warto podkreślić, że przedstawiona przez nas metoda może być zastosowana nie tylko

do kolorowania sprawiedliwego, ale również ma ona zastosowanie w przypadku innych modeli kolorowania, w których ważne są licznosci klas kolorów, czyli np. w kolorowaniu ograniczonym (rozmiar klas kolorów ograniczony jest przez stałą), r -sprawiedliwym (różnica pomiędzy rozmiarami dowolnych klas kolorów nie może przekraczać r), czy w omawianym w kolejnym podrozdziale kolorowaniu półsprawiedliwym.

2.4 Półsprawiedliwe kolorowanie grafów prostych

2.4.1 Wprowadzenie

Definicja 3 Jeżeli wierzchołki grafu $G = (V, E)$ można podzielić na k klas V_1, V_2, \dots, V_k , takich że każde V_i jest zbiorem niezależnym, $|V_1| \notin \{\lfloor |V|/k \rfloor, \lceil |V|/k \rceil\}$ oraz $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ dla wszystkich $i, j \in \{2, \dots, k\}$, to mówimy, że graf G jest *półsprawiedliwie k -kolorowalny*. Klasę V_1 nazywamy *klasą niesprawiedliwą*.

Należy zauważyć, że nie każdy graf ma pokolorowanie półsprawiedliwe, np. takiego pokolorowania nie ma graf pełny K_n . Problem półsprawiedliwego kolorowania grafów został zdefiniowany przez Furmańczyk i Kubale w 2015 roku [C13]. Już w pierwszej pracy autorzy analizowali złożoność tego modelu. Udowodniono, że problem półsprawiedliwego 3-kolorowania grafów kubicznych, w odróżnieniu od kolorowania sprawiedliwego, jest problemem trudnym obliczeniowo. Wskazali oni również potencjalne zastosowanie przedmiotowego modelu w szeregowaniu zadań wsadowych (and. *batch scheduling*). Prace przedstawione w osiągnięciu: [A3], [A4], [A5] rozszerzają te wyniki.

2.4.2 Omówienie wyników

Praca [A3] poświęcona jest analizie problemu półsprawiedliwego k -kolorowania grafów kubicznych i podkubicznych, gdzie $k \geq 4$. Zdefiniowany został problem decyzyjny:

$(\frac{1}{3} + \epsilon)$ -Semi-Equitable Coloring of a Cubic m -Divisible graph (SECCD)

Wejście: Graf kubiczny G z liczbą wierzchołków podzielną przez m , liczba całkowita $k \geq 4$ oraz $\epsilon > 0$.

Pytanie: Czy graf G ma półsprawiedliwe k -pokolorowanie, w którym niesprawiedliwa klasa kolorów jest rozmiaru co najmniej $(\frac{1}{3} + \epsilon)|V|$?

Twierdzenie 9 ([A3], Thm. 2.4) *Dla każdego ustalonego $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$ problem SECCD jest NP-zupełny.*

Dowód twierdzenia 9 wykorzystuje NP-zupełność dwóch innych problemów, również zdefiniowanych i udowodnionych w pracy [A3].

Maximum Independent Set in a Cubic m -Divisible graph (MISCD)

Wejście: Graf kubiczny G z liczbą wierzchołków podzielą przez m , dodatnia liczba całkowita l .

Pytanie: Czy G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej l ?

Lemat 10 ([A3], Lemma 2.2) *Problem MISCD jest NP-zupełny.*

$(\frac{1}{3} + \epsilon)$ -Independent Set in a Cubic 6-Divisible graph (ISCD)

Wejście: Graf kubiczny G z liczbą wierzchołków podzielą przez 6, $\epsilon > 0$.

Pytanie: Czy G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $(\frac{1}{3} + \epsilon)|V|$?

Lemat 11 ([A3], Lemma 2.3) *Problem ISCD jest NP-zupełny.*

Zwróćmy uwagę, że twierdzenie 9 wskazuje na NP-zupełność problemu półsprawiedliwego kolorowania grafów kubicznych z niesprawiedliwą klasą kolorów rozmiaru $s > \frac{|V|}{3}$. Z drugiej strony, w pracy [A3] zostało udowodnione następujące twierdzenie:

Twierdzenie 12 ([A3], Thm. 3.1) *Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem kubicznym lub podkubicznym niezawierającym jako składowej spójności grafu $K_{3,3}$ ani K_4 . Dane są dodatnie liczby całkowite $k \geq 4$ oraz $s \leq \lceil n/3 \rceil$. Znalezienie półsprawiedliwego k -pokolorowania grafu G z niesprawiedliwą klasą kolorów rozmiaru s jest rozwiązywalne w czasie $O(n^2)$.*

A zatem została wyznaczona ścisła granica pomiędzy przypadkami wielomianowymi i trudnymi. Wyniki analizy złożoności problemu półsprawiedliwego k -kolorowania grafów kubicznych i podkubicznych zostały zebrane w tabelach w pracy [A3] na str. 119.

Ponieważ algorytm, o którym mowa w twierdzeniu 12, wykorzystuje wynik uogólniający twierdzenie Chena [CLW94] o sprawiedliwym 3-kolorowaniu spójnych grafów kubicznych 3-kolorowalnych na grafy podkubiczne, niekoniecznie spójne, metoda z dowodu Chena [CLW94] została zmodyfikowana i przedstawiona w formie algorytmu o złożoności $O(n^2)$ (zob. Appendix w pracy [A3]).

Twierdzenie 13 ([A3], Cor. 1.4) *Niech G będzie grafem podkubicznym niezawierającym jako składowej spójności grafu $K_{3,3}$ ani K_4 . Wówczas G jest sprawiedliwie 3-kolorowalny.*

2.5 Zastosowania modeli kolorowania sprawiedliwego oraz modeli pokrewnych w szeregowaniu zadań

Model kolorowania sprawiedliwego ma szerokie zastosowania w szeregowaniu zadań (patrz Furmańczyk i in. [C13], [C9]). Podobnie jest z modelem kolorowania półsprawiedliwego. W pracach [A4, A5] wskazany został model szeregowania, w rozwiązaniu którego można wykorzystać zarówno kolorowanie półsprawiedliwe, jak i sprawiedliwe. Wspomniany model zdefiniowany jest następująco. Danych jest n identycznych zadań j_1, j_2, \dots, j_n , możemy zatem przyjąć, że są one jednostkowe, czyli $p_j = 1$, które mają być wykonane na k nieidentycznych maszynach. Maszyny te charakteryzują się różnymi szybkościami działania (np. maszyny różnej generacji). Prędkości maszyn wynoszą odpowiednio s_1, s_2, \dots, s_m . Maszyny są jednorodne (ang. *uniform*), co oznacza, że jeśli zadanie jest wykonywane przez maszynę M_i , to trwa to $1/s_i$ jednostek czasu. Jeżeli wszystkie zadania są kompatybilne, problem jest trywialny. Przyjmujemy zatem, że niektóre zadania są ze sobą w konflikcie, tzn. nie mogą być wykonywane przez tę samą maszynę. Mamy zatem dany graf niekompatybilności, którego wierzchołki reprezentują zadania, a dwa wierzchołki są sąsiednie, jeżeli odpowiadające zadania nie mogą być wykonane przez tę samą maszynę – są niekompatybilne. Co ważne, zadania przydzielone do maszyny M_i tworzą wsad (ang. *batch*) L_i , $i = 1, \dots, m$, i kolejność ich wykonywania w ramach wsadu nie ma znaczenia. Czas wykonywania wsadu L_i wynosi $|L_i|/s_i$. Czas przybycia zadań do systemu jest taki sam, czyli $r_j = 0$. Z definicji, każdy wsad L_i tworzą zadania kompatybilne, co w przełożeniu na graf niekompatybilności oznacza zbiór niezależny, czy też w pokolorowaniu tego grafu – klasę kolorów. Zatem problem polega na podziale zbioru zadań na wsady (podzbiory zadań kompatybilnych) L_1, L_2, \dots, L_m w taki sposób, aby długość uszeregowania $C_{\max} = \max\{|L_i|/s_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ była jak najmniejsza. W notacji trójpolowej przedmiotowy model szeregowania zadań można opisać:

$$Qm|p_i = 1, G|C_{\max}.$$

W języku teorii grafu problem ten sprowadza się do znalezienia odpowiedniego m -pokolorowania grafu niekompatybilności, czyli na podziale zbioru wierzchołków na zbiory niezależne I_1, I_2, \dots, I_m tak, aby wartość $\max\{|I_i|/s_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ była jak najmniejsza. W niektórych przypadkach, zależnie od wartości zmiennych s_i , oznaczających prędkości maszyn, możliwe jest wykorzystanie modelu sprawiedliwego, czy półsprawiedliwego kolorowania odpowiedniego grafu.

Warto wspomnieć, że jest kilka prac poświęconych chromatycznemu modelowi szeregowaniu zadań, gdzie mamy do czynienia z grafem niekompaty-

bilności. Boudhar w pracach [Bou03, Bou05] rozważał problem szeregowania zadań na maszynach wsadowych z grafem niekompatybilności będącym dopełnieniem grafu dwudzielnego, czy dopełnieniem split grafu. Inne prace na temat szeregowania wsadowego to np. [FJQS08, DWMP07, WDMP05]. We wszystkich tych pracach rozważano identyczne maszyny równoległe. Niewiele jest prac, które poświęcone są maszynom jednorodnym (por. [LZ14]).

W pracy [A4] rozważany jest omówiony na wstępie tego podrozdziału model szeregowania zadań dla przypadku trzech maszyn oraz grafu kompatybilności w postaci grafu kubicznego: $Q3|p_i = 1, G = \text{cubic}|C_{\max}$. Udowodniliśmy, że w przypadku, gdy graf G jest 2-chromatyczny, problem można rozwiązać w czasie $O(n^2)$. Taki algorytm został w pracy wskazany i poddany analizie ([A4], Algorithm 1 w sekcji 2). Jeżeli jednak graf niekompatybilności jest 3-chromatyczny, problem staje się NP-trudnym już dla przypadku, gdy jedna maszyna jest szybsza niż pozostałe dwie, które są tej samej prędkości.

Twierdzenie 14 ([A4], Thm. 2) *Problem $Q3|p_i = 1, G \in \mathcal{Q}_3(n)|C_{\max}$ jest NP-trudny nawet wtedy, gdy $s_1 > s_2 = s_3$.*

W dowodzie twierdzenia 14 wykorzystujemy NP-zupełność półsprawiedliwego kolorowania grafów kubicznych, udowodnioną w pracy [A1]. W pracy [A4] został podany również algorytm o złożoności $O(n^3)$ ([A4], Algorithm 2 w sekcji 3) zwracający uszeregowanie dla problemu, o którym mowa w twierdzeniu 14, o długości mniejszej niż $\frac{10}{7}C_{\max}^*$, czyli $\frac{10}{7}$ długości optymalnego uszeregowania. Ponadto ten sam algorytm zwraca prawie zawsze rozwiązanie optymalne dla przypadku, gdy $3s_1/4 \leq s_2 = s_3$. Wspomniane rozwiązanie optymalne związane jest z istnieniem w grafie G zbioru niezależnego mocy co najmniej $40\%|V|$, co biorąc pod uwagę przytoczone już twierdzenie Frieze i Sueny [FS94] (patrz nierówność (2) niniejszego autoreferatu), prawdopodobieństwo tak licznego zbioru niezależnego rośnie wraz ze wzrostem rzędu grafu.

Pracę [A4] kończymy uogólnieniem przedstawionych wyników na model szeregowania zadań dowolnej długości. Okazuje się, że problem $Q3|G \in \mathcal{Q}_2|C_{\max}$ jest problem NP-trudnym nawet dla maszyn, których prędkości spełniają warunek $s_1 = 2s_2 = 2s_3$.

Praca [A5] również poświęcona jest modelowi szeregowania zadań jednostkowych na maszynach jednorodnych z minimalizacją długości uszeregowania. Tym razem rozważany graf niekompatybilności ma postać grafu dwudzielnego i mamy do dyspozycji cztery maszyny jednorodne: $Q4|p_i = 1, G = \text{bipartite}|C_{\max}$. Udowodniona została NP-trudność rozważanego problemu już dla maszyn, z których trzy najszybsze są jednakowej prędkości.

Twierdzenie 15 ([A5], Thm. 2.1) *Problem $Q4|p_i = 1, G = \text{bipartite}|C_{\max}$ jest NP-trudny nawet wtedy, gdy $s_1 = s_2 = s_3$.*

W dowodzie tego twierdzenia korzystamy z NP-zupełności problemu podziału na ograniczone kliki, którego NP-zupełność została udowodniona już dla grafów dwudzielnych przez Bodlaendera i Jansena [BJ93].

W związku z NP-zupełnością rozważanego w pracy [A5] problemu, zaproponowaliśmy algorytmy przybliżone. Zauważmy najpierw, że gdy wszystkie maszyny są jednakowej prędkości, problem sprowadza się do sprawiedliwego 4-kolorowania grafu niekompatybilności, w którym klasy kolorów odpowiadają wsadom na poszczególne maszyny. Przyjeliśmy zatem, że $s_1 \gg s_2 = s_3 = s_4$ oraz maksymalny stopień grafu niekompatybilności nie przekracza 4. Ogólna idea zaproponowanego przez nas algorytmu ([A5], Algorithm 1 w sekcji 3) polega na znalezieniu pokolorowania półsprawiedliwego, w którym niesprawiedliwa klasa kolorów, mocy największego zbioru niezależnego, odpowiada wsadowi zadań przydzielonych do najszybszej maszyny, natomiast pozostałe zadania są sprawiedliwie dystrybuowane pomiędzy pozostałe trzy maszyny. Złożoność obliczeniowa przedmiotowego algorytmu wynosi $O(n^{1.5})$. Przeprowadzona została analiza przypadków, w których możemy określić, jak bardzo rozwiązanie zwracane przez nasz algorytm odbiega od rozwiązania optymalnego.

Twierdzenie 16 ([A5], Thm. 3.1) *Jeżeli $s_1 \geq 12s_2$ i $s_2 = s_3 = s_4$, to Algorithm 1 zwraca rozwiązanie optymalne.*

Wniosek 17 ([A5], Cor. 3.2) *Jeżeli $s_1 \geq 2s_2$ i $s_2 = s_3 = s_4$, to Algorithm 1 zwraca rozwiązanie o długości równej co najwyżej $2C_{\max}^*$.*

W pracy [A5] rozważany został również przypadek, gdy mamy do dyspozycji dwie nowe i dwie stare maszyny – sekcja 4 tejże pracy. Zaproponowany został algorytm (Algorithm 2) o złożoności $O(n^{1.5})$, który oparty jest na dwukrotnym wyznaczeniu zbioru niezależnego oraz pokolorowaniu reszty grafu w sposób sprawiedliwy. Ponadto udowodnione zostało, że Algorithm 2 dla przypadku, gdy $s_1 \geq s_2 \geq 3s_3 = 3s_4$, zwraca uszeregowanie o długości nie przekraczającej $\frac{32}{15}C_{\max}^*$ ([A5], Lemma 4.1).

Zaproponowane zostały również dwa algorytmy bazujące na sprawiedliwym 4-pokolorowaniu grafu niekompatybilności – 2-przybliżony Algorithm 3 dla przypadku, gdy $s_1 \geq s_2$ i $s_2 \leq 3s_3 = 3s_4$ (por. Lemma 4.2) oraz $\frac{32}{15}$ -przybliżony Algorithm 4 dla przypadku, gdy $s_1 \geq s_2 \geq s_3 = s_4$ (por. Thm. 4.3).

Pracę [A5] kończymy uogólnieniem problemu na większą liczbę maszyn (sekcja 5 pracy [A5]). Okazuje się, że problem $Qm|p_i = 1, G = \text{bipartite}|C_{\max}$ pozostaje NP-trudny już dla $s_1 = s_2 = s_3$. Z drugiej strony, problem ten może być rozwiązany w czasie $O(n^{1.5})$, gdy $s_1 \geq m(m-1)s_2, s_2 = \dots = s_m$ oraz $\Delta \leq m$. Ponadto ten sam algorytm daje rozwiązanie $m/2$ -przybliżone, jeżeli $\frac{1}{2}s_1 \geq s_2 = \dots = s_m$ oraz $\Delta \leq m$.

2.6 Sprawiedliwa listowa drzewiastość grafów prostych

2.6.1 Wprowadzenie

W literaturze znanych jest kilka innych problemów związanych z modelem kolorowania sprawiedliwego. W niektórych z nich nastąpiło pewnego rodzaju złagodzenie (relaksacja) warunku poprawnego pokolorowania. Można sobie wyobrazić wiele kontekstów, w których zbalansowanie zasobów jest ważniejsze niż pokolorowanie, które w całości eliminuje konflikty. W 2011 Fan et al. [FKL⁺11] wprowadził model kolorowania sprawiedliwego zrelaksowanego (ang. *equitable relaxed coloring*), znanego również jako sprawiedliwe kolorowanie z defektem (ang. *equitable defective coloring*). Mówimy, że graf ma *sprawiedliwe k -pokolorowanie z defektem*, jeżeli istnieje takie k -pokolorowanie, w którym każdy wierzchołek współdzieli ten sam kolor z co najwyżej jednym sąsiadem oraz różnica pomiędzy licznościami klas kolorów nie przekracza 1, czyli to pokolorowanie jest sprawiedliwe (por. [WVY12]). W 2013 Wu, Zhang i Li uogólnili ten problem, wprowadzając model kolorowania sprawiedliwego (t, k) -drzewowego. t -pokolorowanie grafu G jest (t, k) -drzewowym, jeżeli każda klasa kolorów indukuje las o maksymalnym stopniu co najwyżej k . Innymi słowy, podgraf indukowany przez każdą z klas jest acykliczny. *Wierzchołkową k -drzewiastością*, oznaczaną przez $\rho_k(G)$ (lub $va_k(G)$), nazywamy najmniejszą wartość t taką, że G ma (t, k) -drzewowe-pokolorowanie. W *sprawiedliwym (t, k) -pokolorowaniu* rozważane pokolorowanie musi być dodatkowo sprawiedliwe. Pewne ograniczenia tego parametru zostały podane w [WZL13, Zha16b].

Każdy z wymienionych modeli można rozpatrywać również w wersji listowej. Niech L będzie przyporządkowaniem list dozwolonych kolorów do każdego z wierzchołków w grafie G . L -pokolorowaniem grafu G nazywamy takie przyporządkowanie wierzchołkom kolorów, że dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ jego kolor należy do $L(v)$. Listowe przyporządkowanie L nazywamy *k -jednolitym* (ang. *k -uniform*), jeśli $|L(v)| = k$ dla każdego wierzchołka $v(G)$. Mówimy, że graf G jest *k -wybieralny*, jeśli dla każdego k -jednolitego przyporządkowania L graf G ma poprawne L -pokolorowanie. Graf G jest *k -listowo*

drzewiasty (ang. *k-list arborable*), jeśli dla każdego k -jednolitego przyporządkowania listowego L graf G ma L -pokolorowanie, w którym każda klasa kolorów indukuje graf acykliczny. Graf G jest *sprawiedliwie k -wybieralny* (ang. *equitable k -choosable*), jeśli dla każdego k -jednolitego przyporządkowania listowego L graf G ma poprawne L -pokolorowanie, w którym każda klasa kolorów jest rozmiaru co najwyżej $\lceil |V(G)|/k \rceil$ (por. [KPW03]). Graf G jest *sprawiedliwie k -listowo drzewiasty* (ang. *equitable k -list arborable*), jeżeli dla każdego k -jednolitego przyporządkowania listowego L graf G ma L -pokolorowanie, w którym każda klasa kolorów jest rozmiaru co najwyżej $\lceil |V(G)|/k \rceil$ oraz każda klasa kolorów indukuje graf acykliczny. Najmniejszą wartość k , dla której graf G jest *sprawiedliwie k -listowo drzewiasty* (ang. *equitably k -list arborable*) nazywamy *sprawiedliwą listową drzewiastością wierzchołków* grafu G (ang. *equitable list vertex arboricity*) i oznaczamy przez $\rho_l^-(G)$. Model sprawiedliwej drzewiastości listowej został wprowadzony przez Zhanga w 2016 roku [Zha16a]. Praca [A7] jest drugą pracą poświęconą tej tematyce.

2.6.2 Omówienie wyników

Zhang w swojej pracy ([Zha16a]) sformułował dwie hipotezy.

Hipoteza 3 ([Zha16a]) *Dla każdego grafu prostego G zachodzi $\rho_l^-(G) \leq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$.*

Hipoteza 4 ([Zha16a]) *Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli $k \geq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$, to każdy graf prosty G jest *sprawiedliwie k -listowo drzewiasty*.*

Hipotezy te zostały potwierdzone przez Zhanga [Zha16a] dla grafów pełnych, 2-zdegenerowanych, 3-zdegenerowanych bez pazura o maksymalnym stopniu $\Delta(G) \geq 4$, czy grafów planarnych z $\Delta(G) \geq 8$. W dowodach swoich twierdzeń Zhang głównie posługiwał się następującym lematem.

Lemat 18 ([Zha16a]) *Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz $S = \{x_1, \dots, x_k\}$, gdzie x_1, \dots, x_k są różnymi wierzchołkami w grafie G . Jeżeli graf $G - S$ jest *sprawiedliwie k -listowo drzewiasty* oraz nierówność*

$$|N_G(x_i) \setminus S| \leq 2i - 1 \tag{3}$$

*zachodzi dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, to graf G jest *sprawiedliwie k -listowo drzewiasty*.*

W pracy [A7] uogólniliśmy powyższy lemat oraz podaliśmy nowe narzędzia, pomocne w wyznaczeniu wartości k , dla których graf jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty. Pozwoliły one między innymi na udowodnienie hipotez Zhanga dla d -wymiarowych krat (ang. *grids*), przy $d \in \{2, 3, 4\}$. Przypomnijmy, kratę definiujemy jako iloczyn kartezjański ścieżek, $P_{n_1} \square P_{n_2} \square \cdots \square P_{n_d}$.

Zacznijmy od uogólnienia lematu 4. Na jego potrzeby został wprowadzony koncept k -podziału specjalnego. Niech $k \in \mathbb{N}^+$. k -podziałem grafu G nazywamy podział zbioru wierzchołków na $\lceil |V(G)|/k \rceil$ podzbiorów. k -podział jest *specjalny*, jeśli wszystkie podzbiory tego podziału, poza co najwyżej jednym, są rozmiaru k . Ponadto przyjmujemy oznaczenia: jeżeli $a < b$, to $[a, b]$ oznacza zbiór $\{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$, $[1, b] = [b]$.

Lemat 19 ([A7], Lemma 2.6) *Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli graf G ma k -podział specjalny $S_1 \cup \cdots \cup S_{\eta+1}$ taki, że $|S_1| \leq k$ i $|S_j| = k$ dla $j \in [2, \eta + 1]$, ponadto, jeśli dla każdego $j \in [2, \eta + 1]$ istnieje uporządkowanie x_1^j, \dots, x_k^j wierzchołków zbioru S_j takie, że dla każdego $i \in [k]$ zachodzi nierówność*

$$|N_G(x_i^j) \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1})| \leq 2i - 1, \quad (4)$$

to G jest sprawiedliwie t -listowo drzewiasty dla każdego $t \geq k$.

Zauważmy, że lemat 5 daje nam ciągłość własności sprawiedliwej t -listowej drzewiastości. Podobny lemat został udowodniony dla sprawiedliwej t -wybieralności:

Lemat 20 ([A7], Lemma 2.5) *Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli graf G ma k -podział specjalny $S_1 \cup \cdots \cup S_{\eta+1}$ taki, że $|S_1| \leq k$ i $|S_j| = k$ dla $j \in [2, \eta + 1]$, ponadto, jeśli dla każdego $j \in [2, \eta + 1]$ istnieje uporządkowanie x_1^j, \dots, x_k^j wierzchołków zbioru S_j takie, że dla każdego $i \in [k]$ zachodzi nierówność*

$$|N_G(x_i^j) \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{j-1})| \leq i - 1, \quad (5)$$

to G jest sprawiedliwie t -wybieralny dla każdego $t \geq k$.

Kolejnym narzędziem pomocnym przy formułowaniu oszacowań na sprawiedliwą drzewiastość grafu G , $\rho_l^-(G)$, jest lemat łączący wyniki dla sprawiedliwej wybieralności oraz drzewiastości listowej. Graf H jest grafem *rozpinającym* (ang. *spanning graph*) grafu G , jeśli H jest podgrafem grafu G takim, że $V(H) = V(G)$. Mówimy, że graf H *pokrywa* wszystkie cykle w G , jeśli jest jego grafem rozpinającym i dla każdego cyklu C zawartego w G istnieją wierzchołki $x, y \in V(C)$ takie, że $xy \in E(H)$.

Lemat 21 ([A7], Lemma 2.7) Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli H jest grafem pokrywającym wszystkie cykle grafu G oraz H jest sprawiedliwie k -wybieralny, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.

Wykorzystując lemat 21 udowodnione zostały m.in. następujące twierdzenia.

Twierdzenie 22 ([A7], Thm. 2.9) Niech $r \in \mathbb{N}$ oraz niech G będzie grafem z co najmniej jedną krawędzią i maksymalnym stopniem $\Delta(G)$ spełniającym nierówność $\Delta(G) - 1 \leq r$.

(i) Jeśli $r \leq 7$ i $k \geq r + 1$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.

(ii) Jeśli $k \geq r + \begin{cases} 1 + \frac{r-1}{7} & \text{dla } r \leq 30 \\ \frac{r}{6} & \text{dla } r \geq 31 \end{cases}$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.

(iii) Jeśli $|V(G)| \geq r^3$ i $k \geq r + 2$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.

(iv) Jeśli $\omega(G) \leq r$ i $|V(G)| \geq 3(r + 1)r^8$, to G jest sprawiedliwie $(r + 1)$ -listowo drzewiasty.

Twierdzenie 23 ([A7], Thm. 2.11) Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech G będzie grafem z krawędziową drzewiastością równą 2. Jeżeli $k \geq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.

Ostatnie twierdzenie wykorzystuje drzewiastść krawędziową (model bez list). Parametr ten jest zdefiniowany jako najmniejsza liczba lasów, na które można podzielić zbiór krawędzi grafu. Ponieważ każdy 2-zdegenerowany graf ma krawędziową drzewiastść równą 2, twierdzenie 23 potwierdza wynik uzyskany przez Zhanga [Zha16a] dla grafów 2-zdegenerowanych.

Ponadto zaproponowane w pracy [A7] nowe narzędzia zostały wykorzystane do uzyskania wyników dla sprawiedliwej k -listowej drzewiastści krat. Udowodnione zostały następujące twierdzenia.

- kraty dwuwymiarowe

Twierdzenie 24 ([A7], Thm. 4.1) Niech $k \in \mathbb{N}$. Każda dwuwymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta dla wszystkich $k \geq 2$.

- kraty trójwymiarowe

Twierdzenie 25 ([A7], Thm. 4.2) *Niech $k, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ z $n_2 \geq 2$, $n_3 \geq 2$. Jeżeli $k \geq 2$, to graf $P_2 \square P_{n_2} \square P_{n_3}$ jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Twierdzenie 26 ([A7], Thm. 4.3) *Niech $n_3, k \in \mathbb{N}$ z $n_3 \geq 3$. Jeżeli $k \geq 2$, to graf $P_3 \square P_3 \square P_{n_3}$ jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Twierdzenie 27 ([A7], Thm. 4.4) *Niech $n_1, n_2, n_3, k \in \mathbb{N}$. Jeżeli $k \geq 3$, to graf $P_{n_1} \square P_{n_2} \square P_{n_3}$ jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

- kraty czterowymiarowe

Twierdzenie 28 ([A7], Thm. 4.5) *Niech $n_4, k \in \mathbb{N}$ z $n_4 \geq 2$. Jeżeli $k \geq 2$, to graf $P_2 \square P_2 \square P_2 \square P_{n_4}$ jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Twierdzenie 29 ([A7], Thm. 4.6) *Niech $n_3, n_4, k \in \mathbb{N}$ z $n_3 \geq 2$ i $n_4 \geq 2$. Jeżeli $k \geq 3$, to graf $P_2 \square P_2 \square P_{n_3} \square P_{n_4}$ jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Twierdzenie 30 ([A7], Thm. 4.7 i 4.8) *Każda czterowymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta dla każdego $k \geq 4$.*

Natomiast dla krat wyższego wymiaru uzyskaliśmy następujące oszacowania.

Twierdzenie 31 ([A7], Thm. 4.11) *Niech $d, k \in \mathbb{N}$.*

- (i) *Jeżeli $k \geq 8$, to każda 5-wymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta.*
- (ii) *Jeżeli $d \in [6, 16]$ i $k \geq 2d - 2 + \frac{2d-4}{7}$, to każda d -wymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta.*
- (iii) *Jeżeli $d \geq 17$ i $k \geq 2d - 3 + \frac{2d-3}{6}$, to każda d -wymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta.*

Ponieważ w części dowodów powyższych twierdzeń wykorzystywaliśmy lemat 21, który używa własności sprawiedliwej wybieralności rozważanych grafów, należało najpierw te własności dla krat udowodnić. Poświęcona jest

temu sekcja 3 pracy [A7]. Lematy/uwagi 3.1-3.10 same w sobie stanowią ciekawe wyniki dotyczące sprawiedliwej wybieralności krat.

Należy zauważyć, że zawarte w pracy [A7] wyniki potwierdzają hipotezy Zhanga dla d -wymiarowych krat dla $d \in \{2, 3, 4\}$. Są one nawet silniejsze niż same hipotezy.

Wniosek 32 ([A7], Cor. 5.1) *Niech $k \in \mathbb{N}$ i $d \in \{2, 3, 4\}$. Jeżeli G jest d -wymiarową kratą i $k \geq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Wniosek 33 ([A7], Cor. 5.2) *Niech $d, k \in \mathbb{N}$ z $d \geq 2$ i $k \geq 2$. Jeżeli G jest d -wymiarową kratą z $\Delta(G) \leq 5$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Wniosek 34 ([A7], Cor. 5.3) *Niech $k \in \mathbb{N}$, $d \in \{2, 3, 4\}$, i niech G będzie d -wymiarową kratą z $\Delta(G) \geq 6$ różną od iloczynu kartezjańskiego $P_{n_1} \square P_{n_2} \square P_{n_3} \square P_2$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Jeżeli $k \geq \lfloor (\Delta(G))/2 \rfloor$, to G jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

Uzyskane wyniki oraz tok dochodzenia do nich skłoniły nas do postawienia następujących hipotez.

Hipoteza 5 ([A7], Conj. 4) *Niech $k, d \in \mathbb{N}$. Jeżeli $k \geq \lceil (d + 1)/2 \rceil$, to każda d -wymiarowa krata jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasta.*

Hipoteza 6 ([A7], Conj. 5) *Istnieje graf G i $k \in \mathbb{N}$ takie, że G jest k -listowo drzewiasty i G ma k -pokolorowanie, w którym każdy kolor jest użyty co najwyżej $\lceil |V(G)|/k \rceil$ razy oraz każda klasa kolorów indukuje graf acykliczny. Jednak graf G nie jest sprawiedliwie k -listowo drzewiasty.*

2.7 Podsumowanie

Do najistotniejszych wyników omówionych powyżej w osiągnięciu naukowym należą:

1. Zbadanie złożoności problemu sprawiedliwego kolorowania grafów oraz porównanie złożoności problemu kolorowania klasycznego oraz sprawiedliwego dla wybranych klas grafów. Wskazanie przykładów klas grafów, dla których problem kolorowania sprawiedliwego jest trudniejszy, w sensie złożoności, od kolorowania klasycznego.
2. Wskazanie algorytmów przybliżonych dla podklas grafów, dla których problem sprawiedliwego kolorowania jest trudny (algorytm 1-absolutnie przybliżony dla koron grafów kubicznych).

3. Potwierdzenie hipotez ECC oraz Δ ECC dla wybranych klas grafów.
4. Na potrzeby dowodu dotyczącego sprawiedliwego kolorowania grafów, przeprowadzenie analizy problemu bipartyzacji grafu kubicznego poprzez usunięcie zbioru niezależnego, w szczególności:
 - (a) udowodnienie, że problem $BIS(Q, k)$ można rozwiązać w czasie wielomianowym dla trójdzielnych grafów kubicznych z liczbą niezależności co najmniej $0.4|Q|$ oraz k spełniającym nierówność: $\lfloor (n - \alpha(Q))/2 \rfloor \leq k \leq \alpha(Q)$;
 - (b) wskazanie algorytmu o złożoności $O(n^3)$ dokonującego odpowiedniej bipartyzacji;
 - (c) zdefiniowanie otwartych przypadków dla problemu $BIS(Q, k)$.
5. Zbadanie złożoności problemu sprawiedliwego kolorowania hipergrafów, w szczególności:
 - (a) udowodnienie NP-zupełności sprawiedliwego 2-kolorowania 3-jednolitych hipergwiazd;
 - (b) porównanie złożoności sprawiedliwego oraz klasycznego kolorowania hipergrafów dwudzielnych oraz grafów prostych dwudzielnych;
 - (c) wskazanie wielomianowo rozwiązywalnego przypadku dla hipergrafów dwudzielnych;
 - (d) konstrukcja uniwersalnego algorytmu o złożoności $O(n^2)$ oparte go na programowaniu dynamicznym dla kolorowania liniowych hiperdrzew w modelach opartych na liczności klas kolorów.
6. Zdefiniowanie modelu kolorowania półsprawiedliwego. Analiza złożoności problemu dla grafów kubicznych i podkubicznych. W szczególności wyznaczono ścisłą granicę pomiędzy przypadkami wielomianowymi a NP-trudnymi dla problemu SECCD (twierdzenia 8 i 9 niniejszego opracowania).
7. Przedstawienie potencjalnych zastosowań modeli kolorowania sprawiedliwego oraz półsprawiedliwego w problemach szeregowania zadań na maszynach jednorodnych. W szczególności:
 - (a) zbadanie problemu $Q3|p_i = 1, G = cubic|C_{\max}$:
 - wskazanie algorytmu o złożoności $O(n^2)$ dla przypadku, gdy G jest dwudzielnym grafem kubicznym,

- udowodnienie NP-zupełności dla przypadku, gdy G jest grafem 3-chromatycznym,
 - wskazanie algorytmów przybliżonych dla wybranych przypadków prędkości maszyn jednorodnych,
 - uogólnienie problemu do modelu szeregowania zadań dowolnej długości;
- (b) zbadanie problemu $Q4|p_i = 1, G = bipartite|C_{\max}$:
- udowodnienie NP-zupełności problemu,
 - skonstruowanie wielomianowych algorytmów przybliżonych oraz dokładnych dla pewnych podprzypadków rozważanego problemu,
 - uogólnienie problemu na większą liczbę maszyn.
8. Przedstawienie nowych narzędzi użytecznych w badaniu parametru sprawiedliwej listowej drzewiastości grafów prostych. W szczególności:
- (a) uogólnienie lematu Zhanga,
 - (b) powiązanie wyników sprawiedliwej wybieralności ze sprawiedliwą listową drzewiastością,
 - (c) potwierdzenie hipotez Zhanga dla d -wymiarowych krat, $d \in \{2, 3, 4\}$,
 - (d) uzyskanie wyników silniejszych niż hipoteza Zhanga dla d -wymiarowych krat, $d \in \{2, 3, 4\}$,
 - (e) podanie oszacowań sprawiedliwej listowej drzewiastości grafów ogólnych,
 - (f) sformułowanie dwóch hipotez (hipoteza 5 dla krat oraz hipoteza 6 dla grafów ogólnych).

Bibliografia

- [BDF⁺18] M. Bonamy, K.K. Dąbrowski, C. Feghali, J. Matthew, D. Paulusma. Independent feedback vertex set for P_5 -free graphs. *Algorithmica*, 2018. <https://doi.org/10.1007/s00453-018-0474-x>.
- [BF05] H.L. Bodlaender, F.V. Fomin. Equitable colorings of bounded treewidth graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 349:22–30, 2005.
- [BJ93] H.L. Bodlaender, K. Jansen. On the complexity of scheduling incompatible jobs with unit-times. *LNCS*, 711:291–300, 1993.

- [BJ95] H.L. Bodlaender, K. Jansen. Restrictions of graph partition problems, I. *Theor. Comput. Sci.*, 148:93–109, 1995.
- [Bou03] M. Boudhar. Scheduling a batch processing machine with bipartite compatibility graphs. *Math. Methods Oper. Res.*, 57:513–527, 2003.
- [Bou05] M. Boudhar. Scheduling on a batch processing machine with split compatibility graphs. *J. Math. Modelling Algorithms*, 4:391–407, 2005.
- [BPP⁺17] O. Baudon, M. Piłśniak, J. Przybyło, M. Senhaji, E. Sopena, M. Woźniak. Equitable neighbour-sum-distinguishing edge and total colourings. *Discrete Appl. Math.*, 222:40–53, 2017.
- [BS77] C. Berge, F. Sterboul. Equipartite colorings in graphs and hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 22:97–113, 1977.
- [CLW94] B.L. Chen, K.W. Lih, P.L. Wu. Equitable coloring and the maximum degree. *Eur. J. Comb.*, 15(5):443–447, 1994.
- [CXYZ09] T. Chunling, L. Xiaohui, Y. Yuansheng, L. Zhihe. Equitable total coloring of $C_m \square C_n$. *Disc. App. Math.*, 157:596–601, 2009.
- [CY12] B.L. Chen, C.H. Yen. Equitable Δ -coloring of graphs. *Discrete Math.*, 312(9):1512–1517, 2012.
- [DWMP07] M. Demange, D. de Werra, J. Monnot, V.Th. Paschos. Time slot scheduling of compatible jobs. *J. Scheduling*, 10:111–127, 2007.
- [FH70] R. Frucht, F. Harary. On the corona of two graphs. *Aequationes Math.*, 4, 1970.
- [FJQS08] G. Finke, V. Jost, M. Queyranne, A. Sebó. Batch processing with interval graph compatibilities between tasks. *Discrete Appl. Math.*, 156:556–568, 2008.
- [FKL⁺11] H. Fan, H.A. Kiersead, G. Liu, T. Molla, J.L. Wu. A note on relaxed equitable coloring of graphs. *Inform. Process. Lett.*, 111:1062–1066, 2011.
- [FS94] A. Frieze, S. Suen. On the independence number of random cubic graphs. *Random Graphs and Structures*, 5:649–664, 1994.

- [HS70] A. Hajnal, E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. *Combinatorial Theory and Its Applications*, 2:601–623, 1970.
- [Kar72] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of computer computations*. Springer, Boston, MA, 1972.
- [KK12] H.A. Kierstead, A.V. Kostochka. Every 4-colorable graph with maximum degree 4 has an equitable 4-coloring. *J. Graph Theory*, 71(1):31–48, 2012.
- [KKMS10] H.A. Kierstead, A.V. Kostochka, M. Mydlarz, E. Szemerédi. A fast algorithm for equitable coloring. *Combinatorica*, 30(2):217–224, 2010.
- [KN03] A.V. Kostochka, K. Nakprasit. Equitable colourings of d -degenerate graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 12(1):53–60, 2003.
- [KNP05] A.V. Kostochka, K. Nakprasit, S.V. Pemmaraju. On equitable coloring of d -degenerate graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 19(1):83–95, 2005.
- [KPW03] A. V. Kostochka, M. J. Pelsmayer, D. B. West. A list analogue of equitable coloring. *J. Graph Theory*, 44(3):166–177, 2003.
- [LC10] W.H. Lin, G.J. Chang. Equitable colorings of Kronecker products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158(16):1816–1826, 2010.
- [LC12] W.H. Lin, G.J. Chang. Equitable colorings of Cartesian products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160(3):239–247, 2012.
- [Lih98] K.W. Lih. The equitable coloring of graphs. *Handbook of Combinatorial Optimization*. Springer, 1998. (D.Z. Du, P.M. Pardalos, Eds.).
- [Lov73] L. Lovasz. Coverings and colorings of hypergraphs. *Utilitas Math.*, 8:3–12, 1973.
- [LRSS18] C.V.G.C. Lima, D. Rautenbach, U.S. Souza, J.L. Szwarcfiter. Bipartizing with a matching. Zelikovsky A. Kim D., Uma R., redaktor, *Combinatorial Optimization and Applications. COCOA 2018. Lecture Notes in Computer Science*, wolumen 11346, strony 198–213. Springer, 2018.

- [LZ14] S.S. Li, Y.Z. Zhang. Serial batch scheduling on uniform parallel machines to minimize total completion time. *Inf. Process. Lett.*, 114:692–695, 2014.
- [Mey73] W. Meyer. Equitable coloring. *Amer. Math. Monthly*, 80:920–922, 1973.
- [Sha15] D.A. Shabanov. Equitable two-colorings of uniform hypergraphs. *Eur. J. Combin.*, 43:185–203, 2015.
- [Shi15] I. Shirgazina. Equitable colorings of non-uniform simple hypergraphs. *Electron. Notes in Discrete Math.*, 49:699–703, 2015.
- [Shi16] I. Shirgazina. Equitable colorings of nonuniform hypergraphs. *Math. Notes*, 99:444–456, 2016.
- [WDMP05] D. de Werra, M. Demange, J. Monnot, V.Th. Paschos. A hypocoloring model for batch scheduling. *Discrete Appl. Math.*, 146:3–26, 2005.
- [WVY12] L. Williams, J. Vandenbussche, G. Yu. Equitable defective coloring of sparse planar graphs. *Discrete Math.*, 312:957–962, 2012.
- [WZL13] J.L. Wu, X. Zhang, H. Li. Equitable vertex arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 313:2696–2701, 2013.
- [YW14] Z. Yan, W. Wang. Equitable coloring of kronecker products of complete multipartite graphs and complete graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 162:328–333, 2014.
- [Zha16a] X. Zhang. Equitable list point arboricity of graphs. *Filomat*, 30(2):373–378, 2016.
- [Zha16b] X. Zhang. Equitable vertex arboricity of subcubic graphs. *Discrete Math.*, 339:1724–1726, 2016.

3 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i ich omówienie

Artykuły w czasopismach znajdujących się z bazie Journal Citation Reports

- [B1] Hanna Furmańczyk, Adrian Kosowski, Paweł Żyliński. A note on mixed tree coloring. *Information Processing Letters*, 106(4):133–135, 2008.
- [B2] Hanna Furmańczyk, Adrian Kosowski, Bernard Ries, Paweł Żyliński. Mixed graph edge coloring. *Discrete Mathematics*, 309(12):4027–4036, 2009.
- [B3] Tomasz Dzido, Hanna Furmańczyk. Altitude of wheels and wheel-like graphs. *Central European Journal of Mathematics*, 8(2):319–326, 2010.
- [B4] Hanna Furmańczyk, Andrzej Jastrzębski, Marek Kubale. Equitable coloring of graphs. recent theoretical results and new practical algorithms. *Archives of Control Sciences*, 26(3):281–295, 2016.
- [B5] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale, Vahan V. Mkrtchyan. Equitable colorings of corona multiproducts of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37(4):1079–1094, 2017.
- [B6] Hanna Furmańczyk, Vernold Joseph Vivin, N. Mohanapriya. r -dynamic chromatic number of some line graphs. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 49(4):591–600, 2018.
- [B7] Hanna Furmańczyk, Kowsalya.V, Vernold Joseph Vivin. On star coloring of splitting graphs. *Praca przyjęta do druku w Ars Combinatoria*, 2018.

Rozdziały w książkach, monografie

- [M1] Hanna Furmańczyk. Sprawiedliwe kolorowanie grafów. Marek Kubale, redaktor, *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów*, strony 72–92. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2002.
- [M2] Hanna Furmańczyk. Equitable coloring of graphs. Marek Kubale, redaktor, *Graph colorings*, wolumen 352, strony 35–54. Providence, RI; American Mathematical Society, 2004.

- [M3] Hanna Furmańczyk. *Sprawiedliwe i ograniczone kolorowanie grafów*. Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Politechnika Gdańska. Rozprawa doktorska (2005).

Artykuły w innych czasopismach oraz recenzowanych materiałach konferencyjnych

- [C1] Hanna Damrath, Marek Kubale. Algorytmy sprawiedliwego kolorowania grafów. *Zesz. Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Automatyka*, 123:111–120, 1998.
- [C2] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Color-feasible sequences and 0-1 time open shop problem: A survey. *Discrete Optimization Methods in Scheduling and Computer-Aided Design. International Workshop*, strony 36–40, 2000.
- [C3] Hanna Furmańczyk, Krzysztof Giaro. Ograniczone (p_1, p_2, \dots, p_k) -kolorowanie wierzchołków grafów. *EXIT*, 2002.
- [C4] Hanna Furmańczyk, Paweł Żyliński. Wsadowe szeregowanie zadań jednostkowych na pojedynczym procesorze. *Zeszyty Naukowe. Automatyka/Politechnika Śląska*, (134):127–137, 2002.
- [C5] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Szeregowanie zadań sprzężonych metodą kolorowania grafów. *Zeszyty Naukowe AGH, Ser. Automatyka*, 7:97–104, 2003.
- [C6] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Equitable vertex coloring of graphs. *System Modelling Control - 2005*. EXIT, 2005.
- [C7] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. The complexity of equitable vertex coloring of graphs. *Journal of Applied Computer Science*, 13(2):95–106, 2005.
- [C8] Hanna Furmańczyk, Krzysztof Giaro, Marek Kubale. Equitable 4-coloring of cacti and edge-cacti in polynomial time. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 27(3):379–392, 2006.
- [C9] Hanna Furmańczyk. Equitable coloring of graph products. *Opuscula Mathematica*, 26(1):31–44, 2006.

- [C10] Hanna Furmańczyk, Adrian Kosowski, Paweł Żyliński. Scheduling with precedence constraints: Mixed graph coloring in series-parallel graphs. R. Wyrzykowski, J.J. Dongarra, K. Karczewski, J. Wasniewski, redaktorzy, *7th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics. Lecture Notes of Computer Science*, wolumen 4967, strony 1001–1008. Springer, 2007.
- [C11] Robert Fidytek, Hanna Furmańczyk, Paweł Żyliński. Equitable coloring of Kneser graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(1):119–142, 2009.
- [C12] Hanna Furmańczyk, Kalimuthu Kaliraj, Marek Kubale, Vernold Joseph Vivin. Equitable coloring of corona products of graphs. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 11(2):103–120, 2013.
- [C13] Hanna Furmańczyk, Marek Kubale. Equitable and semi-equitable coloring of cubic graphs and its application in batch scheduling. *Archives of Control Sciences*, 25(1):109–116, 2015.
- [C14] Hanna Furmańczyk, Artur Koliński. Wydajny algorytm dla r -sprawiedliwego kolorowania grafów. *Automatyzacja procesów dyskretnych. Teoria i zastosowania*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2018.

3.1 Omówienie

Pozostały dorobek publikacyjny obejmuje następujące tematy:

- kolorowanie grafów mieszanych (prace [B1], [B2], [C10]),
- etykietowanie krawędzi grafów prostych (praca [B3]),
- sprawiedliwe kolorowanie grafów wraz z zastosowaniami (prace [B4], [B5], [M1]-[M3], [C1], [C6]-[C9],[C11]-[C14]),
- r -sprawiedliwe kolorowanie grafów (praca [C14]),
- ograniczone kolorowanie grafów wraz z zastosowaniami (prace [M3], [C2]-[C5]),
- r -dynamiczne kolorowanie grafów (praca [B6]),
- gwiazdowe kolorowanie grafów (praca [B7]).

Część z publikacji w tematyce sprawiedliwego i ograniczonego kolorowania grafów powstała przed doktoratem i została uwzględniona w rozprawie doktorskiej (prace [C1]-[C9]). Skupię się tutaj zatem na omówieniu prac z okresu po uzyskaniu stopnia doktora. Dla ułatwienia, bibliografia dotycząca poszczególnych wątków tematycznych, prezentowana jest bezpośrednio pod opisem wyników.

3.1.1 Kolorowanie grafów mieszanych

Prace [B1, B2] oraz [C10] poruszają problem kolorowania grafów mieszanych. Przypomnijmy, graf *mieszany* $G_M = (V, E, A)$ jest grafem na zbiorze wierzchołków V zawierającym zbiór krawędzi nieskierowanych E oraz zbiór łuków A . Takie grafy mają zastosowanie w chromatycznym szeregowaniu zadań, gdzie, pomiędzy zadaniami, jednocześnie mamy do czynienia z zależnościami kolejnościowymi (ang. *precedence constraints*) jak i niekompatybilnościami (ang. *incompatibility constraints*). We wspomnianych pracach rozważamy zarówno kolorowanie wierzchołków jak i krawędzi grafów mieszanych. k -pokolorowanie wierzchołków grafu G_M jest funkcją $\psi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ spełniającą warunki: $\psi(u) \neq \psi(v)$ dla wszystkich $\{u, v\} \in E$ oraz $\psi(u) < \psi(v)$ dla wszystkich $(u, v) \in A$. Przy kolorowaniu krawędzi grafu mieszane go definicja pokolorowania jest analogiczna. Żadne dwie sąsiednie krawędzie (skierowane lub nieskierowane) nie mogą otrzymać tego samego koloru, a dla każdych dwóch łuków e, e' tworzących skierowaną ścieżkę (e, e') , kolor łuku e musi być mniejszy niż kolor przydzielony łukowi e' .

W pracy [B1] podaliśmy liniowy algorytm kolorujący wierzchołki mieszanych drzew. Poprawiony został w ten sposób, znany do czasu opublikowania pracy, algorytm o złożoności kwadratowej autorstwa Hansena i in. [D1]. Praca [B2] poświęcona jest kolorowaniu mieszanych grafów szeregowo-równoległych (ang. *series-parallel graph*). Podaliśmy algorytm o złożoności $O(n^{3.376} \log n)$ zwracający pokolorowanie optymalne mieszane go grafu szeregowo-równoległego. Algorytm ten korzysta ze struktury drzewa parsowania (ang. *parse tree*) odpowiadającego danemu grafowi szeregowo-równoległemu. W pracy tej wskazujemy również zastosowanie modelu kolorowania grafów mieszanych w szeregowaniu zadań jednostkowym na maszynach dedykowanych w systemie ogólnym (ang. *job shop*). Ostatnia z cyklu praca poświęcona tematyce grafów mieszanych [C10] zajmuje się złożonością problemu. Wykazaliśmy NP-zupełność k -KOLOROWANIA KRAWĘDZI GRAFÓW MIESZANYCH dla dwudzielnych grafów zewnętrznie planarnych, gdzie liczba kolorów jest nieograniczona. Wykazaliśmy również, że gdy ustalimy liczbę kolorów, problem staje się wielomianowym i może być rozwiązany

jedną ze standardowych technik dla częściowych k -drzew. Wskazaliśmy również kilka ograniczeń na mieszany indeks chromatyczny, czyli najmniejszą liczbę kolorów dopuszczającą pokolorowanie krawędzi grafu mieszanego.

Literatura

- [D1] P. Hansen, J. Kuplinsky, D. de Werra. Mixed graph colorings. *Math. Methods Oper. Res.*, 45:145–160, 1997.

3.1.2 Etykietowanie krawędzi grafów prostych

Praca [B3] dotyczy jednego z parametrów związanych z etykietowaniem krawędzi w grafie, mianowicie parametru *altitude*. Formalnie, etykietowaniem krawędzi nazywamy funkcję 1-1 $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$. Jeśli rozpatrzmy wszystkie możliwe etykietowania $f \in \mathcal{F}$ i wyliczymy dla każdego z nich jego *dlugość/wysokość* (ang. *height*), jako długość najdłuższej ścieżki rosnącej, to parametr *altitude* wyliczany jest następująco:

$$\alpha(G) = \min_{f \in \mathcal{F}} h(f).$$

Parametr ten został zdefiniowany przez Chvátala i Komlósa [E1]. Problem wyznaczenia parametru dla grafów dowolnych jest problemem trudnym [E2]. Znamy jego wartość jedynie dla wybranych klas grafów: cykli, małych grafów pełnych, wybranych pełnych grafów dwudzielnych (por. [E3]). W pracy [B3] wyznaczyliśmy dokładną wartość $\alpha(G)$ dla kół oraz pewnych klas grafów będących pod- lub nadgrafami kół.

Literatura

- [E1] V. Chvátal, J. Komlós. Some combinatorial theorems on monotonicity. *Canad. Math. Bull.*, 14:151–157, 1971.
- [E2] J. Katrenič, G. Semanišin. Complexity of ascent finding problem. *Proceedings of SOFSEM 2008, High Tatras, Slovakia, January 20-24, 2008*, strony 70–77, 2008.
- [E3] A.P. Burger, C.M. Mynhardt, T.C. Clark, B. Falvai, N.D.R. Henderson. Altitude of regular graphs with girth at least five. *Disc. Math.*, 294:241–257, 2005.

3.1.3 Sprawiedliwe i r -sprawiedliwe kolorowanie grafów

Jak już pokazaliśmy przy omawianiu głównego osiągnięcia, sprawiedliwe kolorowanie grafów w przypadku ogólnym jest problemem trudnym obliczeniowo. Dlatego też główne trendy w prowadzeniu badań w tej tematyce są następujące:

- poszukiwanie klas grafów, dla których przedmiotowy problem można rozwiązać w czasie wielomianowym,
- konstruowanie wielomianowych algorytmów przybliżonych, czy heurystyk, kolorujących sprawiedliwie dowolne grafy – nie zawsze w sposób optymalny,
- wyznaczanie ograniczeń na parametry związane z rozważanym modelem, np. na sprawiedliwą liczbę chromatyczną.

Prace aplikantki w tej tematyce również wpisują się w wyżej wymienione trendy. W pracy [C11] rozważany jest problem sprawiedliwego kolorowania grafów Knesera. Graf Knesera $K(n, k)$ jest grafem, w którym wierzchołki odpowiadają k -elementowym podzbiорom zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im podzbiory są rozłączne. W pracy podajemy dokładną wartość na sprawiedliwą liczbę chromatyczną grafów $K(n, 2)$ oraz $K(n, 3)$. Dowody mają charakter konstrukcyjny, co przekłada się na dokładne algorytmy wielomianowe kolorujące sprawiedliwie rozważane grafy. W pracy [C11] podajemy również dokładne oszacowanie na $\chi_=(K(n, k))$ przy dostatecznie dużej wartości n .

Twierdzenie 35 ([C11], Thm. 1.4) *Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Jeżeli n przyjmuje dostatecznie dużą wartość, to $\chi_=(K(n, k)) = n - k + 1$.*

Praca [C12] poświęcona jest sprawiedliwemu kolorowaniu koron wybranych klas grafów, $G \circ H$. Pokazaliśmy w niej, że problem 3-kolorowania grafu $G \circ H$ jest NP-zupełny nawet wtedy, gdy graf G jest grafem 4-regularnym, a graf H jest pojedynczą krawędzią, $H = K_2$. Ponadto podaliśmy dokładne wartości lub oszacowania na sprawiedliwą liczbę chromatyczną koron $G \circ H$, gdzie G jest grafem sprawiedliwie 3- lub 4-chromatycznym, natomiast H jest grafem r -dzielny, ścieżką, cyklem, czy grafem pełnym. Dowody mają charakter algorytmiczny. Złożoność sprawiedliwego kolorowania rozważanych koron zależy od złożoności problemu sprawiedliwego 3-, czy 4-kolorowania grafu G . Tutaj, analiza problemu wskazała kilka przykładowych klas grafów

G , dla których rozważany problem jest wielomianowy. Są to np. grafy kubiczne, czy złamane koła (ang. *broken spoke wheels*). Ponadto wyniki z pracy [C12] potwierdziły hipotezę ECC (Hipoteza 1 przytoczona w głównym osiągnięciu – rozdział 2 niniejszego autoreferatu). Kontynuacją pracy [C12] jest praca [B5], w której rozważamy sprawiedliwe kolorowanie multikoron, $G \circ^l H$, zdefiniowanych rekurencyjnie: $G \circ^1 H = G \circ H$ oraz $G \circ^l H = (G \circ^{l-1} H) \circ H$ dla $l \geq 2$. Zostały udowodnione twierdzenia prowadzące do dokładnych wartości sprawiedliwej liczby chromatycznej $\chi_{\text{spr}}(G \circ^l H)$ lub jej ograniczeń górnych. Rozważane multikorony dotyczyły przypadków, gdy graf G jest sprawiedliwie 3- lub 4-kolorowalny, natomiast H jest grafem r -dzielnym, ścieżką lub cyklem. Przedstawione w pracy [B5] wyniki rozszerzają listę klas grafów kolorowalnych sprawiedliwie optymalnie w czasie wielomianowym, jak i grafów potwierdzających prawdziwość hipotezy ECC.

Praca [C13] poświęcona jest kolorowaniu sprawiedliwemu oraz półsprawiedliwemu. Rozważamy złożoność obu problemów dla grafów kubicznych. Okazuje się, że, o ile problem sprawiedliwego kolorowania grafów kubicznych można rozwiązać w czasie wielomianowym, to już kolorowanie półsprawiedliwe jest problemem trudnym, co też w pracy zostało udowodnione. Wskazaliśmy również potencjalne zastosowanie kolorowania półsprawiedliwego w szeregowaniu zadań wsadowych na maszynach jednorodnych.

Jeśli chodzi zaś o poszukiwanie algorytmów przybliżonych kolorujących sprawiedliwie dowolny graf, to temu zagadnieniu poświęcone są prace [B4] oraz [C14]. W pierwszej z nich podaliśmy dwa algorytmy sprawiedliwego kolorowania grafów bazujące na heurystykach zwracających pokolorowanie właściwe, niekoniecznie sprawiedliwe – heurystyki LF oraz SLF. Nasze algorytmy dokonują transformacji pokolorowania właściwego do pokolorowania sprawiedliwego. Zostały przeprowadzone eksperymenty komputerowe, które wykazały wyższość jednego z nich, nazwanego algorytmem FJK. Złożoność tego algorytmu wynosi $O(n^3 \log n)$. Przeprowadzona analiza pozwoliła nam na sformułowanie hipotezy, że nasz algorytm FJK jest 2-przybliżony. Tematyka była kontynuowana w pracy [C14], która powstała przy udziale dyplomanta aplikantki. Dokonaliśmy w tej pracy niewielkiej transformacji algorytmu FJK skutkującej bardzo dużą poprawą zwracanych wyników. Co więcej, nowy algorytm K-FJK został zaadaptowany do modelu r -sprawiedliwego kolorowania grafów.

Definicja 4 Niech G będzie grafem prostym i niech $r \geq 0$. Mówimy, że G jest r -sprawiedliwie k -kolorowalny, jeżeli jego zbiór wierzchołków V można podzielić na k zbiorów niezależnych (klas kolorów) V_1, \dots, V_k takich, że $||V_i| - |V_j|| \leq r$ dla wszystkich $i \neq j$. Najmniejszą liczbę k , dla której istnieje r -

sprawiedliwe k -pokolorowanie nazywamy r -sprawiedliwą liczbą chromatyczną i oznaczamy przez $\chi_{r=}(G)$.

Algorytm K-FJK został przetestowany oraz porównany z algorytmem FJK na benchmarkach z bazy DIMACS [F1] (35 instancji grafów). Oba algorytmy korzystały z tych samych pokolorowań klasycznych - uzyskanych po zaaplikowaniu heurystyk LF oraz SLF. Przeprowadzone testy pozwoliły na wyciągnięcie wielu bardzo ciekawych wniosków.

Wśród prac wymienionych w tym wątku tematycznym znalazły się prace, np. [C12, C13], czy [B5], które są silnie związane z tematyką monotematycznego cyklu aplikantki, jednak włączenie ich do tegoż cyklu, w subiektywnej ocenie aplikantki, spowodowałoby nadmierne rozbudowanie jej tematyki i osiągnięcia.

Literatura

- [F1] D.S. Johnson, M.A. Trick. Cliques, coloring and satisfiability: Second DIMACS implementation challenge. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 26. American Mathematical Society, Providence, 1996.

3.1.4 r -dynamiczne kolorowanie grafów

r -dynamiczne pokolorowanie grafu G jest pokolorowaniem właściwym tego grafu $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ spełniającym warunek: $|c(N(v))| \geq \min\{r, \deg(v)\}$, dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$. Najmniejszą liczbę kolorów k pozwalającą na pokolorowanie grafu G w taki sposób nazywamy r -dynamiczną liczbą chromatyczną i oznaczamy przez $\chi_r(G)$. Oczywiście $\chi_1(G) = \chi(G)$. Jest sporo prac wyznaczających wartość $\chi_r(G)$ dla wybranych klas grafów i małych wartości r . Wiadomo również, że w ogólnym przypadku problem wyznaczenia $\chi_r(G)$ jest NP-trudny. Np. Li i in.[G1] udowodnili, że problem wyznaczenia $\chi_r(G)$ jest NP-trudny już dla dwudzielnych grafów planarnych o maksymalnym stopniu 3 z dowolnie dużą talią. Liu i Zhou [G2] pokazali, że problem odpowiedzi na pytanie, czy istnieje 3-dynamiczne pokolorowanie grafu bez pazura o maksymalnym stopniu 3 jest NP-zupełny.

W pracy [B6] wyznaczamy wartość r -dynamicznej liczby chromatycznej dla wybranej klasy grafów, mianowicie dla grafów krawędziowych hełmów. Rozpatrujemy wszystkie możliwe wartości parametru r pomiędzy minimalnym a maksymalnym stopniem grafu. Ponadto, dowody twierdzeń w pracy mają charakter konstrukcyjny, co skutkuje algorytmami o złożoności wie-

lomianowej dla odpowiadającego r -dynamicznego pokolorowania. Ponadto, jako pierwsi definiujemy model dla r -dynamicznego kolorowania krawędzi.

Literatura

- [G1] X. Li, X. Yao, W. Zhou, H. Broersma. Complexity of conditional colorability of graphs. *Appl. Math. Lett.*, 22:320–324, 2009.
- [G2] X. Li, W. Zhou. The 2nd-order conditional 3-coloring of claw-free graphs. *Theoret. Comput. Sci.*, 396:151–157, 2008.


3.1.5 Gwiazdowe kolorowanie grafów

Notację gwiazdowego kolorowania grafów wprowadził Branko Grünbaum w 1973. *Gwiazdowe pokolorowanie* grafu G ($[H1, H2, H3]$) jest pokolorowaniem właściwym jego wierzchołków, w którym każda ścieżka na czterech wierzchołkach używa co najmniej trzech różnych kolorów. Innymi słowy, podgraf indukowany przez wierzchołki z każdego dwóch klas kolorów składa się ze składowych spójności w postaci gwiazd.

W pracy [B7] rozważamy problem kolorowania gwiazdowego dla *splitting* grafów grafów pełnych, pełnych dwudzielnych, ścieżek i cykli. Jednocześnie wskazujemy odpowiadające algorytmy kolorujące.

Literatura

- [H1] B. Grünbaum. Acyclic colorings of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14:390–408, 1973.
- [H2] M.O. Albertson, G.G. Chappell, H.A. Kierstead, A. Kündgen, R. Ramamurthi. Coloring with no 2-colored P_4 's. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 11, 2004.
- [H3] G. Fertin, A. Raspaud, B. Reed. On star coloring of graphs. *J. Graph Theory*, 47(3):163–182, 2004.



Hanna Furmanczyk