

Autoreferat

JANUSZ JANUSZEWSKI

1. Podstawowe informacje

Tytuł magistra matematyki uzyskałem 19.05.1987 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu imienia Adama Mickiewicza w Poznaniu. Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki został mi nadany uchwałą Rady Wydziału Matematyki i Fizyki UAM z dnia 21.12.1990 roku. Pracę doktorską: „O pewnych zastosowaniach miar niezwartości w teorii równań całkowych” napisałem pod kierunkiem profesora Stanisława Szuffi.

Od 1987 roku pracuję na Uniwersytecie Technologiczno-Przyrodniczym w Bydgoszczy (poprzednia nazwa: Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy). Byłem zatrudniony na stanowisku asystenta stażysty (1.10.1987 - 31.08.1988), asystenta (1.09.1988 - 31.08.1990), starszego asystenta (1.09.1990 - 31.05.1991) oraz adiunkta (od 1.06.1991).

Jestem współautorem dwunastu oraz autorem czterdziestu prac naukowych.

2. Opis wyników: wstęp

Po ukończeniu studiów zająłem się fragmentem matematyki dotyczącym równań całkowych w przestrzeniach abstrakcyjnych. Pierwsze sześć moich publikacji ([Ja1989], [Ja1990a], [Ja1990b], [Ja1992], [JaS1992], [Ja1993]) stanowi podstawę pracy doktorskiej. Podaję w nich warunki dostateczne istnienia rozwiązań klasycznych nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach Banacha oraz w przestrzeniach lokalnie wypukłych. Badam także strukturę zbioru rozwiązań. W pracach tych stosuję metody wykorzystujące miarę niezwartości. Pojęcie to zdefiniował Kazimierz Kuratowski [Kur1930], a jako pierwszy do uogólnienia twierdzenia Schaudera [Sch1930] o punkcie stałym zastosował Gabriele Darbo [Dar1955].

Po obronie pracy doktorskiej zmieniłem tematykę badań. Zainteresował mnie dział geometrii dyskretnej związany z pakowaniem i pokrywaniem ciał wypukłych.

Przez *ciało wypukłe* w d -wymiarowej przestrzeni euklidesowej rozumiemy zbiór zwarty, wypukły o niepustym wnętrzu. Mówimy, że ciąg ciał wypukłych (C_n) można *upakować* [translacyjnie upakować] w ciało wypukłe C , jeśli każdy ze zbiorów C_n można tak przesunąć i obrócić [odpowiednio: przesunąć], by zbiory te były podzbiorami C i miały parami rozłączne wnętrza.

Ciąg ciał wypukłych (C_n) umożliwia *pokrycie* [*translacyjne pokrycie*] zbioru C , jeżeli każdy ze zbiorów C_n można tak przesunąć i obrócić [odpowiednio: przesunąć], by C zawierało się w sumie przemieszczonych zbiorów.

Po raz pierwszy zagadnienia związane z pakowaniem opisane zostały w książce „Sterna seu de niva sexangula” Johanna Keplera [Kep1611]. Przedstawione są w niej upakowania równych kół i kul, zdaniem Keplera najgęstsze. Uzasadnienie, że zaprezentowane ułożenia są rzeczywiście optymalne nie było proste. Sprawdzeniem, że maksymalna gęstość pakowania równych kół na płaszczyźnie wynosi $\pi/\sqrt{12}$, zajął się Axel Thue (niepełny dowód z pracy [Thu1892] został poprawiony w [Thu1910]). Carl Friedrich Gauss [Gau1831] udowodnił, że maksymalna gęstość pakowania równych kul w przestrzeni trójwymiarowej wynosi $\pi/\sqrt{18}$ dla pakowania kratowego. Wykazanie, że podobnie jest w ogólnym przypadku wymagało: pomysłu László Fejes Tóth’a (rok 1953) oraz cierpliwości (ponad pięć tysięcy przypadków i wiele długich wspomaganych komputerowo obliczeń) Thomasa C. Halesa (lata 1997-2005, zobacz rozdział 1.8 w [BMP2005]).

Systematyczne badania nad pakowaniami kratowymi zapoczątkował Hermann Minkowski [Min1893].

Gęste upakowania równych kół w trójkąt równoboczny uzyskał Farkas Bolyai [Bol1833]. Tysiące aktualnych rezultatów dotyczących pakowania równych kół można znaleźć online na stronie [Spr].

Większej rangi zagadnieniu pakowania nadał David Hilbert [Hil1900]. W roku 1900 przedstawił on na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Paryżu słynną listę 23 problemów, którymi powinni się zająć matematycy w dwudziestym wieku. Osiemnasty problem zawiera pytanie: jak można najgęściej upakować w przestrzeni nieskończoną liczbę jednakowych ciał, na przykład kul o danym promieniu. Hilbert podkreślił też znaczenie tego problemu w teorii liczb, fizyce i chemii. Obecnie gęste pakowania wykorzystuje się również w teorii kodowania i informatyce.

Impulsem do szerszych badań było przedstawienie w roku 1935 przez Hermana Auerbacha, Stefana Banacha, Stanisława Mazura i Stanisława Ulama w Księdze Szcockiej [ABM1981] następującego twierdzenia (zaprezentuję je zachowując oryginalną pisownię [ABM1935]): „Jeżeli $\{K_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ *in inf*, są bryłami wypukłymi o średnicy $\leq a$ przyczem suma objętości $\leq b$, wówczas istnieje sześcian o krawędzi $c = f(a, b)$, w którym bryły dane można umieścić rozłącznie. Wniosek: Kilogram kartofli da się umieścić we worku. Problem: Wyznaczyć funkcję $c = f(a, b)$ ”. Dowód tego twierdzenia wraz z kolejnymi oszacowaniami wartości funkcji $f(a, b)$ przedstawili: Antoni Kosiński [Kos1957], John W. Moon i Leo Moser [MoM1967] oraz Helmut Groemer [Gro1982].

Pierwsze publikacje dotyczące pokrywania ciał wypukłych ukazały się osiemdziesiąt lat temu. Alfred Tarski [Tar1932] wykazał, że jeśli koło pokryjemy pasami, to suma szerokości tych pasów nie jest mniejsza od średnicy pokrywającego koła (równość zachodzi tylko dla pasów równoległych). Tarski przedstawił także przypuszczenie, że suma szerokości pasów pokrywających ciało wypukłe K na płaszczyźnie nie jest mniejsza niż minimalna szerokość K . Tę hipotezę potwierdził Thøger Bang [Ban1951].

Także w roku 1932 Karol Borsuk zaprezentował następujący problem (zobacz [Bor1932] lub ostatnie zdanie w [Bor1933]): Czy każdy zbiór E w przestrzeni R^d można rozbić na $(d+1)$ zbiorów o średnicach mniejszych od średnicy E ? (równoważnie: czy E można pokryć $d+1$ zbiorami o mniejszych średnicach). Dla $d=2$ (wynik Borsuka) i dla $d=3$ (ten rezultat uzyskał Harold G. Eggleston [Egg1955], zobacz także [Per1947]) odpowiedź brzmi: tak. Jednak w wysokich wymiarach odpowiedź jest negatywna. Jeff Kahn i Gil Kalai wykazali [KaK1993], że $d+1$ zbiorów nie wystarczy w wymiarze $d=1325$ oraz dla każdego $d > 2014$. Aicke Hinrichs i Christian Richter [HiR2003] udowodnili, że $d+1$ zbiorów nie wystarczy dla $d \geq 298$. Otwartym pozostaje pytanie o najmniejszy wymiar d , dla którego odpowiedź na problem Borsuka jest negatywna.

Zagadnienie translacyjnego pakowania i pokrywania ciałami wypukłymi opisał po raz pierwszy Edmund Hlawka [Hla1949].

Jako „osiągnięcie” chciałbym przedstawić następujący jednotematyczny cykl moich publikacji:

- [Ja1998a] *Filling a cube with subsequences of boxes*, Demonstratio Mathematica, 31 (2), (1998), 377-386.
- [Ja2000] *Packing rectangles into the unit square*, Geometriae Dedicata, 8 (2000), 13-18.
- [Ja2002a] *Universal container for packing rectangles*, Colloquium Mathematicum, 92 (2), (2002), 155-160.
- [Ja2002c] *Covering the unit square by squares*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 43 (2), (2002), 411-422.
- [Ja2009a] *Optimal translative packing of homothetic triangles*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 46 (2), (2009), 185-203.
- [Ja2010a] *Covering the plane with translates of a triangle*, Discrete and Computational Geometry, 43 (1), (2010), 167-178.

W pracach tych podaję odpowiedzi na cztery pytania postawione przez innych matematyków oraz prezentuję kilka sformułowanych przeze mnie twierdzeń dotyczących pakowania i pokrywania. Wspólny tytuł prezentowanego cyklu publikacji to: „Pakowanie i pokrywanie trójkątami, prostokątami i prostopadłościanami”.

3. Opis osiągnięć: pakowanie i pokrywanie trójkątami, prostokątami i prostopadłościanami

Pakowanie prostokątów

John W. Moon i Leo Moser [MoM1967] wykazali, że każdy ciąg kwadratów o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{1}{2}|S|$ można upakować w kwadrat S . Symbol $|S|$ oznacza pole dwuwymiarowego ciała wypukłego S . Liczby $\frac{1}{2}$ nie da się tu zwiększyć. Łatwo bowiem wykazać, że każdy kwadrat o boku dłuższym od połowy boku S zawarty w S musi pokryć środek S . Oznacza to, że w S nie da się upakować dwóch równych kwadratów o łącznym polu większym od $\frac{1}{2}|S|$.

Pakowanie prostokątów okazało się trudniejsze. Przedstawię niektóre rezultaty dotyczące tego zagadnienia; na ogół autorzy podawali wyniki dotyczące przestrzeni d -wymiarowych, ja zaprezentuję tylko oszacowania dla $d = 2$.

Załóżmy, że na płaszczyźnie jest dany prostokątny układ współrzędnych. Przez $a \times b$ oznaczam prostokąt o bokach długości a oraz b i o boku długości a równoległym do pierwszej osi układu współrzędnych.

Antoni Kosiński [Kos1957] wykazał, że ciąg prostokątów o łącznym polu V i bokach nie dłuższych niż D można upakować w prostokąt $3D \times (V + D^2)/D$.

John W. Moon i Leo Moser [MoM1967] ulepszyli ten wynik: ciąg prostokątów o łącznym polu V i bokach nie dłuższych niż D można upakować w prostokąt $2D \times (V + D^2)/D$. Co więcej, takie prostokąty można upakować w prostokąt o polu $2V$ i o bokach nie krótszych niż $(\sqrt{2} - 1)/D$. W szczególności, jeśli $D = 1$, $V = \frac{1}{2}$, to prostokąty można upakować w prostokąt $2 \times \frac{3}{2}$, a jeśli $D \leq \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$, to prostokąty o łącznym polu $\frac{1}{2}$ mogą być upakowane w kwadrat o boku 1.

Amram Meir i Leo Moser [MeM1968] wykazali, że ciąg prostokątów o łącznym polu V i bokach nie dłuższych niż D można upakować w prostokąt $a \times b$ o ile $a \geq D$ i $ab \geq 2V + \frac{a^2}{8}$. W szczególności, jeśli $D = 1$, $V = \frac{1}{2}$, to prostokąty można upakować w prostokąt $1 \times \frac{9}{8}$.

Helmut Groemer [Gro1982] uzyskał bardzo dobre oszacowanie, ale dotyczące pakowania w kwadrat ciągu prostokątów o bokach nie dłuższych niż $\frac{1}{3}$ długości boku kwadratu.

Nadal nieroztrzygnięte pozostało pytanie, czy wynik Moona i Mosera można rozszerzyć na przypadek pakowania prostokątów (zobacz rozdział D5 w książce [CFG1991]).

W pracy [Ja2000] odpowiadam twierdząco na to pytanie: *każdy ciąg prostokątów o bokach nie dłuższych od 1 i o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{1}{2}$ można upakować w kwadrat o boku 1*. Ponadto prostokąty pakowane

są *równoległe*, to znaczy boki upakowanych prostokątów są równoległe do boków kwadratu, do którego je pakujemy.

Nie będę prezentował dowodów, gdyż z nimi opis wyników liczyłby zbyt wiele stron. Dodam jedynie, że dowód tego twierdzenia, podobnie jak części innych, polega na opracowaniu odpowiedniego przepisu określającego w jakim miejscu kładziemy poszczególne prostokąty, a następnie na wykazaniu, że stosując ten przepis można upakować prostokąty z właściwą gęstością.

W pracach [Ja2000] i [Ja2002a] prostokąty z ciągu, po uprzednim uporządkowaniu, są pakowane bok przy boku do stosownych pasów. Po upakowaniu definiuję pewne zbiory pokryte przez prostokąty i szacuję sumę ich pól.

Opisana metoda może być też zastosowana do pakowania prostokątów w większe kwadraty. Uzyskane przez mnie odpowiednie oszacowanie sumy pól (zobacz Remark 3) jest nieznacznie lepsze od wyniku Helmuta Groemera z pracy [Gro1982].

Jak wiadomo, każde d -wymiarowe ciało wypukłe zawiera się w pewnym prostopadłościanie o objętości $d!$ razy większej od objętości tego ciała (zobacz [Mac1951]). Mnożąc więc oszacowanie objętości pakowanych prostopadłościanów przez $1/d!$ otrzymamy oszacowanie objętości pakowanych ciał wypukłych. Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia z [Ja2000] jest zatem następujący rezultat (typu: „o worku kartofli”, zobacz [ABM1935]): *w kwadracie o boku 1 można upakować dowolny ciąg (dwuwymiarowych) ciał wypukłych o średnicach nie większych od 1 i o sumie pól nieprzekraczającej $\frac{1}{4}$.*

Rozważmy teraz ciąg prostokątów o bokach nie dłuższych od 1, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i o łącznym polu 1. Z twierdzenia z pracy [Ja2000] wnioskujemy, że prostokąty te można upakować w kwadrat $S = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ i to tak, by boki upakowanych prostokątów były równoległe do boków S . Nie oznacza to jednak, że prostokąty te można upakować translacyjnie w S . Na przykład prostokątów $1 \times \frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{2} \times 1$ upakować translacyjnie się nie da – konieczny jest obrót. Nasuwa się pytanie o kształt najmniejszego uniwersalnego kontenera, to znaczy prostokąta o najmniejszym polu, do którego da się translacyjnie upakować dowolny ciąg prostokątów o bokach nie dłuższych od 1, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i o łącznym polu 1. Odpowiedź na to pytanie jest następująca [Ja2002a]: *najmniejszy uniwersalny kontener dla translacyjnego pakowania równoległego ma boki o długości 1 i 2.*

W pracy [Ja2002a] przedstawiam także oszacowania pola najmniejszego uniwersalnego kontenera dla pakowania translacyjnego i „zwykłego”. Pole najmniejszego uniwersalnego kontenera dla pakowania translacyjnego nie jest mniejsze niż 2,367. Przypuszczalnie dla pakowania „zwykłego” najmniejszym uniwersalnym kontenerem jest $\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}/3$.

Pakowanie trójkątów

Thomas J. Richardson [Ric1995] uzyskał następujący rezultat: do każdego trójkąta T można upakować dowolny ciąg jego jednokładnych kopii o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{1}{2}|T|$. Prosty dowód tego twierdzenia znajduje się w [Ja2003a]. W pracy [Ja2009a] wykazuję, potwierdzając przypuszczenie Richardsona, że *dowolny ciąg dodatnich jednokładnych kopii trójkąta T o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{1}{2}|T|$ można translacyjnie upakować w T* . W przypadku translacyjnego pakowania oszacowania $\frac{1}{2}|T|$ nie da się ulepszyć, gdyż dwóch jednokładnych kopii trójkąta T o skali większej od $\frac{1}{2}$ nie da się translacyjnie upakować w T . W przypadku „zwykłego” pakowania oszacowanie $\frac{1}{2}|T|$ da się zwiększyć, o ile tylko trójkąt T nie jest równoboczny (zobacz [Ja2003c]).

W [Ja2009a] przedstawiam dwuetapową metodę pakowania. Kolejność pakowania jest stosunkowo prosta, choć dokładny przepis zajmuje dwie strony. Początkowa metoda pakowania trójkątów możliwie „nisko” i „na lewo” po pewnym czasie przechodzi w pakowanie parami trójkątów „odpowiednio wysoko”. Dość długi dowód wykazujący efektywność zaprezentowanej metody nie zawiera uciążliwych obliczeń. Polega na wykazaniu, że pole pokrytego obszaru nie jest mniejsze od pola obszaru niepokrytego.

Pokrywanie kwadratami

John W. Moon i Leo Moser w klasycznej pracy [MoM1967] udowodnili (między innymi), że kwadrat jednostkowy I można pokryć równolegle dowolnym ciągiem prostokątów o łącznym polu nie mniejszym niż 3. Kwadrat jednostkowy, to kwadrat o długości boku 1.

Oszacowanie 3 dla pokrywania równoległego (zarówno dla pokrywania prostokątami jak i kwadratami) jest najlepsze z możliwych – kwadratem o boku krótszym niż 1 da się pokryć tylko jeden wierzchołek I . Gdyby można kwadratami obracać, to kwadratem o boku nie krótszym niż $\sqrt{2}/2$ da się pokryć dwa wierzchołki I . Naturalnym jest pytanie jak bardzo da się ulepszyć oszacowanie sumy pól prostokątów, jeśli dopuścimy możliwość obrotów.

Hipoteza (zobacz Problem 108 w [MoP1994]), którą przedstawił Mátyás Bognár mówi, że *kwadrat jednostkowy można pokryć dowolnym ciągiem kwadratów o łącznym polu nie mniejszym niż 2*. Liczby 2 nie da się tutaj zastąpić liczbą mniejszą. Początkowo sądziłem, że 2 to za mało, ale z czasem zmieniłem zdanie. Potwierdzam hipotezę Bognár’a w pracy [Ja2002c]. Niestety, tym razem dowód zawiera uciążliwe rachunki.

Nie potrafię rozszerzyć tego wyniku na przypadek pokrywania prostokątami.

Pokrywanie trójkątami

Istvan Fáry [Fár1950] wykazał, że minimalna gęstość kratowego pokrycia płaszczyzny kopiami danego trójkąta wynosi $\frac{3}{2}$. Wydawało się, że podobnie będzie dla pokrywania translacyjnego. Jednak przez sześćdziesiąt lat nie udało się tego rezultatu uzyskać (zobacz Problem 2, 1.3 w książce [BMP2005] lub Open Problem (ii) w rozdziale 2.2 książki [Bör2004], a także część czwartą wstępu w książce [Rog1964]). Dopiero parę lat temu udowodniłem [Ja2010a], że *minimalna gęstość translacyjnego pokrycia płaszczyzny kopiami danego trójkąta wynosi $\frac{3}{2}$* .

Pomysł na dowód jest prosty i naturalny. Przy pokrywaniu kopiami trójkąta niektóre części pokrywających trójkątów muszą się nakładać. W każdym trójkącie T_i wyodrębniam wielokąt U_i nazwany „częścią użytą do pokrycia”. Części takie dowolnych dwóch trójkątów mają rozłączne wnętrza. Ponadto wszystkie te części pokrywają płaszczyznę (rozcinają płaszczyznę). Pozostało jedynie sprawdzić, czy części te nie są zbyt duże. W przypadku optymalnego pokrywania kratowego, U_i jest niewypukłym sześciokątem o polu $\frac{2}{3}|T_i|$. Niestety, przy pokrywaniu translacyjnym mogą się pojawić trójkąty, dla których pole U_i jest dowolnie bliskie polu T_i . Dlatego, mimo prostego pomysłu, zmuszony byłem rozbić dowód na przypadki; musiałem uwzględnić wszystkie możliwe pokrywania. Podzieliłem trójkąty na odpowiednie grupy składające się z jednego, dwóch, trzech lub czterech trójkątów. Następnie wykazałem, że dla każdej takiej grupy $\sum |U_i| \leq \frac{2}{3} \sum |T_i|$.

Wypełnianie

Na zakończenie opisu osiągnięć chciałbym omówić jeszcze wariant pakowania, które w przypadku skończonych podciągów jest jednocześnie pokrywaniem (a więc i rozcinaniem). W pracy [Ja1998a] wprowadzam pojęcie wypełniania. Zbór C można *wypełnić* podciągiem (C_{n_i}) ciągu (C_n) , jeżeli da się zbiory C_{n_i} poprzesuwać i poobracać (obraz zbioru C_{n_i} po przesunięciu i obrocie oznaczmy przez C'_{n_i}) w taki sposób, że:

- zbiory C'_{n_i} są podzbiorami C , dla $i = 1, 2, \dots$;
- zbiory C'_{n_i} mają parami rozłączne wnętrza;
- $C \setminus \bigcup_i C'_{n_i}$ ma miarę Lebesgue’a zero.

Prostopadłościan nazywamy *q-standardowym*, jeżeli jego krawędzie mają długość q^{-t} , gdzie $t \in \{0, 1, \dots\}$ (tutaj $q \geq 2$ jest liczbą naturalną). Dowodzę, że *d-wymiarową kostkę o krawędzi s (tutaj s jest liczbą naturalną) da się wypełnić podciągiem dowolnego ciągu q-standardowych d-wymiarowych*

prostopadłościanów o objętości co najmniej

$$s^d + q \prod_{i=2}^d \frac{q^i}{q^i - 1} - q.$$

To oszacowanie jest najlepsze z możliwych (nie da się zmniejszyć).

Wart zauważenia jest Remark 1: John W. Moon i Leo Moser w pracy [MoM1967] podają metodę pozwalającą pokryć d -wymiarową kostkę jednostkową dowolnym ciągiem d -wymiarowych prostopadłościanów o objętości $2,463... \cdot 2^d$. Dokonując drobnej, pojedynczej modyfikacji tej metody wykazują, że ich oszacowanie objętości można zmniejszyć do $2^d + 1,463...$

4. Opis innych wyników dotyczących pakowania i pokrywania

Pozostałe rezultaty związane z pakowaniem i pokrywaniem trójkątami i kwadratami

Éva Vászrhelyi udowodniła [Vás1984], że trójkąt T można translacyjnie pokryć dowolnym skończonym ciągiem jego ujemnych jednokładnych kopii o łącznym polu równym lub większym od $4|T|$. Według hipotezy, którą zaprezentował Károly Böröczky, wynik ten można rozszerzyć na przypadek pokrywania dodatnimi i ujemnymi kopiami. Udowadniam to przypuszczenie w pracy [Ja1998c]: *każdy trójkąt T można translacyjnie pokryć dowolnym ciągiem jego dodatnich lub ujemnych jednokładnych kopii o łącznym polu nie mniejszym niż $4|T|$* . Liczby 4 nie da się tu zmniejszyć. W przypadku pokrywania tylko dodatnimi kopiami liczbę 4 da się zastąpić przez 2. Dowód przedstawił Zoltán Füredi dopiero w 2003 roku [Für2003], ale rezultat ten był anonsowany już dwadzieścia lat wcześniej.

W [Ja2006] udowodniłem, że *dowolny ciąg dodatnich lub ujemnych jednokładnych kopii trójkąta T o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{2}{9}|T|$ można upakować translacyjnie w T* (liczby $\frac{2}{9}$ nie da się tu zastąpić liczbą większą).

Károly Böröczky sformułował również hipotezę (zobacz Problem 105 w [MoP1994]), że *kwadrat jednostkowy I można translacyjnie pokryć dowolnym ciągiem kwadratów o przekątnych równoległych do boków I i o łącznym polu nie mniejszym niż $2,5$* . Potwierdzam tę hipotezę w [Ja2002b].

Podobny rezultat, dotyczący pakowania, zaprezentowałem w [Ja2010b]. *Niech S będzie kwadratem, a S' kwadratem jednostkowym, którego przekątna jest równoległa do boku S . Wtedy dowolny ciąg jednokładnych kopii S o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{4}{9}$ można translacyjnie upakować do S'* . Liczby $\frac{4}{9}$ nie da się tu zwiększyć.

Niech T_e będzie trójkątem równobocznym o boku długości 1. W [Ja2009d] wykazałem, że T_e można pokryć równoległe dowolnym ciągiem kwadratów

o łącznym polu $1,5$; ponadto, każdy ciąg kwadratów o łącznym polu nie większym niż $\frac{3}{4}(2-\sqrt{3})$ można upakować równolegle w T_e . Oba oszacowania są optymalne.

W zagadnieniu pokrywania kwadratu jednostkowego I kwadratami do kompletu wyników brakowało jeszcze jednego. Moon i Moser [MoM1967] udowodnili, że I można pokryć równolegle dowolnym ciągiem kwadratów o łącznym polu nie mniejszym niż 3 . Gdy słowa „pokryć równolegle” zastąpimy słowami „pokryć” to liczbę 3 można zastąpić liczbą 2 (zobacz [Ja2002c]). A jaką liczbą należy zastąpić trójkę w przypadku pokrywania translacyjnego? Leo Moser (zobacz Problem LM 5 w [MoP1994]) uważał, że pozostanie 3 nawet dla translacyjnego pokrywania prostokątami o bokach nie dłuższych od 1 . Helmut Groemer uzyskał jedynie następujące oszacowanie: kwadrat jednostkowy można pokryć translacyjnie dowolnym ciągiem prostokątów o średnicach nie większych niż 1 i o łącznym polu co najmniej $\frac{3}{2}(13 + 7\sqrt{3})$ (zobacz Proposition 1 w [Gro1982]). W pracy [Ja2007a] potwierdziłem hipotezę Leo Mosera w szczególnym przypadku pokrywania kwadratami: *kwadrat jednostkowy można translacyjnie pokryć dowolnym ciągiem kwadratów o bokach nie dłuższych od 1 i o łącznym polu nie mniejszym niż 3* . Oczywiście liczby 3 nie da się tu zastąpić żadną mniejszą. Można natomiast rozszerzyć ten rezultat na przypadek pokrywania kwadratami o bokach dowolnej długości (zobacz [Ja2008b]).

Alexander Soifer [Soi2006] przedstawił problem dotyczący pokrywania kwadratami jednostkowymi kwadratu o boku długości $n + \epsilon$. W [Ja2009b] podałem następujące oszacowanie: *kwadratu o boku dłuższym niż 2 nie da się pokryć pięcioma kwadratami jednostkowymi oraz kwadratu o boku dłuższym niż 3 nie da się pokryć dziesięcioma kwadratami jednostkowymi*. Z drugiej strony wiadomo, że kwadrat o boku trochę dłuższym niż 2 można pokryć siedmioma kwadratami jednostkowymi. Wydaje się, że nie da się pokryć sześcioma. Pomysł na dowód, zaprezentowany w [Ja2009b], jest prosty. W pokrywanym kwadracie koloruję pewne odcinki. Następnie wykazuję, że każdy z pokrywających kwadratów jednostkowych nie może pokryć zbyt dużej liczby pokolorowanych odcinków.

W przypadku wielowymiarowym uzyskałem [Ja2008c] następujące oszacowanie. *Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną i niech $\epsilon > 0$. Oznaczmy przez $\Pi_d(n, \epsilon)$ najmniejszą liczbę d -wymiarowych kostek jednostkowych, którymi można pokryć d -wymiarową kostkę o krawędziach długości $n + \epsilon$. Ponadto, niech $\Pi_d(n) = \inf_{\epsilon > 0} \Pi_d(n, \epsilon)$. Wtedy $\Pi_d(n) \leq n^d + O(n^{d-\frac{6}{5}})$.*

Pakowanie ciał wypukłych – problemy nierozstrzygnięte

Dla dowolnego ciała wypukłego C na płaszczyźnie oznaczmy przez $a(C)$ największą liczbę taką, że każdy skończony ciąg jednokładnych kopii ciała C

o łącznym polu nieprzekraczającym $a(C)|C|$ można upakować w C (zobacz [ErS1995]). Pavel Novotný [Nov2001] zauważył, że istnieje ciało wypukłe (prostokąt) R , dla którego $a(R) > \frac{1}{2}$. Ten rezultat można rozszerzyć (zobacz [JaK2003] oraz [Ja2003c]):

- *jeśli T jest trapezem, to $a(T) \geq \frac{1}{2}$; ponadto $a(T) = \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy T jest kwadratem;*
- *jeśli T jest trójkątem, to $a(T) \geq \frac{1}{2}$; ponadto $a(T) = \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy T jest trójkątem równobocznym.*

Hipoteza Soifera-Novotnego [Soi1998], [Nov2001] mówi, że $a(C) \geq \frac{1}{2}$ dla dowolnego ciała wypukłego C na płaszczyźnie. Otwartym pozostaje też pytanie, dla jakich ciał wypukłych $a(C) = \frac{1}{2}$.

W przypadku translacyjnego pakowania w ciało wypukłe jego jednokładnych kopii nie uzyskano, jak dotąd, ostatecznych odpowiedzi.

Udowodniłem [Ja2007b], że w każde ciało wypukłe C na płaszczyźnie można translacyjnie upakować dowolny ciąg jego dodatnich jednokładnych kopii o łącznym polu nieprzekraczającym $\frac{1}{4}|C|$. Poprzednie oszacowanie, które podali, niezależnie od siebie, Pavel Novotný [Nov2001] oraz Károly Böröczky, Jr. [Bör2004], wynosiło $\frac{1}{8}|C|$. Według Hipotezy Soifera-Novotnego [Soi1998], [Nov2001] wartość tę da się zastąpić przez $\frac{1}{2}|C|$, podobnie jak dla kwadratów z pracy [MoM1967].

Ponadto wykazałem [Ja2008a], że w każde ciało wypukłe C na płaszczyźnie można translacyjnie upakować dowolny ciąg jego (dodatnich lub ujemnych) jednokładnych kopii o łącznym polu nieprzekraczającym $0,175|C|$. Wynik ten nie jest ostateczny. Prawdopodobnie liczbę $0,175$ da się zastąpić tutaj przez $\frac{2}{9}$, podobnie jak dla pakowania trójkątów z pracy [Ja2006].

Pokrywanie ciałami wypukłymi – problemy nierozstrzygnięte

W przypadku pokrywania dowolnego ciała wypukłego jego jednokładnymi kopiami też brakuje ostatecznych rozstrzygnięć. Najlepszy aktualnie wynik na płaszczyźnie to ten z pracy [Ja2003b], w której wykazuję, że *każde ciało wypukłe C na płaszczyźnie można translacyjnie pokryć dowolnym ciągiem jego dodatnich jednokładnych kopii o polu co najmniej $6,5|C|$* . Rezultat ten poprawił znane oszacowania: $12|C|$, które podali András Bezdek i Károly Bezdek [BeB1984] oraz $\frac{9}{4}(9 - \sqrt{17})|C| \approx 10,973|C|$, uzyskane przez grupę Słowaków z Żiliny [BBB1993]. Prawdopodobnie $6,5|C|$ da się tu zastąpić przez $3|C|$ – hipotezę z oszacowaniem $3|C|$ sformułował László Fejes Tóth (zobacz Problem 105 w [MoP1994]).

W wyższych wymiarach również niewiele wiadomo. W pracy [Ja1998b] podałem następujące twierdzenie: *każde d -wymiarowe ciało wypukłe o objętości 1 można pokryć dowolnym ciągiem jego dodatnich jednokładnych kopii*

o objętości co najmniej $(d+1)^d - 1$. Było kwestią czasu, kiedy zostanie ono ulepszone. Jak dotąd najlepszy wynik uzyskał Márton Naszodi [Nas2010] wykazując, że $(d+1)^d - 1$ można zastąpić przez 6^d . Także ten rezultat nie jest ostateczny. Przypuszczam, że można go ulepszyć do $2^d - 1$. Niestety, nie będzie to proste. Najpierw należałoby rozstrzygnąć słynną hipotezę Leviego-Hadwigera (zobacz [Lev1955] oraz [Had1957]). Według tej hipotezy, każde d -wymiarowe ciało wypukłe można pokryć translacyjnie przez 2^d jego mniejsze jednokładne kopie.

Szereg oszacowań dotyczących pokrywania ciała wypukłego jego ujemnymi i dodatnimi jednokładnymi kopiami (również związanych z hipotezą Leviego-Hadwigera) znajduje się w pracy [JaL2001]. Wykazaliśmy, między innymi, że *każde d -wymiarowe ciało wypukłe może być pokryte translacyjnie przez:*

- 2^q jednokładne kopie o skali $-d + \frac{1}{2}q$, dla $q \in \{0, 1, \dots, d\}$;
- t^d jednokładne kopie o skali $-\frac{d}{t}$, dla $t \in \{1, 2, \dots\}$;
- $d^d + 1$ jednokładne kopie o skali $-1 + d^{-d}(d+1)^{-1}$;
- $d^d + 1$ jednokładne kopie o skali $1 - d^{-d}(d+1)^{-1}$.

Udowodniliśmy również, że *każde ciało wypukłe na płaszczyźnie można pokryć translacyjnie jego dwiema kopiami o skali jednokładności $-\frac{4}{3}$* (to oszacowanie jest optymalne, o czym świadczy przypadek trójkąta).

W pracy [Ja2001] dowodzę, że *każde ciało wypukłe na płaszczyźnie da się translacyjnie pokryć dowolnym ciągiem swoich jednokładnych, dodatnich lub ujemnych, kopii o łącznym polu $8|C|$* . Poprzednie oszacowanie wynoszące $12|C|$ uzyskali András Bezdek i Károly Bezdek w pracy [BeB1984]. Liczbę 8 zapewne da się tu zastąpić przez liczbę mniejszą, prawdopodobnie nawet przez 4, podobnie jak w przypadku pokrywania trójkątami z pracy [Ja1998c].

5. Opis pozostałych wyników: pakowanie online

Rezultaty zaprezentowane w tym rozdziale przez bazę danych Web of Science są przypisane do kategorii: „computer science” oraz „mathematics”.

Wraz z pojawieniem się komputerów nastąpiła konieczność sprawnego i efektywnego zapisywania (pakowania) różnych danych, zarówno takich, o których wiemy ile ich jest i jakie są „duże”, jak i danych przychodzących online, o wielkości których dowiadujemy się dopiero w trakcie ich otrzymywania. Termin „pakowanie online” został wprowadzony przez informatyków na początku lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku (zobacz [FiW1998]). W wersji online pakowania (lub pokrywania) na wstępie nie znamy ani kształtu, ani wielkości pakowanych (lub pokrywających) ciał $C_1, C_2, \dots$. Na początku wiemy tylko jak wygląda C_1 . Dla każdego $i > 1$ dopiero

po definitywnym położeniu ciała C_{i-1} (tego ciała nie można już przesuwac) dowiadujemy się o kształcie ciała C_i .

Pierwsze wyniki dotyczące pakowania „na bieżąco” ciał wypukłych uzyskali Marek Lassak i Jixian Zhang [LaZ1991].

W pracy [JaL1997] wykazaliśmy, że dla $d \geq 5$ można w d -wymiarową kostkę jednostkową upakować na bieżąco dowolny ciąg kostek o objętości nieprzekraczającej 2^{1-d} . To oszacowanie objętości jest najlepsze z możliwych, równie dobre jak to dla „zwykłego” pakowania (uzyskane przez Meira i Mosera [MeM1968]). Okazuje się, że przypadek dwuwymiarowy (dla pakowania kwadratów) oraz trójwymiarowy (dla pakowania sześciątów) jest trudniejszy. Uzyskane odpowiednie ograniczenia dla $d = 2$ (wynoszące $\frac{5}{16}$) oraz dla $d \in \{3, 4\}$ (wynoszące $\frac{3}{2} \cdot 2^{-d}$) nie są ostateczne. Aktualnie najlepszym oszacowaniem dla $d = 2$ jest $\frac{1}{3}$ z pracy [HIZ2008], ale i ono da się zwiększyć.

Dla $d = 2$ lepsze wyniki można uzyskać pakując w większą liczbę kwadratów. Wiadomo [Ja2010c], że jeśli $n \geq 3$, to każdy ciąg kwadratów o bokach nie dłuższych niż 1 o łącznym polu nie większym niż $\frac{1}{4}(n+1)$ może być upakowany na bieżąco do n rozłącznych kwadratów jednostkowych. Rezultat ten jest optymalny: liczby $\frac{1}{4}(n+1)$ nie da się tutaj zastąpić większą. Dla $n = 1$ oraz $n = 2$ brak jak dotąd ostatecznego wyniku.

W pracy [Ja2012b] badam efektywność dwóch algorytmów pakowania online. Standardową miarą jakości algorytmu jest *the asymptotic competitive ratio* (ACR). Niech S będzie ciągiem prostopadłościanów, niech $A(S)$ oznacza liczbę binów wykorzystanych przez algorytm A , natomiast $OPT(S)$ niech oznacza najmniejszą liczbę binów, do których można upakować prostopadłościany z S . Algorytm A nazwę x -ACR, jeśli $x \geq R_A^\infty$, gdzie

$$R_A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_S \left\{ \frac{A(S)}{OPT(S)} \mid OPT(S) = n \right\}.$$

W wersji pakowania t -przestrzennego mamy t aktywnych binów. Każdy prostopadłościan może być upakowany tylko do jednego z aktywnych binów. Jeśli to jest niemożliwe, to zamykamy jeden z aktywnych binów i otwieramy nowy aktywny bin, aby upakować ten prostopadłościan.

W dwuwymiarowej dwuprzestrzennej wersji pakowania online, pakujemy równoległe prostokąty o bokach nie dłuższych niż 1 w biny 1×1 .

Janos Csirik i David S. Johnson [CsJ2001] opisali 1,7-ACR algorytm dla jednowymiarowego pakowania dwuprzestrzennego. Satoshi Fujita [Fuj2003] przedstawił jednoprzestrzenny x -ACR algorytm dla pakowania prostokątów o bokach nie dłuższych niż m do binów $m \times m$, gdzie $x = O((\log \log m)^2)$. Leah Epstein i Rob van Stee [EpS2005] zaprezentowali pewien x -ACR, t -przestrzenny d -wymiarowy algorytm pakowania. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje t (ta liczba jest duża dla małych ϵ) takie, że $x = (1 + \epsilon)(\Pi_\infty)^d$, gdzie $\Pi_\infty \approx 1,691$. W publikacji [CCH2010] jest podany 5,155-ACR jednoprzestrzenny

dwuwymiarowy algorytm pakowania. W przypadku jednoprzestrzennego pakowania kwadratów zaprezentowany jest 4,5-ACR algorytm.

W pracy [Ja2012b] przedstawiam:

- 4-ACR dwuprzestrzenny dwuwymiarowy algorytm pakowania;
- 3,8-ACR algorytm dla dwuprzestrzennego pakowania kwadratów.

6. Opis pozostałych wyników: pokrywanie online

Pierwszą publikacją z tej dziedziny jest praca Włodzimierza Kuperberga [Kup1994a] zawierająca następujące twierdzenie: d -wymiarową kostkę jednostkową I_d można pokryć online każdym ciągiem d -wymiarowych kostek o łącznej objętości przekraczającej 4^d .

W pracy [Ja2009c] rozważam przypadek z $d = 2$. Przedstawiam stosunkowo prosty, ale efektywny algorytm pokrywania na bieżąco kwadratu jednostkowego I_2 ciągiem kwadratów. Wykazuję, że *jeśli łączne pole kwadratów w ciągu nie jest mniejsze od 4, to kwadratami tymi da się pokryć na bieżąco I_2* . Niektórzy sądzą, że liczbę 4 da się tu zastąpić liczbą 3, podobnie jak dla „zwykłego” pokrywania, ale nie jestem o tym przekonany. Potrafię jedynie ulepszyć 4 do 3,75 (zobacz [Ja2011]).

W wyższych wymiarach oszacowania z [Kup1994a] też zostały ulepszone – po raz pierwszy w pracy [JaL1994].

W publikacji [JLR1996b], wraz z Markiem Lassakiem, Günterem Rote oraz Gerhardem Woegingerem, przedstawiam algorytm (metodę n -tego odcinka) q -adycznego pokrywania na bieżąco odcinka $[0, 1]$ odcinkami o długościach q^{-i} , gdzie $q \geq 2$ oraz $i \geq 1$ są liczbami całkowitymi; q -adyczność metody oznacza, że każdy odcinek jest kładziony w takim miejscu, że oba jego końce są wielokrotnościami długości tego odcinka. W pracy badamy efektywność podanego algorytmu dla różnych wartości n . Dowodzimy, że:

- metoda $(q + 1)$ -szego odcinka gwarantuje pokrycie, o ile długość odcinków nie jest mniejsza od $1 + \frac{3}{q} - \frac{2}{q^2}$;
- metoda $(q + 2)$ -ego odcinka gwarantuje pokrycie, o ile długość odcinków nie jest mniejsza od $1 + \frac{3}{q} - \frac{3q^2 - 4q - 1}{q^4 - q^2}$ (dla $q \geq 3$);
- metoda $(q + 3)$ -ego odcinka gwarantuje pokrycie, o ile długość odcinków nie jest mniejsza od $1 + \frac{3}{q} - \frac{4q - 8}{q(q-1)(q+2)}$ (dla $q \geq 4$).

Znając efektywność algorytmu dla $n = q + 1$ i stosując odpowiednią bijekcję wykazujemy, że *jednostkową d -wymiarową kostkę da się pokryć na bieżąco dowolnym ciągiem kostek o objętości $2^d + 3$* . Oszacowanie to zostało później ulepszone przez Marka Lassaka [Las2002] do $2^d + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \cdot 2^{-d}$. Przypomnę, że dla pokrywania „zwykłego” (równoległego), a więc i dla pokrywania online, nieprzekraczalną granicą jest $2^d - 1$ (zobacz [Gro1982] lub [BeB1984]).

Problem 2-adycznego pokrywania odcinka jako pierwszy przedstawił Włodzimierz Kuperberg [Kup1994b]. W pracy [JLR1996a] odnosimy się do tego zagadnienia. W publikacji tej opisana jest w języku gry metoda 2-adyczna pokrywania na bieżąco odcinka jednostkowego odcinkami o długości 2^{-i} . Gra dwóch zawodników: rozgrywający i gracz. Rozgrywający tnie kawałki o długości 2^{-i} (dla $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$) z liny o długości $s > 1$ i przekazuje je graczowi, który kładzie je na jeden z odcinków pomiędzy $k2^{-i}$ oraz $(k+1)2^{-i}$, gdzie $k \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\}$. Gracz wygrywa, jeżeli pokryje cały odcinek jednostkowy. Prezentujemy strategię zapewniającą graczowi pokrycie całego odcinka $[0, 1]$, o ile $s \geq 2$. Ponadto wykazujemy, że gdy $s < \frac{4}{3}$, to nie istnieje strategia pozwalająca wygrać graczowi (o ile rozgrywający dobrze gra).

W przypadku pokrywania prostopadłościanami oraz dowolnymi ciałami wypukłymi dużych kostek najlepsze aktualnie oszacowania (dla $d \geq 3$) znajdują się w [JaL1995]. W pracy tej podajemy asymptotycznie (przy $s \rightarrow \infty$) najlepszą wartość v_s^d taką, że każdy ciąg d -wymiarowych prostopadłościanów o krawędziach nie dłuższych niż 1 i o łącznej objętości co najmniej v_s^d umożliwia pokrycie online d -wymiarowej kostki o boku s . Mówiąc dokładniej, podajemy wartość v_s^d taką, że $\lim_{s \rightarrow \infty} v_s^d / s^d = 1$ oraz „rezerwa”

$$r_s^d = v_s^d - s^d \approx c \cdot s^{d-\frac{1}{2}} \log^{\frac{d-1}{2d}} s,$$

gdzie c to pewna stała. Ponieważ każde d -wymiarowe ciało wypukłe zawiera prostopadłościan o objętości równej $2d^{-d}$ objętości tego ciała (zobacz [Las1993]), więc mnożąc v_s^d przez $\frac{1}{2}d^d$ uzyskujemy odpowiedni wynik dotyczący pokrywania kostki ciałami wypukłymi.

Także dla pokrywania pewnymi prostopadłościanami można rozważać q -adyczność. W pracy [JaL2003a] dowodzimy, że *kwadrat jednostkowy można pokryć dwuadycznie na bieżąco dowolnym ciągiem 2-standardowych prostokątów o łącznym polu co najmniej 8,25*.

Przypadek d -wymiarowy jest omówiony w pracy [JaL2003b]. Wykazujemy, że *każdy ciąg q -standardowych prostopadłościanów o objętości nie mniejszej niż*

$$\left(2 + \frac{3}{q} - \frac{2}{q^2}\right) \prod_{j=2}^d \left(2 + \frac{2}{q^j - 1} + \frac{2}{q^j}\right)$$

umożliwia pokrycie q -adycznie online kostki I_d . Ponadto, kostka I_d może być pokryta online każdym ciągiem ciał wypukłych o średnicach co najwyżej 1 i o objętości nie mniejszej niż $\frac{1}{2} \cdot (4d)^d \prod_{j=2}^d \left(2 + \frac{2}{2^j - 1} + \frac{2}{2^j}\right)$.

Dla $d = 2$ natomiast wiadomo [Ja1996], że *kwadrat jednostkowy da się pokryć na bieżąco dowolnym ciągiem ciał wypukłych o średnicy co najwyżej 1 i łącznym polu co najmniej 15*.

Adrian Dumitrescu i Minghui Jang wykazali [DuJ2010], że *koło o polu 1 może być pokryte na bieżąco dowolym ciągiem kół o łącznym polu większym od 9,763*. Ulepszyłem ten wynik w [Ja2011] zastępując 9,763 przez 6,488.

Na koniec opisu wyników dodam, że aktualnie pracuję nad badaniem efektywności pewnych algorytmów online (jak w [Ja2012b]). Zastanawia mnie także, czy suma kwadratów odległości między wierzchołkami n -kąta wypukłego jest zawsze większa niż $\frac{n}{8} - \frac{1}{8n}$ (zobacz [Ja2012a]).

LITERATURA

- [ABM1935] A. Auerbach, S. Banach, S. Mazur, S. Ulam, *Problemat 10.1*, Księga Szkocka, <http://banach.univ.gda.pl/pdf/ks-szkocka/ks-szkocka1pol.pdf>.
- [ABM1981] A. Auerbach, S. Banach, S. Mazur, S. Ulam, *Problem 10.1*, w: The Scottish Book, ed. by R. D. Mauldin, Birkhäuser, Boston, 1981, p. 74.
- [BBB1993] V. Bálint, B. Bálintová, M. Branická, P. Grešák, I. Hrinko, P. Novotný, M. Stacho, *Translative covering by homothetic copies*, Geometiae Dedicata, 46 (1993), 173-180.
- [Ban1951] T. Bang, *A solution of the „plank problem”*, Proceedings of the American Mathematical Society, 2 (1951), 990-993.
- [BeB1984] A. Bezdek, K. Bezdek, *Eine hinreichende Bedingung für die Überdeckung des Einheitswürfels durch homothetische Exemplare im n -dimensionalen euklidischen Raum*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 17 (1984), 5-21.
- [Bol1833] F. Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam in elementa metheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducenti, cum appendic triplici*, Vol. 2, Marcos Vásárhelyini: typis Collegii Reformatorum et Simon Kali, 1832-3.
- [Bör2004] K. Böröczky, Jr., *Finite packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics, 154, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Bor1932] K. Borsuk, *Über die Zerlegung einer Euklidischen n -dimensionalen Vollkugel in n Mengen*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses: Zürich, 2 (1932), 192.
- [Bor1933] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae, 20 (1933), 177-190.
- [BMP2005] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.
- [CCH2010] J. Chen, F. Y. L. Chin., X. Han, H.-F. Ting, Y. H. Tsin, Y. Zhang, *Improved online algorithms for 1-space bounded 2-dimensional bin packing*, w: ISAAC 2010, Part II, eds. O. Cheong, K.-Y. Chwa, K. Park, LNCS.
- [CFG1991] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved problems in geometry*. Problem Books in Mathematics. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, II. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [CsJ2001] J. Csirik, D. S. Johnson, *Bounded space on-line bin packing: best is better than first*, Algorithmica, 31 (2), (2001), 115-138.
- [Dar1955] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 24 (1955), 84-92.

- [DuJ2010] A. Dumitrescu, M. Jiang, *Covering a disk by disks*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 51 (1), (2010), 91-109.
- [Egg1955] H. G. Eggleston, *Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter*, Journal of the London Mathematical Society, 30 (1955), 11-24.
- [EpS2005] L. Epstein, R. van Stee, *Online square and cube packing*, Acta Informatica, 41 (9), (2005), 595-606.
- [ErS1995] P. Erdős, A. Soifer, *Squares in a square*, Geombinatorics, 4 (1995), 110-114.
- [Fár1950] I. Fáry, *Sur la densité des réseaux de domaines convexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 178 (1950), 152-161.
- [FiW1998] A. Fiat, G. J. Woeginger, *Online algorithms*, Lecture Notes in Computer Science, 1442, Springer 1998.
- [Fuj2003] S. Fujita, *On-line grid-packing with a single active grid*, Information Processing Letters, 85 (4), (2003), 199-204.
- [Für2003] Z. Füredi, *Covering a triangle with homothetic copies*, w: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 253 pp. 435-445, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
- [Gau1831] C. F. Gauss, *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber*, Göttingische gelehrte Anzeigen, 9, Juli 1831, zobacz: Werke, Band 2, 2. Aufl. Göttingen 1876, 188-196.
- [Gro1982] H. Groemer, *Covering and packing properties of bounded sequences of convex sets*, Mathematika, 29 (1982), 18-31.
- [Had1957] H. Hadwiger, *Ungelöste Probleme*, Nr. 20, Elemente der Mathematik, 12 (1957), 121.
- [HIZ2008] X. Han, K. Iwama, G. Zhang, *Online removable square packing*, Theory of Computing Systems, 43 (1), (2008), 38-55.
- [Hil1900] D. Hilbert, *Mathematische Probleme. (Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians, Paris 1900.)* Göttinger Nachrichten, (1900), 253-297.
- [HiR2003] A. Hinrichs, C. Richter, *New sets with large Borsuk numbers*, Discrete Mathematics, 270 (2003), 137-147.
- [Hla1949] E. Hlawka, *Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper*, Monatshefte für Mathematik, 53 (1949), 81-131.
- [Ja1989] J. Januszewski, *On the Darboux problem in Banach spaces*, Commentationes Mathematicae, 29 (1989), 57-62.
- [Ja1990a] J. Januszewski, *On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equation in Banach spaces*, Commentationes Mathematicae, 30 (1990), 85-92.
- [Ja1990b] J. Januszewski, *On the Hammerstein integral equations in Banach spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 31 (4), (1990), 685-691.
- [Ja1992] J. Januszewski, *L^p_r -solution of the Hammerstein integral equation in Banach spaces*, Commentationes Mathematicae, 32 (1992), 61-67.
- [Ja1993] J. Januszewski, *On Volterra integral equations with weakly singular kernels in Banach spaces*, Demonstratio Mathematica, 26 (1), (1993), 131-136.
- [Ja1996] J. Januszewski, *On-line covering of the unit square by a sequence of convex bodies*, Demonstratio Mathematica, 29 (1996), 155-158.

- [Ja1998a] J. Januszeński, *Filling a cube with subsequences of boxes*, Demonstratio Mathematica, 31 (2), (1998), 377-386.
- [Ja1998b] J. Januszeński, *Translative covering a convex body with its positive homothetic copies*, Proceedings of the International Scientific Conference on Mathematics, Žilina 1998, 29-34.
- [Ja1998c] J. Januszeński, *Covering a triangle with sequences of its homothetic copies*, Periodica Mathematica Hungarica, 36 (2-3), (1998), 183-189.
- [Ja2000] J. Januszeński, *Packing rectangles into the unit square*, Geometriae Dedicata, 8 (2000), 13-18.
- [Ja2001] J. Januszeński, *Translative covering by sequences of homothetic copies*, Acta Mathematica Hungarica, 91 (4), (2001), 337-342.
- [Ja2002a] J. Januszeński, *Universal container for packing rectangles*, Colloquium Mathematicum, 92 (2), (2002), 155-160.
- [Ja2002b] J. Januszeński, *Covering by sequences of squares*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 39 (2002), 179-188.
- [Ja2002c] J. Januszeński, *Covering the unit square by squares*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 43 (2), (2002), 411-422.
- [Ja2003a] J. Januszeński, *Packing similar triangles into a triangle*, Periodica Mathematica Hungarica, 46 (1), (2003), 61-65.
- [Ja2003b] J. Januszeński, *Translative covering a convex body by its homothetic copies*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 40 (2003), 341-348.
- [Ja2003c] J. Januszeński, *Packing clones in triangles*, Geombinatorics, 13 (2), (2003), 73-78.
- [Ja2006] J. Januszeński, *A note on translative packing a triangle by sequences of its homothetic copies*, Periodica Mathematica Hungarica, 52 (2), (2006), 27-30.
- [Ja2007a] J. Januszeński, *Translative covering of a square by a sequence of arbitrary-oriented squares*, Demonstratio Mathematica, 40 (3), (2007), 681-700.
- [Ja2007b] J. Januszeński, *Translative packing of a convex body by sequences of its positive homothetic copies*, Acta Mathematica Hungarica, 117 (4), (2007), 349-360.
- [Ja2008a] J. Januszeński, *Translative packing of a convex body by sequences of its negative homothetic copies*, Archivum Mathematicum (Brno), 44 (2008), 89-92.
- [Ja2008b] J. Januszeński, *Translative covering of a square by a sequence of arbitrary-oriented squares: Part II*, Demonstratio Mathematica, 41 (2), (2008), 441-454.
- [Ja2008c] J. Januszeński, *Covering a cube of side $n+\epsilon$ with unit cubes*, Geombinatorics, 17 (3), (2008), 113-116.
- [Ja2009a] J. Januszeński, *Optimal translative packing of homothetic triangles*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 46 (2), (2009), 185-203.
- [Ja2009b] J. Januszeński, *A note on covering of a square of side length $2+\epsilon$ with unit squares*, American Mathematical Monthly, 116 (2), (2009), 174-178.
- [Ja2009c] J. Januszeński, *On-line covering the unit square with squares*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 57 (1), (2009), 57-62.
- [Ja2009d] J. Januszeński, *Parallel packing and covering of an equilateral triangle with sequences of squares*, Acta Mathematica Hungarica, 125 (3), (2009), 249-260.
- [Ja2010a] J. Januszeński, *Covering the plane with translates of a triangle*, Discrete and Computational Geometry, 43 (1), (2010), 167-178.

- [Ja2010b] J. Januszewski, *Translative packing of a square with sequences of squares*, Colloquium Mathematicum, 121 (2), (2010), 273-280.
- [Ja2010c] J. Januszewski, *On-line packing squares into n unit squares*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 58 (2), (2010), 137-145.
- [Ja2011] J. Januszewski, *On-line packing and covering a disk with disks*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 52 (2), (2011), 305-314.
- [Ja2012a] J. Januszewski, *A convex polygon with small sum of squared distances between its vertices*, Geombinatorics, 23 (3), (2012), 97-100.
- [Ja2012b] J. Januszewski, *On-line algorithms for 2-space bounded 2-dimensional bin packing*, Information Processing Letters, 112 (2012), 719-722.
- [JaK2003] J. Januszewski, M. Kucharczyk, *On packing trapeziums in a trapezium*, Studies of the University of Žilina, Mathematical, (Proceedings of Conference on Geometry and Graph Theory, Žilina, 2003), 1 (16), (2003), 55-60.
- [JaL1994] J. Januszewski, M. Lassak, *On-line covering the unit cube by cubes*, Discrete and Computational Geometry, 12 (1994), 433-438.
- [JaL1995] J. Januszewski, M. Lassak, *Efficient on-line covering of large cubes by convex bodies of diameters at most one*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 43 (1995), 305-315.
- [JaL1997] J. Januszewski, M. Lassak, *On-line packing sequences of cubes in the unit cube*, Geometriae Dedicata, 67 (1997), 285-293.
- [JaL2001] J. Januszewski, M. Lassak, *Covering a convex body by its negative homothetic copies*, Pacific Journal of Mathematics, 197 (2001), 43-51.
- [JaL2003a] J. Januszewski, M. Lassak, *On-line 2-adic covering of the unit square by boxes*, w: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 253 pp. 359-366, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
- [JaL2003b] J. Januszewski, M. Lassak, *On-line covering of the unit cube by boxes and by convex bodies*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 51 (3), (2003), 309-317.
- [JLR1996a] J. Januszewski, M. Lassak, G. Rote, G. Woeginger, *Solution of Problem 74* (Volume 41, p. 207 (1994)), Mathematische Semesterberichte, 43 (1996), 94-100.
- [JLR1996b] J. Januszewski, M. Lassak, G. Rote, G. Woeginger, *On-line q -adic covering by the method of the n -th segment and its application to on-line covering by cubes*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 37 (1), (1996), 51-65.
- [JaS1992] J. Januszewski, S. Szuffla, *On the Urysohn integral equation in locally convex spaces*, Publications de l'Institut Mathématique (Beograd) (N.S.), 51 (65), (1992), 77-80.
- [KaK1993] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin of the American Mathematical Society, 29 (1993), 60-62.
- [Kep1611] J. Kepler, *Sterna seu de niva sexangula*, Tampach, Frankfurt, 1611.
- [Kos1957] A. Kosiński, *A proof of an Auerbach-Banach-Mazur-Ulam theorem on convex bodies*, Colloquium Mathematicum, 4 (1957), 216-218.
- [Kup1994a] W. Kuperberg, *On-line covering a cube by a sequence of cubes*, Discrete and Computational Geometry, 12 (1994), 83-90.
- [Kup1994b] W. Kuperberg, *Problem 74: Ein Intervallüberdeckungsspiel*, Mathematische Semesterberichte, 41 (1994), 207.
- [Kur1930] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fundamenta Mathematicae, 15 (1930), 301-309.

- [Las1993] M. Lassak, *Estimation of the volume of parallelotopes contained in convex bodies*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 41 (4), (1993), 219-223.
- [Las2002] M. Lassak, *On-line algorithms for the q -adic covering of the unit interval and for the covering a cube by cubes*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 43 (2), (2002), 537-549.
- [LaZ1991] M. Lassak, J. Zhang, *An on-line potato-sack theorem*, Discrete and Computational Geometry, 6 (1991), 1-7.
- [Lev1955] F. W. Levi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns*, Archiv der Mathematik, 6 (1955), 369-370.
- [Mac1951] A. M. Macbeath, *A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions*, Canadian Journal of Mathematics, 3 (1951), 54-61.
- [MeM1968] A. Meir, L. Moser, *On packing of squares and cubes*, Journal of Combinatorial Theory, 5 (1968), 126-134.
- [Min1893] H. Minkowski, *Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite*, Bulletin des Sciences Mathématiques, (2) 17 (1893), 24-29.
- [MoM1967] J. W. Moon, L. Moser, *Some packing and covering theorems*, Colloquium Mathematicum, 17 (1967), 103-110.
- [MoP1994] W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Privately published collection of problems, 1994.
- [Nas2010] M. Naszódi, *Covering a set with homothets of a convex body*, Positivity, 14 (2010), 69-74.
- [Nov2001] P. Novotny, *A note on packing clones*, Geombinatorics, 11 (1), (2001), 29-30.
- [Per1947] J. Perkal, *Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur*, Colloquium Mathematicum, 2 (1947), 45.
- [Ric1995] T. J. Richardson, *Optimal packing of similar triangles*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 69 (1995), 288-300.
- [Rog1964] C. A. Rogers, *Packing and Covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge 1964.
- [Sch1930] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica, 2 (1930), 171-180.
- [Soi1998] A. Soifer, *Packing clones in convex figures*, Geombinatorics, 8 (1), (1998), 110-115.
- [Soi2006] A. Soifer, *Covering a square of side $n + \epsilon$ with unit squares*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 113 (2006), 380-383.
- [Spr] <http://www.packomania.com>, aktualizuje: E. Sprech.
 - [Tar1932] A. Tarski, *Uwagi o stopniu równoważności wielokątów*, Parametr, 2 (1931-1932), 310-314.
- [Thu1892] A. Thue, *On some geometric number-theoretic theorems* (in Danish), Forhandlingerne ved de Skandinaviske Naturforskeres, 14 (1892), 352-353.
- [Thu1910] A. Thue, *On the densest packing of congruent circles in the plane* (in Norwegian), Skrift Vidensk-Selsk, Christiana, 1 (1910), 3-9.
- [Vás1984] E. Vászrhelyi, *Über eine Überdeckung mit homothetischen Dreiecken*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 17 (1984), 61-70.

