Autoreferat

Wybrane testy statystyczne dla danych rzeczywistych i funkcjonalnych

dr Łukasz Smaga
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki

Poznań 2019

Spis treści

Informacje o autorze

1. **Imię i nazwisko:** Łukasz Smaga
2. **Dyplomy i stopnie naukowe:**
   - **Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki:**
     Tytuł rozprawy: D-optymalne chemiczne układy wagowe przy różnych postaciach macierzy kowariancji błędów losowych
     Promotor: dr hab. Krystyna Katulska
     Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Wydział Matematyki i Informatyki
     Poznań, 2013.
   - **Magister matematyki (specjalność: matematyka stosowana):**
     Tytuł pracy: Estymacja przedziałowa w kontroli jakości
     Promotor: dr hab. Krystyna Katulska
     Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Wydział Matematyki i Informatyki
     Poznań, 2009.
3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:**
   - 2013-obecnie: adiunkt na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM,
   - 2009-2013: doktorant na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM.

Osiągnięcie naukowe

Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

Jednotematyczny cykl 6 publikacji pod wspólnym tytułem:
Wybrane testy statystyczne dla danych rzeczywistych i funkcjonalnych.

[A1] Smaga, Ł. (2015). Wald-type statistics using {2}-inverses for hypothesis testing in general factorial designs. Statistics & Probability Letters 107, 215–220.

[A2] Smaga, Ł. (2017). Diagonal and unscaled Wald-type tests in general factorial designs. Electronic Journal of Statistics 11, 2613–2646.

[A3] Smaga, Ł. (2017). Bootstrap methods for multivariate hypothesis testing. Communications in Statistics - Simulation and Computation 46, 7654–7667.

[A4] Górecki, T., Smaga, Ł. (2017). Multivariate analysis of variance for functional data. Journal of Applied Statistics 44, 2172–2189.

[A5] Smaga, Ł. (2017). Repeated measures analysis for functional data using Box-type approximation - with applications. REVSTAT - Statistical Journal (przyjęta do druku i opublikowana w ostatecznej wersji na stronie czasopisma w trybie Open Access, patrz załącznik 7)
`https://www.ine.pt/revstat/pdf/REPEATEDMEASURESANALYSISFORFUNC.pdf`

[A6] Smaga, Ł., Zhang, J.-T. (2018). Linear hypothesis testing with functional data. Technometrics (przyjęta do druku) DOI:10.1080/00401706.2018.1456976

Rozdział 1

Omówienie wyników osiągnięcia naukowego

1.1 Wstęp

Głównym celem prezentowanego osiągnięcia naukowego jest konstrukcja testów statystyczny w wybranych modelach oraz zbadanie ich własności. Rozważane są modele statystyczne zarówno dla danych rzeczywistych jak i dla danych funkcjonalnych.

Badania te wpisują się w jeden z głównych działów statystyki matematycznej, jakim jest testowanie hipotez statystycznych. Ten kierunek badań został spopularyzowany już na początku XX wieku. Niemniej jednak w dalszym ciągu pojawiają się w nim nowe wyzwania, a temat wydaje się być niewyczerpany. Jest to spowodowane szerokimi zastosowaniami testów statystycznych w dużej liczbie naukowych i praktycznych problemów.

Kierunki rozwoju metod weryfikacji hipotez statystycznych są bardzo różne. W moim osiągnięciu naukowym skupiłem się na dwóch zagadnieniach. Pierwszym z nich jest badanie testów w ogólnych modelach statystycznych, które stanowią szerokie ramy zawierające wiele modeli szczegółowych. Test statystyczny skonstruowany w ogólnym modelu może być zastosowany w modelach szczegółowych. Jednymi z testów, które mogą być skonstruowane w wielu modelach, są testy typu Walda. Bazują one zazwyczaj na statystyce testowej będącej formą kwadratową wybranego estymatora. Granicznymi rozkładami statystyk testowych typu Walda są głównie rozkłady chi-kwadrat i mieszaniny rozkładów chi-kwadrat. Testy statystyczne typu Walda konstruowane w oparciu o rozkłady graniczne statystyk testowych są zgodne, ale niestety wymagają licznych prób, aby mogły kontrolować poziom błędu pierwszego rodzaju. Dlatego bada się modyfikacje tych testów zarówno w terminach konstrukcji statystyk testowych jak i metod przybliżania ich rozkładów. Takimi zagadnieniami zająłem się w pracach [A1], [A2] i [A3]. Dokładniej, w pracach [A1] i [A2] zmodyfikowałem statystyki testowe typu Walda użyte w celu weryfikacji hipotez statystycznych w ogólnym modelu doświadczenia czynnikowego. Model ten nie wymaga ani jednakowych wariancji, ani jednakowych rozkładów prawdopodobieństwa badanej cechy statystycznej w grupach. Szczególnymi modelami są tutaj modele jednokierunkowej i dwukierunkowej analizy wariancji, jak i model analizy hierarchicznej. Zaproponowane testy statystyczne wykorzystują nowe macierze wagowe będące $\{2\}$-odwrotnościami lub macierzami diagonalnymi odpowiednich macierzy kowariancji. W pracy [A3] zaproponowałem nowe metody przybliżania rozkładów statystyk testowych typu Walda wykorzystane w celu weryfikacji wielowymiarowych hipotez statystycznych.

Przykładowym problemem jest zagadnienie testowania wektora wartości oczekiwanych rozkładu wielowymiarowego o możliwie osobliwej macierzy kowariancji. W pracy [A3] wykorzystałem metody nieparametrycznego i parametrycznego bootstrapu. Wyniki prac [A1], [A2] i [A3] zostały omówione w podrozdziale 1.2.

Drugi kierunek moich badań naukowych to weryfikacja hipotez statystycznych dla danych funkcjonalnych. Rozwój wielu dziedzin nauki powoduje pojawianie się nowych typów danych, jak przykładowo właśnie dane funkcjonalne, których analiza wymaga nowych narzędzi statystyki matematycznej. Dane funkcjonalne to dane traktowane jako losowe funkcje lub krzywe. Takie dane modelują wiele procesów, które są stale monitorowane jak na przykład temperatura i ciśnienie w danej lokalizacji, czy indeksy giełdowe. W ostatnich dwóch dekadach analiza danych funkcjonalnych stała się jednym z głównych nurtów statystyki matematycznej. Wychodząc naprzeciw oczekiwaniom praktycznym, rozwijane są metody statystyczne dla danych funkcjonalnych takie jak analiza kanoniczna, analiza składowych głównych, analiza skupień, klasyfikacja, regresja, testowanie hipotez statystycznych, itd. Zagadnieniami weryfikacji hipotez statystycznych dla danych funkcjonalnych zająłem się w pracach [A4], [A5] i [A6]. Rozważają one trzy problemy dotyczące danych funkcjonalnych. Praca [A4] jest poświęcona wielowymiarowej analizie wariancji dla danych funkcjonalnych. Analiza ta nie była wcześniej rozważana w literaturze. W pracy tej badane były testy permutacyjne oparte na reprezentacji bazowej danych funkcjonalnych, będące niejako adaptacją klasycznych testów wielowymiarowej analizy wariancji, i testy oparte na losowych projekcjach danych funkcjonalnych na dane wielowymiarowe. Praca [A5] dotyczy testów statystycznych dla powtarzanych danych funkcjonalnych. W tym zagadnieniu skonstruowałem test statystyczny w oparciu o aproksymację metodą Boxa. Otrzymany test okazał się porównywalny względem kontroli błędu pierwszego rodzaju i mocy z testami znanymi w literaturze, ale jest prostszy i znacznie mniej czasochłonny. W pracy [A6] rozpatruję testy statystyczne ogólnej hipotezy liniowej dla danych funkcjonalnych, której szczególnymi przypadkami są jednowymiarowa analiza wariancji, analiza post hoc i analiza kontrastów. W pracy [A6] zaproponowany został zglobalizowany punktowy test F oraz test typu maksimum. Rezultaty prac [A4], [A5] i [A6] omówiono w podrozdziale 1.3.

W podrozdziałach 1.2 i 1.3 skupiam się głównie na teoretycznych konstrukcjach i własnościach testów statystycznych proponowanych w pracach [A1]-[A6], ale wspominam również o wynikach badań symulacyjnych. Są one ważne z praktycznego punktu widzenia i stanowią wielokrotnie motywację do modyfikacji istniejących i konstrukcji nowych (lepszych) procedur statystycznych.

1.2 Testy statystyczne dla danych rzeczywistych [A1, A2, A3]

1.2.1 Ogólny model doświadczenia czynnikowego [A1, A2]

W pracach [A1] i [A2] rozważałem różne testy typu Walda w celu weryfikacji hipotez statystycznych w ogólnym modelu doświadczenia czynnikowego.

Wprowadźmy ogólny model doświadczenia czynnikowego korzystając z notacji w pracy [27]. Rozważmy niezależne obserwacje $X_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n_i$, gdzie

$\epsilon_{ij}, j = 1, \ldots, n_i$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie oraz

$$\mathbb{E}(\epsilon_{i1}) = 0, \quad \mathbb{E}(\epsilon_{i1}^2) = \sigma_i^2 > 0, \quad \mathbb{E}(\epsilon_{i1}^4) < \infty, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N} = \kappa_i > 0 \tag{1.1}$$

dla $i = 1, \ldots, d$ i $N = n_1 + \cdots + n_d$. W notacji macierzowej powyższy model można zapisać jako $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_{n_1}, \ldots, \mathbf{1}_{n_d})\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}$, gdzie $\mathbf{X} = (X_{11}, \ldots, X_{dn_d})^\top$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^\top$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{11}, \ldots, \epsilon_{dn_d})^\top$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}_N$ i $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathrm{diag}(\sigma_1^2\mathbf{I}_{n_1}, \ldots, \sigma_d^2\mathbf{I}_{n_d})$, $\mathbf{0}_n$ jest wektorem zerowym wymiaru $n \times 1$, $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową wymiaru $n \times n$, a $\mathbf{1}_n$ jest wektorem jedynek wymiaru $n \times 1$. Ogólna hipoteza liniowa ma postać $H_0 : \mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{H}$ jest macierzą kontrastów, tj. $\mathbf{H1} = \mathbf{0}$. Niech $\mathbf{T} = \mathbf{H}^\top(\mathbf{H}\mathbf{H}^\top)^-\mathbf{H}$, gdzie $\mathbf{A}^-$ jest uogólnioną odwrotnością macierzy $\mathbf{A}$. Równość $\mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ jest równoważna równości $\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

Przy założeniu normalności rozkładu, znane są testy w modelach homoskedastycznych (klasyczny test F) oraz heteroskedastycznych [6]. Jednak założenia normalności rozkładu i homoskedastyczności są często niespełnione. W takich przypadkach testy te nie mają dobrych własności. Pauly i in. [27] rozważali statystykę typu Walda postaci:

$$Q_N(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\top\mathbf{T}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})^+\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot,$$

gdzie $\bar{\mathbf{X}}_\cdot = (\bar{X}_{1\cdot}, \ldots, \bar{X}_{d\cdot})^\top$, $\bar{X}_{i\cdot} = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$, $\hat{\mathbf{V}}_N = N\mathrm{diag}(\hat{\sigma}_1^2/n_1, \ldots, \hat{\sigma}_d^2/n_d)$ oraz $\hat{\sigma}_i^2 = (n_i - 1)^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$, $i = 1, \ldots, d$. ($\mathbf{A}^+$ oznacza uogólnioną odwrotność Moore'a-Penrose'a macierzy $\mathbf{A}$.) Pauly i in. [27] zaproponowali permutacyjny test typu Walda (WTP) oparty o statystykę $Q_N(\mathbf{T})$, aby przezwyciężyć zbytnią liberalność testu typu Walda opartego o graniczny rozkład tej statystyki. Pokazali oni, że test permutacyjny jest granicznie dokładnym (tj. granicznie błąd pierwszego rodzaju testu jest równy poziomowi istotności α) i zgodnym testem. Badania symulacyjne sugerują, że test WTP kontroluje poziom błędu pierwszego rodzaju w wielu przypadkach, ale jest zbyt liberalny w przypadku skośnych rozkładów oraz różnych wariancji w grupach. To było motywacją do modyfikacji statystyki typu Walda, w celu otrzymania testów statystycznych o podobnych własnościach granicznych, jak te testu WTP, ale lepszych własnościach w przypadku prób skończonych.

W pracy [A1] zaproponowałem test statystyczny oparty o zmodyfikowaną statystykę typu Walda, w której uogólnioną odwrotność Moore'a-Penrose'a zastąpiłem przez $\{2\}$-odwrotność. $\{2\}$-odwrotnością macierzy $\mathbf{A}$ wymiaru $n \times m$ jest macierz $\mathbf{A}_*$ wymiaru $m \times n$ taka, że $\mathbf{A}_*\mathbf{A}\mathbf{A}_* = \mathbf{A}_*$. $\{2\}$-odwrotności są rzadziej wykorzystywane w statystyce, ale pewne ich zastosowania można znaleźć w książce [14] oraz artykule [12].

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą symetryczną i dodatnio półokreśloną, $r = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$ oraz niech $\mathbf{A} = \mathbf{P}_\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{A}\mathbf{P}_\mathbf{A}^\top$ będzie rozkładem spektralnym macierzy $\mathbf{A}$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Dla $k = 1, \ldots, r$, $\mathbf{A}^{-_k} = \mathbf{P}_\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{A}^{-_k}\mathbf{P}_\mathbf{A}^\top$ jest $\{2\}$-odwrotnością macierzy $\mathbf{A}$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{A}^{-_k} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}, \mathbf{0}_{d-k}^\top)$. Niestety $\mathbf{A}^{-_k}$ nie jest jednoznacznie zdefiniowana, gdy niektóre wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ są wielokrotne. Aby poradzić sobie z tym problemem, Duchesne i Francq [12] zaproponowali procedurę konstrukcji jednoznacznie wyznaczonej macierzy $\mathbf{P}_{\mathbf{A},B}$ takiej, że $\mathbf{A}^{-_k} = \mathbf{A}_B^{-_k} := \mathbf{P}_{\mathbf{A},B}\boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{A}^{-_k}\mathbf{P}_{\mathbf{A},B}^\top$ dla $k \leqslant r$, gdzie B jest dowolną, ale ustaloną bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^d$. $\{2\}$-odwrotności $\mathbf{A}_B^{-_k}$ są już jednoznacznie zdefiniowane.

W celu weryfikacji hipotezy H_0 chciałem wykorzystać statystyki typu Walda postaci: $N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\top\mathbf{T}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})_B^{-_k}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot$. Jednak pojawił się problem z ich rozkładami granicznymi przy prawdziwości hipotezy H_0. Zbieżność $\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}$ do $\mathbf{TVT}$, gdzie $\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2/\kappa_1, \ldots, \sigma_d^2/\kappa_d)$, nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności $(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})_B^{-_k}$ do $(\mathbf{TVT})_B^{-_k}$ przy $N \to \infty$ [2], co jest potrzebne do ustalenia pożądanego rozkładu. Aby rozwiązać ten problem, wykorzystałem wyniki z pracy [12]. Autorzy tej pracy przyjęli, że dwie wartości własne są identyczne, gdy wartość bezwzględna ich różnicy jest mniejsza niż tolerancja $\varepsilon > 0$ oraz zdefiniowali algorytm $\mathcal{U}_{B,k,\varepsilon}$ przekształcający $\mathbf{TVT}$ na $(\mathbf{TVT})^{-k}_{B,\varepsilon}$ oraz $\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}$ na $(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})^{-k}_{B,\varepsilon}$. Wtedy $(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})^{-k}_{B,\varepsilon} \xrightarrow{\mathbb{P}} (\mathbf{TVT})^{-k}_{B}$ gdy $N \to \infty$ przy poniższym założeniu, gdzie $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa.

Założenie A$(\mathbf{A}, \varepsilon)$: Niech $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ będzie bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ to $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ oraz $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_d = 0$. Tolerancja $\varepsilon > 0$ jest taka, że $\min\{|\lambda_i - \lambda_j| : \lambda_i \neq \lambda_j\} > \varepsilon$ oraz dla $k \leqslant r$, $\mathcal{U}_{B,k,\varepsilon}$ zdefiniowane wzorem $\mathcal{U}_{B,k,\varepsilon}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-k}_B$ jest funkcją ciągłą względem macierzy $\mathbf{A}$.

Zatem skonstruowałem statystykę testową postaci:

$$Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_{\cdot}^{\top}\mathbf{T}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})^{-k}_{B,\varepsilon}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}.$$

oraz wyznaczyłem jej rozkład graniczny. Rozkład ten podany został w poniższym lemacie. Ponieważ $Q^{-\mathrm{rank}(\mathbf{T})}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ prowadzi do $Q_N(\mathbf{T})$, w dalszej części rozważamy tylko statystyki $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ dla $k < \mathrm{rank}(\mathbf{T})$.

Lemat 1.1 ([A1] Lemma 1)**.** *Niech $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ będzie bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Przy założeniach* (1.1) *i $A(\mathbf{TVT}, \varepsilon)$ oraz prawdziwości $H_0 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, jeżeli $k < \mathrm{rank}(\mathbf{T})$, to $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) \xrightarrow{d} \chi^2_k$ przy $N \to \infty$, gdzie $\xrightarrow{d}$ oznacza zbieżność według rozkładu oraz χ^2_k oznacza zmienną losową o centralnym rozkładzie chi-kwadrat o k stopniach swobody.*

Na podstawie Lematu 1.1 skonstruowałem test oparty o statystykę $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ o obszarze krytycznym postaci $\{\mathbf{x} : Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) > \chi^2_{k,1-\alpha}\}$, gdzie $\chi^2_{k,\alpha}$ jest kwantylem rzędu α z rozkładu χ^2_k. Test ten jest granicznie dokładny przy założeniach Lematu 1.1. Ponadto jest to test zgodny przy prawdziwości wielu ustalonych hipotez alternatywnych:

Twierdzenie 1.1 ([A1] Theorem 2)**.** *Załóżmy, że $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ jest bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i $\mathbf{TVT} = \mathbf{P}_{\mathbf{TVT},B}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{TVT}}\mathbf{P}^{\top}_{\mathbf{TVT},B}$ jest rozkładem spektralnym macierzy $\mathbf{TVT}$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{TVT}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Przy założeniach* (1.1) *i $A(\mathbf{TVT}, \varepsilon)$ oraz prawdziwości hipotezy alternatywnej $H_1 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, jeżeli $k < r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$, to $\mathbb{P}(Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) > \chi^2_{k,1-\alpha}|H_1) \to 1$ przy $N \to \infty$, gdy wektor $\mathbf{a} \notin \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r, 0)\backslash\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$, gdzie $\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_l})$ jest przestrzenią liniową generowaną przez kolumny $i_1, \ldots, i_l$ macierzy $\mathbf{P}_{\mathbf{TVT},B}$.*

Teoretycznie warunek $\mathbf{a} \notin \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r, 0)\backslash\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$ obniża użyteczność testu opartego o statystykę $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$, ale przypadek $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r, 0)\backslash\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$ może rzadko mieć miejsce w praktyce, szczególnie dlatego, że $\mathbf{a} \notin \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$, co zostało również pokazane w pracy [A1]. Jednak badania symulacyjne sugerują, że gdy $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r, 0)\backslash\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$, to moc testu opartego o statystykę $Q^{-j}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ dla $j = 1, \ldots, k$ dąży do poziomu istotności, więc test ten nie jest zgodny, ale test dla $j = k+1, \ldots, r$ jest już zgodny. Zatem zbadanie rozkładu spektralnego estymatora macierzy $\mathbf{TVT}$ powinno pomóc w wyborze zgodnego testu opartego o statystykę $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$.

Za pomocą badań symulacyjnych sprawdziłem, że test oparty o statystykę $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ lepiej kontroluje poziom błędu pierwszego rodzaju niż test oparty o statystykę $Q_N(\mathbf{T})$, a także lepiej niż test permutacyjny z pracy [27] w pewnych przypadkach. Niestety test typu Walda oparty o $\{2\}$-odwrotność może być zbyt liberalny w pewnych sytuacjach.

Dlatego zaproponowałem również permutacyjną wersję tego testu i pokazałem jego ważność (*ang. validity*) w sensie kolejnego twierdzenia. Niech $\bar{\mathbf{X}}^{\pi}_{\cdot} = (\bar{X}^{\pi}_{1\cdot}, \ldots, \bar{X}^{\pi}_{d\cdot})^{\top}$ będzie wektorem średnich oraz niech $\hat{\mathbf{V}}^{\pi}_{N} = N\mathrm{diag}(\hat{\sigma}^2_{1,\pi}/n_1, \ldots, \hat{\sigma}^2_{d,\pi}/n_d)$ będzie macierzą kowariancji z próby dla permutacji wektora obserwacji $\mathbf{X}^{\pi} = (X^{\pi}_{11}, \ldots, X^{\pi}_{dn_d})^{\top}$.

Twierdzenie 1.2 ([A1] Theorem 3)**.** *Niech $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ będzie bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Przy założeniach* (1.1) *i $A(\mathbf{TDT}, \varepsilon)$, gdzie $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\kappa_1^{-1}, \ldots, \kappa_d^{-1})$, jeżeli $k < \mathrm{rank}(\mathbf{T})$, to warunkowy rozkład permutacyjny statystyki*

$$Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}^{\pi\top}_{\cdot}\mathbf{T}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}^{\pi}_{N}\mathbf{T})^{-k}_{B,\varepsilon}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}^{\pi}_{\cdot}$$

pod warunkiem $\mathbf{X} = (X_{11}, \ldots, X_{dn_d})^{\top}$ dąży słabo do rozkładu χ^2_k przy $N \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

Permutacyjny test typu Walda wykorzystujący {2}-odwrotność posiada obszar krytyczny postaci $\{\mathbf{x} : Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) > q_{-k,\pi,1-\alpha}\}$, gdzie $q_{-k,\pi,1-\alpha}$ jest kwantylem rzędu $(1-\alpha)$ z rozkładu warunkowego zmiennej losowej $Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ pod warunkiem $\mathbf{X}$. Przy założeniach Twierdzenia 1.2 dla każdego wektora $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}}(Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) \leqslant x|\mathbf{X}) - \mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}_0}(Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) \leqslant x)\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

przy $N \to \infty$, gdzie $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}}(Z \leqslant x|\mathbf{X})$ i $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}}(Z \leqslant x)$ oznaczają odpowiednio warunkową i bezwarunkową funkcję rozkładu zmiennej losowej Z przy założeniu, że $\boldsymbol{\mu}$ jest prawdziwą wartością parametru oraz $\boldsymbol{\mu}_0$ jest wartością parametru przy prawdziwości hipotezy H_0. Zatem Twierdzenie 1.2 pokazuje, że graniczny warunkowy rozkład permutacyjny statystyki $Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ jest niezależny od $\mathbf{T}\boldsymbol{\mu}$ oraz zawsze przybliża graniczny bezwarunkowy rozkład statystyki $Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0. Ta własność testu permutacyjnego i bootstrapowego jest pożądana (patrz [9], [19], [20], [27], [35], gdzie udowodniono inne przykłady takich wyników). Zapewnia ona, że test permutacyjny oparty o statystykę $Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ jest granicznie dokładny, a jego zgodność wynika z Twierdzeń 1.1 i 1.2.

Twierdzenie 1.3 ([A1] Theorem 4)**.** *Przy założeniach Twierdzeń 1.1-1.2 oraz prawdziwości hipotezy alternatywnej $H_1 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbb{P}(Q^{-k}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T}) > q_{-k,\pi,1-\alpha}|H_1) \to 1$ przy $N \to \infty$, gdy $k < r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$ oraz $\mathbf{a} \notin \mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r, 0)\backslash\mathcal{V}_{\mathbf{TVT}}(0)$.*

Przy założeniach powyższych wyników, testy permutacyjne typu Walda oparte o {2}-odwrotności mają podobne własności teoretyczne do testu WTP [27]. W przypadku różnych wariancji i skośnych rozkładów w grupach, test permutacyjny oparty o statystykę $Q^{-k,\pi}_{N,B,\varepsilon}(\mathbf{T})$ zmniejsza swoją liberalność wraz ze wzrostem liczebności próby szybciej niż test WTP. Przy małych liczebnościach prób, nowe metody wydają się być bardziej konserwatywne niż test WTP w przypadku ekstremalnie skośnych rozkładów, różnych liczebności prób i różnych wariancji, ale mogą być gorsze w przypadku rozkładów symetrycznych. W pracy [A2] zmodyfikowałem statystykę typu Walda w inny sposób, otrzymując lepszy test. Dokładniej, aby poradzić sobie z problemem osobliwości macierzy $\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}$, zaproponowałem diagonalny test typu Walda oparty o następującą statystykę testową:

$$Q^D_N(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}^{\top}_{\cdot}\mathbf{T}\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_{\cdot},$$

gdzie $\mathrm{diag}(\mathbf{M})$ oznacza macierz diagonalną o elementach diagonalnych równych elementom diagonalnym macierzy $\mathbf{M}$. Pokazałem, że $\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})\}^{-1}$ istnieje z prawdopodobieństwem jeden, więc statystyka $Q^D_N(\mathbf{T})$ jest dobrze zdefiniowana. Najpierw skonstruowałem test oparty o statystykę $Q^D_N(\mathbf{T})$ oraz jej graniczny rozkład przy prawdziwości H_0:

Twierdzenie 1.4 ([A2] Theorem 2.1)**.** *Przy założeniach* (1.1) *oraz prawdziwości hipotezy* $H_0 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to* $Q_N^D(\mathbf{T}) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^r \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2$ *przy* $N \to \infty$*, gdzie* $\lambda_{D,1}, \ldots, \lambda_{D,r}$ *są niezerowymi wartościami własnymi macierzy* $\{\mathrm{diag}(\mathbf{TVT})\}^{-1}\mathbf{TVT}$*,* $\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2/\kappa_1, \ldots, \sigma_d^2/\kappa_d)$ *oraz* $Z_{D,1}, \ldots, Z_{D,r}$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $N(0,1)$*.*

Z Twierdzenia 1.4 graniczny rozkład statystyki $Q_N^D(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0 jest mieszaniną centralnych rozkładów chi-kwadrat [33]. Aby przybliżyć ten rozkład, wykorzystałem przybliżenie typu Boxa [5]. Ideą tej metody jest przybliżenie rozkładu zmiennej losowej $\sum_{i=1}^r \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2$ rozkładem zmiennej losowej postaci $g_D \chi^2_{f_D}$, gdzie g_D i f_D są wyznaczone przez przyrównanie pierwszych dwóch momentów tych zmiennych losowych. Pierwsze dwa momenty zmiennej losowej $\sum_{i=1}^r \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2$ podano w poniższym lemacie.

Lemat 1.2 ([A2] Lemma 2.1)**.** *Przy notacji Twierdzenia 1.4,* $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^r \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2) = d$ *oraz* $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^r \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2) = 2\mathrm{trace}\left([\{\mathrm{diag}(\mathbf{TVT})\}^{-1}\mathbf{TVT}]^2\right)$*.*

Na podstawie Lematu 1.2 otrzymujemy

$$g_D = \frac{\mathrm{trace}\left([\{\mathrm{diag}(\mathbf{TVT})\}^{-1}\mathbf{TVT}]^2\right)}{d}, \quad f_D = \frac{d^2}{\mathrm{trace}\left([\{\mathrm{diag}(\mathbf{TVT})\}^{-1}\mathbf{TVT}]^2\right)}.$$

Wtedy $k_{D,\alpha} = g_D \chi^2_{f_D, 1-\alpha}$ jest wartością krytyczną. Estymujemy ją przez $\hat{k}_{D,\alpha} = \hat{g}_D \chi^2_{\hat{f}_D, 1-\alpha}$, a $\hat{g}_D = \mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)/d$ i $\hat{f}_D = d^2/\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)$. Zgodność tych estymatorów jak i zgodność testu o obszarze krytycznym $\{\mathbf{x} : Q_N^D(\mathbf{T}) > \hat{k}_{D,\alpha}\}$ zostały ustalone w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.5 ([A2] Theorem 2.2)**.** *Przy założeniach* (1.1)*,* $\hat{g}_D \xrightarrow{\mathbb{P}} g_D$*,* $\hat{f}_D \xrightarrow{\mathbb{P}} f_D$ *oraz* $\hat{k}_{D,\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} k_{D,\alpha}$ *przy* $N \to \infty$*. Ponadto przy prawdziwości hipotezy* $H_1 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}_d$*,* $\mathbb{P}(Q_N^D(\mathbf{T}) > \hat{k}_{D,\alpha} | H_1) \to 1$ *przy* $N \to \infty$*.*

Z Twierdzenia 1.5 wynika, że test oparty o statystykę $Q_N^D(\mathbf{T})$ jest zgodny przy prawdziwości każdej ustalonej hipotezy alternatywnej podobnie jak test oparty o statystykę $Q_N(\mathbf{T})$. Niestety badania symulacyjne w pracy [A2] pokazują, że test oparty o statystykę $Q_N^D(\mathbf{T})$ wymaga dużej liczby obserwacji, aby uzyskać zadowalające przybliżenie. Zatem rozważałem test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^{\pi\top}\mathbf{T}\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N^\pi\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\pi$. Graniczny warunkowy rozkład permutacyjny statystyki $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ jest zaprezentowany w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.6 ([A2] Theorem 2.3)**.** *Przy założeniach* (1.1)*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to wówczas warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$ *dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej* $\sum_{i=1}^r \lambda_{D,\pi,i} Z_{D,\pi,i}^2$ *przy* $N \to \infty$ *według prawdopodobieństwa, gdzie* $\lambda_{D,\pi,1}, \ldots, \lambda_{D,\pi,r}$ *są niezerowymi wartościami własnymi macierzy postaci* $\{\mathrm{diag}(\mathbf{TDT})\}^{-1}\mathbf{TDT}$*,* $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\kappa_1^{-1}, \ldots, \kappa_d^{-1})$ *oraz* $Z_{D,\pi,1}, \ldots, Z_{D,\pi,r}$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $N(0,1)$*.*

Z Twierdzenia 1.6 wynika, że graniczny warunkowy rozkład permutacyjny statystyki $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ jest niezależny od $\mathbf{T}\boldsymbol{\mu}$. Ponadto nie zależy on od wariancji w grupach w przeciwieństwie do granicznego rozkładu statystyki $Q_N^D(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0 (Twierdzenie 1.4). Zatem te dwa rozkłady nie są w ogólności takie same. Kolejny wynik prezentuje przypadek, w którym są one takie same.

Wniosek 1.1 ([A2] Corollary 2.1). *Przy założeniach Twierdzeń 1.4 i 1.6, jeżeli* $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_d^2$*, to bezwarunkowy rozkład statystyki* $Q_N^D(\mathbf{T})$ *przy prawdziwości* H_0 *jest taki sam jak warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$*, przy* $N \to \infty$*.*

Przy założeniach Wniosku 1.1, graniczny warunkowy rozkład permutacyjny statystyki $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ zawsze przybliża graniczny rozkład statystyki $Q_N^D(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0. Stąd test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ jest granicznie dokładny i zgodny przy prawdziwości każdej ustalonej hipotezy alternatywnej. Niestety, w przypadku heteroskedastycznym, Wniosek 1.1 nie jest prawdziwy. Jednak wyniki badań symulacyjnych w pracy [A2] sugerują, że graniczny rozkład statystyki $Q_N^D(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0 i graniczny warunkowy rozkład statystyki $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ są bliskie sobie, gdy wariancje w grupach nie są ekstremalnie różne. Przy małych wielkościach prób, test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ ma dobre własności w przypadku różnych wariancji w grupach, a nawet lepsze niż test WTP [27]. Mianowicie test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ kontroluje poziom błędu pierwszego rodzaju nawet w przypadku różnych wariancji w grupach oraz ekstremalnie skośnych rozkładów, w którym to przypadku test WTP jest zbyt liberalny. Moce tych testów są porównywalne w większości przypadków, ale mogą zależeć od hipotezy alternatywnej. Interesującym jest, że w pewnych sytuacjach, w których test WTP jest zbyt liberalny, test ten ma mniejszą moc niż test permutacyjny oparty o $Q_N^{D,\pi}$.

W pracy [A2] rozważałem również inny test, który kontroluje poziom błędu pierwszego rodzaju lepiej niż test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ w przypadku bardzo różnych wariancji w grupach. Oba testy mają bardzo podobną empiryczną moc. Rozważałem standaryzowaną wersję zmiennej losowej $Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\top \mathbf{T}\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\mathbf{V}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot$, gdzie $\mathbf{V}_N = N\mathrm{diag}(\sigma_1^2/n_1, \ldots, \sigma_d^2/n_d)$, a mianowicie

$$\frac{Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T}) - \mathbb{E}_{H_0}(Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T}))}{\sqrt{\mathrm{Var}_{H_0}(Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T}))}}.$$

Przy założeniu normalności ($\epsilon_{i1} \sim N(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, d$) pokazałem, że $\mathbb{E}_{H_0}(Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T})) = d$ oraz $\mathrm{Var}_{H_0}(Q_N^{D,\mathbf{V}_N}(\mathbf{T})) = 2\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\mathbf{V}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{V}_N\mathbf{T}]^2)$. Do estymacji macierzy $\mathbf{V}_N$ wykorzystałem estymator $\hat{\mathbf{V}}_N$, który jest L_2-zgodny w następującym sensie: $\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{V}_N^{-1} \stackrel{L_2}{\to} \mathbf{I}_d$ [27]. Zatem rozważałem statystykę testową postaci:

$$Q_N^{D,s}(\mathbf{T}) = \frac{Q_N^D(\mathbf{T}) - d}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)}}.$$

Korzystając z wyników uzyskanych w pracy [33] przybliżyłem rozkład statystyki $Q_N^{D,s}(\mathbf{T})$ przez ciąg standaryzowanych rozkładów chi-kwadrat. Niestety badania symulacyjne wskazują, że otrzymany w ten sposób test jest zbyt liberalny przy małych wielkościach prób. Dlatego rozważyłem również test permutacyjny oparty o

$$Q_N^{D,s,\pi}(\mathbf{T}) = \frac{Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T}) - d}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N^\pi\mathbf{T})\}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N^\pi\mathbf{T}]^2)}}.$$

Wyniki badań symulacyjnych w pracy [A2] sugerują, że ten test ma lepsze własności niż test permutacyjny oparty o $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ przy bardzo małych wielkościach prób. Mimo, że założyłem normalność podczas konstrukcji standaryzowanej diagonalnej statystyki typu Walda, własności graniczne testu opartego o nią zostały udowodnione bez tego założenia:

Twierdzenie 1.7 ([A2] Theorem 2.4). *Przy założeniach* (1.1)*:*

1. *Przy prawdziwości hipotezy* $H_0 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to przy* $N \to \infty$*:*
$$Q_N^{D,s}(\mathbf{T}) \xrightarrow{d} \frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_{D,i} Z_{D,i}^2 - d}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{TVT})\}^{-1}\mathbf{TVT}]^2)}},$$
gdzie $\lambda_{D,1}, \ldots, \lambda_{D,r}$*,* $\mathbf{V}$ *oraz* $Z_{D,1}, \ldots, Z_{D,r}$ *zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 1.4.*
2. *Jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{D,s,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$ *dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej postaci*
$$\frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_{D,\pi,i} Z_{D,\pi,i}^2 - d}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\{\mathrm{diag}(\mathbf{TDT})\}^{-1}\mathbf{TDT}]^2)}}$$
przy $N \to \infty$ *według prawdopodobieństwa, gdzie* $\lambda_{D,\pi,1}, \ldots, \lambda_{D,\pi,r}$*,* $\mathbf{D}$ *oraz* $Z_{D,\pi,1}, \ldots,$ $Z_{D,\pi,r}$ *zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 1.6.*
3. *Jeżeli* $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_d^2$*, to bezwarunkowy rozkład statystyki* $Q_N^{D,s}(\mathbf{T})$ *przy prawdziwości hipotezy* H_0 *jest taki sam jak warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{D,s,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$*, przy* $N \to \infty$*.*

W pracy [A2] rozważałem również nieskalowane testy typu Walda oparte o statystykę testową $Q_N^U(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\top \mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot$.

Twierdzenie 1.8 ([A2] Theorem 3.1). *Przy założeniach* (1.1) *oraz prawdziwości hipotezy* $H_0 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to* $Q_N^U(\mathbf{T}) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{r} \lambda_{U,i} Z_{U,i}^2$ *przy* $N \to \infty$*, gdzie* $\lambda_{U,1}, \ldots, \lambda_{U,r}$ *są niezerowymi wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{TVT}$*,* $\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2/\kappa_1, \ldots, \sigma_d^2/\kappa_d)$ *oraz* $Z_{U,1}, \ldots, Z_{U,r}$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $N(0,1)$*.*

Konstrukcji testu opartego o $Q_N^U(\mathbf{T})$ dokonałem za pomocą przybliżenia typu Boxa (powiedzmy przez $g_U\chi^2_{f_U}$). Wówczas $k_{U,\alpha} = g_U\chi^2_{f_U,1-\alpha}$ jest wartością krytyczną, gdzie $g_U = \mathrm{trace}([\mathbf{TVT}]^2)/\mathrm{trace}(\mathbf{TVT})$ oraz $f_U = [\mathrm{trace}(\mathbf{TVT})]^2/\mathrm{trace}([\mathbf{TVT}]^2)$. Niech $\hat{g}_U = \mathrm{trace}([\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)/\mathrm{trace}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})$, $\hat{f}_U = [\mathrm{trace}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})]^2/\mathrm{trace}([\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)$ oraz niech $\hat{k}_{U,\alpha} = \hat{g}_U\chi^2_{\hat{f}_U,1-\alpha}$.

Twierdzenie 1.9 ([A2] Theorem 3.2). *Przy założeniach* (1.1)*,* $\hat{g}_U \xrightarrow{\mathbb{P}} g_U$*,* $\hat{f}_U \xrightarrow{\mathbb{P}} f_U$ *oraz* $\hat{k}_{U,\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} k_{U,\alpha}$ *przy* $N \to \infty$*. Ponadto przy prawdziwości hipotezy alternatywnej* $H_1 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}_d$*,* $\mathbb{P}(Q_N^U(\mathbf{T}) > \hat{k}_{U,\alpha}|H_1) \to 1$ *przy* $N \to \infty$*.*

Test oparty o statystykę $Q_N^U(\mathbf{T})$ ma znacznie lepsze własności w przypadku prób skończonych niż testy oparte o statystyki $Q_N(\mathbf{T})$ i $Q_N^D(\mathbf{T})$. Jednak może być on zbyt konserwatywny w pewnych przypadkach. Aby poradzić sobie z tym problemem, rozważałem najpierw test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T}) = N\bar{\mathbf{X}}_\cdot^{\pi\top}\mathbf{T}\bar{\mathbf{X}}_\cdot^\pi$.

Twierdzenie 1.10 ([A2] Theorem 3.3). *Przy założeniach* (1.1)*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$ *dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{U,\pi,i} Z_{U,\pi,i}^2$ *przy* $N \to \infty$ *według prawdopodobieństwa, gdzie* $\lambda_{U,\pi,1}, \ldots, \lambda_{U,\pi,r}$ *są niezerowymi wartościami własnymi macierzy* $\sigma^2\mathbf{TDT}$*,* $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{d} \kappa_i\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{d} \kappa_i(\mu_i - \sum_{m=1}^{d} \kappa_m\mu_m)^2$*,* $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\kappa_1^{-1}, \ldots, \kappa_d^{-1})$ *oraz* $Z_{U,\pi,1}, \ldots, Z_{U,\pi,r}$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $N(0,1)$*.*

Niestety Twierdzenia 1.8 i 1.10 wskazują, że test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T})$ może nie mieć dobrych własności. Graniczny warunkowy rozkład statystyki $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T})$ zależy od wektora $\boldsymbol{\mu}$, a ponadto rzadko jest on taki sam jak graniczny rozkład statystyki $Q_N^{U}(\mathbf{T})$ przy prawdziwości hipotezy H_0. Faktycznie badania symulacyjne sugerują, że nieskalowany permutacyjny test typu Walda bywa zbyt konserwatywny lub zbyt liberalny. Dlatego rozważyłem test permutacyjny oparty o standaryzowaną statystykę $Q_N^{U}(\mathbf{T})$, tj.

$$Q_N^{U,s}(\mathbf{T}) = \frac{Q_N^{U}(\mathbf{T}) - \mathrm{trace}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T})}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\mathbf{T}\hat{\mathbf{V}}_N\mathbf{T}]^2)}}.$$

Ten test ma całkiem dobre własności (lepsze niż testy oparte o statystyki $Q_N^{U}(\mathbf{T})$ i $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T})$) przy małych wielkościach prób. Permutacyjną wersję $Q_N^{U,s}(\mathbf{T})$ oznaczmy przez $Q_N^{U,s,\pi}(\mathbf{T})$. Teoretycznie test ten jest również lepszy niż test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{U,\pi}(\mathbf{T})$ w sensie poniższego twierdzenia. Niestety test permutacyjny oparty o statystykę $Q_N^{U,s,\pi}(\mathbf{T})$ może mieć mniejszą moc niż testy permutacyjne oparte o statystyki $Q_N^{D,\pi}(\mathbf{T})$ i $Q_N^{D,s,\pi}(\mathbf{T})$ w pewnych przypadkach.

Twierdzenie 1.11 ([A2] Theorem 3.4)**.** *Przy założeniach* (1.1)*:*

1. *Przy prawdziwości hipotezy* $H_0 : \mathbf{T}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$*, jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to przy* $N \to \infty$*:*

$$Q_N^{U,s}(\mathbf{T}) \xrightarrow{d} \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_{U,i} Z_{U,i}^2 - \mathrm{trace}(\mathbf{TVT})}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\mathbf{TVT}]^2)}},$$

gdzie $\lambda_{U,1}, \ldots, \lambda_{U,r}$*,* $\mathbf{V}$ *oraz* $Z_{U,1}, \ldots, Z_{U,r}$ *zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 1.8.*

2. *Jeżeli* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{T})$*, to warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{U,s,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$ *dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej postaci:*

$$\frac{\sum_{i=1}^r \lambda_{U,\pi,i}^* Z_{U,\pi,i}^2 - \mathrm{trace}(\mathbf{TDT})}{\sqrt{2\mathrm{trace}([\mathbf{TDT}]^2)}}$$

przy $N \to \infty$ *według prawdopodobieństwa, gdzie* $\lambda_{U,\pi,1}^*, \ldots, \lambda_{U,\pi,r}^*$ *są niezerowymi wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{TDT}$ *oraz* $\mathbf{D}$ *i* $Z_{U,\pi,1}, \ldots, Z_{U,\pi,r}$ *zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 1.10.*

3. *Jeżeli* $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_d^2$*, to bezwarunkowy rozkład statystyki* $Q_N^{U,s}(\mathbf{T})$ *przy prawdziwości hipotezy* H_0 *jest taki sam jak warunkowy rozkład permutacyjny statystyki* $Q_N^{U,s,\pi}(\mathbf{T})$ *pod warunkiem* $\mathbf{X}$*, przy* $N \to \infty$*.*

1.2.2 Weryfikacja hipotez wielowymiarowych [A3]

W pracy [A3] rozważałem różne testy bootstrapowe typu Walda w celu weryfikacji hipotez wielowymiarowych.

Rozważmy ogólne zagadnienie testowania hipotez wprowadzone w pracy [12]. Załóżmy, że $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{id})^\top$, $i = 1, \ldots, n$ są wektorami losowymi wymiaru $d \times 1$. Przyjmujemy, że ich rozkład zależy od parametru $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top$ oraz parametru zakłócającego $\boldsymbol{\xi}$. Niech $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^\top, \boldsymbol{\xi}^\top)^\top$. Interesuje nas weryfikacja hipotezy zerowej $H_0\colon \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1\colon \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$. Niech $\mathbf{Z}_n = \sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}_0)$, gdzie $\mathbf{T}_n = (T_{n1}, \ldots, T_{np})^\top$ jest ciągiem estymatorów parametru $\boldsymbol{\mu}$. Przy prawdziwości hipotezy H_0 zakładamy, że $\mathbf{Z}_n \xrightarrow{d} N_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ przy $n \to \infty$. Nieznana macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq \mathbf{0}_{p\times p}$ może być osobliwa, gdzie $\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\mu}_0^\top, \boldsymbol{\xi}_0^\top)^\top$. Wiele szczegółowych zagadnień testowania hipotez w statystyce i ekonometrii może być wyrażona w powyższym ogólnym problemie weryfikacji hipotez, np. zagadnienie testowania wektora wartości oczekiwanych rozkładu wielowymiarowego o możliwie osobliwej macierzy kowariancji [4].

Statystyka testowa typu Walda służąca do weryfikacji powyższego układu hipotez jest postaci $Q_n(\mathbf{W}_n) = \mathbf{Z}_n^\top \mathbf{W}_n \mathbf{Z}_n$, gdzie $\mathbf{W}_n$ jest macierzą wagową. Niech $\boldsymbol{\Sigma}_n$ będzie estymatorem macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_0$ takim, że $\boldsymbol{\Sigma}_n \xrightarrow{1} \boldsymbol{\Sigma}_0$ przy prawdziwości hipotezy H_0, gdzie $\xrightarrow{1}$ oznacza zbieżność z prawdopodobieństwem jeden. Ten estymator zależy od rozważanego zagadnienia (np. w analizie wielowymiarowej, macierz kowariancji z próby $\mathbf{S}_n$ może być wykorzystana). Duchesne i Francq [12] rozpatrywali testy oparte o statystykę $Q_n(\mathbf{W}_n)$, macierze wagowe $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p, \boldsymbol{\Sigma}_n^{-k}, \boldsymbol{\Sigma}_n^{+}$ oraz wartości krytyczne będące kwantylami z rozkładów granicznych statystyk testowych przy prawdziwości hipotezy H_0. W pracy [12] pokazano, że testy te są granicznie dokładne i zgodne. Jednak zazwyczaj potrzebna jest duża wielkość próby, aby uzyskać satysfakcjonujące przybliżenia. Przy małej liczebności próby, testy rozważane w pracy [12] są zbyt konserwatywne lub zbyt liberalne.

Celem pracy [A3] była poprawa własności testów zaproponowanych w artykule [12] w przypadku prób skończonych. Osiągnąłem to przez zastosowanie metod bootstrapowych. Najpierw rozważałem następującą procedurę bootstrapu nieparametrycznego:

1. Oblicz $\mathbf{T}_n$ i $Q_n(\mathbf{W}_n)$ dla oryginalnych danych.
2. Wybierz B niezależnych prób bootstrapowych $\mathbf{X}_1^{*,b}, \ldots, \mathbf{X}_n^{*,b}$, $b = 1, \ldots, B$ losowanych ze zwracaniem z n oryginalnych obserwacji $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$.
3. Dla każdej próby bootstrapowej oblicz wartość
$$Q_n^{*,b}(\mathbf{W}_n^{*,b}) = n(\mathbf{T}_n^{*,b} - \mathbf{T}_n)^\top \mathbf{W}_n^{*,b}(\mathbf{T}_n^{*,b} - \mathbf{T}_n),$$
$b = 1, \ldots, B$, gdzie $\mathbf{T}_n^{*,b}$ i $\mathbf{W}_n^{*,b}$ są wartościami estymatora $\mathbf{T}_n^*$ i macierzy wagowej $\mathbf{W}_n^*$ dla b-tej próby bootstrapowej. Gdy $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p$, to $\mathbf{W}_n^* = \mathbf{I}_p$.
4. Ostateczna p-wartość jest zdefiniowana jako $B^{-1}\sum_{b=1}^{B} I(Q_n^{*,b}(\mathbf{W}_n^{*,b}) > Q_n(\mathbf{W}_n))$, gdzie $I(A)$ oznacza funkcję indykatora zbioru A.

W implementacji numerycznej powyższego testu zaproponowałem wykorzystanie tylko prób bootstrapowych, dla których rząd macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_n^*$ jest taki sam jak rząd estymatora $\boldsymbol{\Sigma}_n$. Ideą takiego zabiegu jest uzyskanie dokładniejszego przybliżenia na podstawie skończonej próby przez lepsze naśladowanie danej struktury kowariancji obserwacji pierwotnych. Ponadto jest to potrzebne do wykonania testów opartych o $\{2\}$-odwrotności, mianowicie gdy $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_n^*)$ jest mniejszy niż $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_n)$, $\{2\}$-odwrotności macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_n^*$ dla k takiego, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_n^*) < k \leqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_n)$ nie istnieją. Zagadnienie rzędu jest dużym problemem przy małej liczebności próby. Na szczęście proporcja odrzuconych prób bootstrapowych zmniejsza się dość szybko wraz ze zwiększaniem wielkości próby, co wydaje się być teoretycznie i numerycznie potwierdzone, jak podaję w trzecim akapicie po Twierdzeniu 1.12.

Podobnie jak dla $\{2\}$-odwrotności, $\boldsymbol{\Sigma}_n \xrightarrow{1} \boldsymbol{\Sigma}_0$ nie gwarantuje, że $\boldsymbol{\Sigma}_n^+ \xrightarrow{1} \boldsymbol{\Sigma}_0^+$ [2]. Niech $\boldsymbol{\Sigma}_n = \mathbf{P}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{P}_n^\top$ będzie rozkładem spektralnym macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_n$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Jak w pracy [12] zamiast $\boldsymbol{\Sigma}_n$ wykorzystałem $\boldsymbol{\Sigma}_{n,\varepsilon} = \mathbf{P}_n \boldsymbol{\Lambda}_{n,\varepsilon} \mathbf{P}_n^\top$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}_{n,\varepsilon}$ jest macierzą otrzymaną przez zastąpienie zerem elementów macierzy $\boldsymbol{\Lambda}_n$ mniejszych niż $\varepsilon > 0$. Jeżeli ε jest dostatecznie mały, aby $\mathbb{P}(\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{n,\varepsilon}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_0)) \to 1$ przy $n \to \infty$, to $\boldsymbol{\Sigma}_{n,\varepsilon}^+ \xrightarrow{1} \boldsymbol{\Sigma}_0^+$.

Niestety wydaje się niemożliwe pokazanie ważności procedury bootstrapu nieparametrycznego w ogólnych ramach postawionego problemu testowania hipotez. Jednak pokazałem tę ważność w przypadku $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p, \mathbf{S}_{n,\varepsilon}^+$ w zagadnieniu testowania wektora wartości oczekiwanych rozkładu wielowymiarowego o możliwie osobliwej macierzy kowariancji. Załóżmy, że $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ip})^\top, i = 1, \ldots, n$, są niezależnymi wektorami losowymi o takim samym rozkładzie w przestrzeni $\mathbb{R}^p$, gdzie $\mathbb{E}(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\mu}$ oraz $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\Sigma}$ są nieznanymi parametrami. Niech $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \ldots, \mathbf{X}_n^\top)^\top$. Rozważamy $\mathbf{T}_n = \bar{\mathbf{X}}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$. Niech $\mathbf{T}_n^* = \bar{\mathbf{X}}_n^* = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^*$ oraz $\mathbf{S}_n^* = n^{-1}\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i^* - \bar{\mathbf{X}}_n^*)(\mathbf{X}_i^* - \bar{\mathbf{X}}_n^*)^\top$.

Twierdzenie 1.12 ([A3] Theorem 3.1)**.** *Przy powyższej notacji, $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})$ oraz jeżeli $\mathbb{E}(\|\mathbf{X}_1\|^2) < \infty$:*

1. *Warunkowy rozkład statystyki $Q_n^*(\mathbf{I}_p)$ dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej postaci $\sum_{i=1}^r \lambda_i N_i^2$ według prawdopodobieństwa dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, przy $n \to \infty$, gdzie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ są wartościami własnymi macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$ oraz $N_i, i = 1, \ldots, r$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$.*
2. *Jeżeli $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mały, aby $\mathbb{P}(\mathrm{rank}(\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})|\mathbf{X}) \to 1$ przy $n \to \infty$, to warunkowy rozkład statystyki $Q_n^*((\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*)^+)$ dąży słabo do centralnego rozkładu χ_r^2 według prawdopodobieństwa dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, przy $n \to \infty$.*

Załóżmy, że $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p, \mathbf{S}_{n,\varepsilon}^+$ i odpowiednio $\mathbf{W}_n^* = \mathbf{I}_p, (\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*)^+$. Powyższy wynik pokazuje, że graniczny warunkowy rozkład statystyki $Q_n^*(\mathbf{W}_n^*)$ nie zależy od parametru $\boldsymbol{\mu}$, a ponadto jest on taki sam jak graniczny bezwarunkowy rozkład statystyki $Q_n(\mathbf{W}_n)$ przy prawdziwości hipotezy H_0 (patrz Lematy 2.1 i 2.3 w pracy [12]). Bardziej precyzyjnie, przy założeniach tych lematów oraz Twierdzenia 1.12 dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, mamy:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}_0}(Q_n(\mathbf{W}_n) \leqslant x) - \mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}}(Q_n^*(\mathbf{W}_n^*) \leqslant x|\mathbf{X}) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

przy $n \to \infty$. Ta własność gwarantuje, że test bootstrapu nieparametrycznego jest granicznie dokładny i zgodny przy takich samych założeniach jak te dla zgodności testów w pracy [12] (patrz Wniosek 3.1 w tej pracy). Oba testy mają granicznie tę samą moc.

Dla pewnych prób bootstrapowych $(\mathbf{S}_n^*)_{B,\varepsilon}^{-k}$ może nie istnieć dla danego k. Jednak badania numeryczne wskazują, że warunkowy rozkład statystyki $Q_n^*((\mathbf{S}_n^*)_{B,\varepsilon}^{-k})$ wyznaczony na podstawie prób bootstrapowych, dla których $(\mathbf{S}_n^*)_{B,\varepsilon}^{-k}$ istnieje, jest bardzo podobny do rozkładu statystyki $Q_n((\mathbf{S}_n)_{B,\varepsilon}^{-k})$ przy prawdziwości hipotezy H_0. Zatem wydaje się, że testy bootstrapu nieparametrycznego oparte o $\{2\}$-odwrotności mają takie same graniczne własności jak pozostałe testy.

Chociaż badania numeryczne sugerują, że warunek dotyczący rzędów macierzy $\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ w Twierdzeniu 1.12 jest spełniony, wydaje się on być trudnym do sprawdzenia (o ile jest to w ogóle możliwe). Jednak pokazałem, że prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia sprzyjającego zdarzeniu $\{\mathrm{rank}(\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*) \neq \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})\}$ zbiega do zera. Niech $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma}) < p < n$ oraz niech $\mathbf{X}$ będzie ustalony. Rząd macierzy $\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*$ jest mniejszy niż r, gdy liczba różnych wektorów w próbie bootstrapowej jest mniejsza lub równa r. Pokazałem, że warunkowe prawdopodobieństwo tego zdarzenia zbiega do zera. To wskazuje, że prawdopodobieństwo tego, że $\mathrm{rank}(\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*)$ jest mniejszy niż r wydaje się zbiegać do zera. Niestety mogą wystąpić inne problemy z obserwacjami $\mathbf{X}$, które w rezultacie spowodują, że $\mathrm{rank}(\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^*) \neq \mathrm{rank}(\boldsymbol{\Sigma})$.

Testy bootstrapu nieparametrycznego mogą nie mieć dobrych własności, gdy liczba obserwacji jest mała. Zatem w pracy [A3] zaproponowałem również metodę bootstrapu parametrycznego. Metody tego typu są rzadziej rozważane w modelach nieparametrycznych. Jednak ostatnio Konietschke i in. [19] skutecznie zastosowali metodę bootstrapu parametrycznego w wielowymiarowych modelach nieparametrycznych. Przyjmując, że $d = p$ zaproponowałem następującą procedurę bootstrapu parametrycznego:

1. Oblicz $\mathbf{\Sigma}_n$ i $Q_n(\mathbf{W}_n)$ dla oryginalnych danych.
2. Wygeneruj B niezależnych prób $\mathbf{X}_1^{\bullet,b}, \ldots, \mathbf{X}_n^{\bullet,b} \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{\Sigma}_n)$, $b = 1, \ldots, B$ związanych z przypadkiem, gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa.
3. Dla każdej próby bootstrapowej oblicz wartość

$$Q_n^{\bullet,b}(\mathbf{W}_n^{\bullet,b}) = n(\mathbf{T}_n^{\bullet,b} - \boldsymbol{\mu}_0)^\top \mathbf{W}_n^{\bullet,b}(\mathbf{T}_n^{\bullet,b} - \boldsymbol{\mu}_0),$$

   $b = 1, \ldots, B$, gdzie $\mathbf{T}_n^{\bullet,b}$ i $\mathbf{W}_n^{\bullet,b}$ są wartościami estymatora $\mathbf{T}_n^\bullet$ i macierzy wagowej $\mathbf{W}_n^\bullet$ dla b-tej próby bootstrapowej. Jeżeli $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p$, to $\mathbf{W}_n^\bullet := \mathbf{I}_p$.
4. Ostateczna p-wartość jest zdefiniowana jako $B^{-1}\sum_{b=1}^B I(Q_n^{\bullet,b}(\mathbf{W}_n^{\bullet,b}) > Q_n(\mathbf{W}_n))$.

Takie same uwagi odnośnie implementacji jak w przypadku bootstrapu nieparametrycznego są prawdziwe w stosunku do bootstrapu parametrycznego. Jednak w przypadku metody bootstrapu parametrycznego, badania symulacyjne w pracy [A3] sugerują, że proporcja prób bootstrapowych, dla których $\operatorname{rank}(\mathbf{\Sigma}_n^\bullet) \neq \operatorname{rank}(\mathbf{\Sigma}_n)$ jest bardzo mała, a często nawet równa zeru. Zatem zagadnienie rzędu w przypadku bootstrapu parametrycznego jest znacznie mniej poważne niż dla bootstrapu nieparametrycznego nawet, gdy wielkości prób są małe.

Podobnie jak w przypadku bootstrapu nieparametrycznego pokazałem, że testy bootstrapu parametrycznego mają własność granicznej ważności w problemie testowania wektora wartości oczekiwanych rozkładu wielowymiarowego o możliwie osobliwej macierzy kowariancji. Niech $\mathbf{T}_n^\bullet = \bar{\mathbf{X}}_n^\bullet = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\bullet$ oraz $\mathbf{S}_n^\bullet = n^{-1}\sum_{i=1}^n(\mathbf{X}_i^\bullet - \bar{\mathbf{X}}_n^\bullet)(\mathbf{X}_i^\bullet - \bar{\mathbf{X}}_n^\bullet)^\top$.

Twierdzenie 1.13 ([A3] Theorem 4.1)**.** *Przy powyższej notacji, $r = \operatorname{rank}(\mathbf{\Sigma})$:*

1. *Warunkowy rozkład statystyki $Q_n^\bullet(\mathbf{I}_p)$ dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej postaci $\sum_{i=1}^r \lambda_i N_i^2$ według prawdopodobieństwa dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, przy $n \to \infty$, gdzie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{\Sigma}$ oraz $N_i, i = 1, \ldots, r$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$.*
2. *Jeżeli $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mały, aby $\mathbb{P}(\operatorname{rank}(\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^\bullet) = \operatorname{rank}(\mathbf{S}_n)|\mathbf{X}) \to 1$ przy $n \to \infty$ oraz $\operatorname{rank}(\mathbf{S}_n(\omega)) = \operatorname{rank}(\mathbf{\Sigma})$ dla każdego ω i dla każdego, ale ustalonego n, to warunkowy rozkład statystyki $Q_n^\bullet((\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^\bullet)^+)$ dąży słabo do centralnego rozkładu χ_r^2 według prawdopodobieństwa dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, przy $n \to \infty$.*

Niech $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_p, \mathbf{S}_{n,\varepsilon}^+$ i odpowiednio $\mathbf{W}_n^\bullet = \mathbf{I}_p, (\mathbf{S}_{n,\varepsilon}^\bullet)^+$. Wnioskujemy, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}_0}(Q_n(\mathbf{W}_n) \leqslant x) - \mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}}(Q_n^\bullet(\mathbf{W}_n^\bullet) \leqslant x|\mathbf{X})\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

dla każdego $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, przy $n \to \infty$. Stąd graniczne własności metody bootstrapu parametrycznego są takie same jak metody bootstrapu nieparametrycznego. Ponadto podobne (empirycznie otrzymane) własności testów bootstrapu nieparametrycznego opartych o $\{2\}$-odwrotności są również prawdziwe w przypadku bootstrapu parametrycznego.

Na podstawie badań symulacyjnych w pracy [A3] stwierdzamy, że testy bootstrapu nieparametrycznego i parametrycznego często lepiej kontrolują poziom błędu pierwszego rodzaju niż testy rozważane w pracy [12]. Jednak testy bootstrapu nieparametrycznego mogą wykazywać tendencję konserwatywną. Testy bootstrapu parametrycznego lepiej kontrolują poziom błędu pierwszego rodzaju, za wyjątkiem przypadku bardzo skośnych rozkładów, w którym to przypadku są one zbyt liberalne. Ogólnie test bootstrapu parametrycznego ma większą moc niż test bootstrapu nieparametrycznego.

1.3 Testy statystyczne dla danych funkcjonalnych [A4, A5, A6]

1.3.1 Wielowymiarowa analiza wariancji [A4]

W pracy [A4] rozważaliśmy wielowymiarową analizę wariancji dla danych funkcjonalnych. Według mojej wiedzy, w tej pracy jako pierwsi rozpatrywaliśmy taką analizę.

Niech $\mathbf{X}_{ij}(t) = (X_{ij1}(t), \ldots, X_{ijp}(t))^\top$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n_i$ oznacza l grup wektorów funkcji losowych zdefiniowanych na skończonym przedziale $\mathcal{I} = [a, b]$. Niech $\mathrm{SP}_p(\mathbf{m}, \mathbf{\Gamma})$ oznacza p-wymiarowy proces stochastyczny o wektorze funkcji średnich $\mathbf{m}(t)$, $t \in \mathcal{I}$ oraz funkcji kowariancji $\mathbf{\Gamma}(s,t)$, $s, t \in \mathcal{I}$. Zakładając, że $\mathbf{X}_{ij}$ są niezależnymi procesami stochastycznymi $\mathrm{SP}_p(\mathbf{m}_i, \mathbf{\Gamma})$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n_i$, jesteśmy zainteresowani testowaniem równości wektorów funkcji średnich w l grupach:

$$H_0 : \mathbf{m}_1(t) = \cdots = \mathbf{m}_l(t),\ t \in \mathcal{I}.$$

Zaproponowaliśmy najpierw test permutacyjny oparty o reprezentację bazową składowych procesu stochastycznego $\mathbf{X}_{ij}(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n_i$. Załóżmy, że $\mathbf{X}_{ij} \in L_2^p(\mathcal{I})$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n_i$, gdzie $L_2^p(\mathcal{I})$ jest przestrzenią Hilberta p-wymiarowych wektorów funkcji całkowalnych z kwadratem określonych na przedziale $\mathcal{I}$. Możemy założyć, że

$$X_{ijm}(t) = \sum_{r=0}^{K_m} \alpha_{ijmr}\varphi_r(t),\ t \in \mathcal{I},\ m = 1, \ldots, p, \tag{1.2}$$

gdzie $\{\varphi_r\}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni $L_2(\mathcal{I})$ oraz α_{ijmr}, $r = 0, \ldots, K_m$ są zmiennymi losowymi takimi, że $\mathrm{Var}(\alpha_{ijmr}) < \infty$ (patrz [29]). Osobno dla każdej zmiennej, estymacji współczynników równania (1.2) można dokonać metodą najmniejszych kwadratów, a długość rozwinięcia w bazie można wybrać korzystając z Bayesowskiego kryterium informacyjnego. Niech $KM = \max\{K_1, \ldots, K_p\}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ijm} = (\alpha_{ijm0}, \ldots, \alpha_{ijmK_m}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{KM+1}$ oraz niech $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{KM}(t))^\top$, $t \in \mathcal{I}$. Wtedy

$$\mathbf{X}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{ij1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{ijp} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in \mathcal{I}. \tag{1.3}$$

Niech

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i} \int_{\mathcal{I}} \left(\mathbf{X}_{ij}(t) - \bar{\mathbf{X}}_i(t)\right)\left(\mathbf{X}_{ij}(t) - \bar{\mathbf{X}}_i(t)\right)^\top dt,$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{l} n_i \int_{\mathcal{I}} \left(\bar{\mathbf{X}}_i(t) - \bar{\mathbf{X}}(t)\right)\left(\bar{\mathbf{X}}_i(t) - \bar{\mathbf{X}}(t)\right)^\top dt,$$

gdzie $\bar{\mathbf{X}}_i(t) = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}(t)$ oraz $\bar{\mathbf{X}}(t) = n^{-1}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}(t)$ dla $i = 1,\dots,l$, $t \in \mathcal{I}$, oraz $n = n_1 + \cdots + n_l$. Podobnie jak w klasycznej wielowymiarowej analizie wariancji (MANOVA [1]), wykorzystaliśmy macierze $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ do konstrukcji statystyk testowych w celu weryfikacji hipotezy H_0. Korzystając z reprezentacji bazowej danych pokazaliśmy, że macierze $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ można wyrazić w bardziej wygodnej postaci, jak podano w poniższym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 1.1 ([A4] Theorem 2.1). *Jeżeli składowe procesów stochastycznych $\mathbf{X}_{ij}(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $i = 1,\dots,l$, $j = 1,\dots,n_i$, są reprezentowane za pomocą skończonej liczby funkcji bazowych, tj. równanie* (1.3) *zachodzi, to $\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$, gdzie*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^\top,\ \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{m=1}^{n_i}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{im}^\top,\ \mathbf{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{t=1}^{l}\sum_{u=1}^{n_t}\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{tu}^\top.$$

Stwierdzenie 1.1 implikuje, że macierze $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ można wyznaczyć tylko na podstawie macierzy współczynników $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$, co jest ważne z punktu widzenia praktycznej implementacji testów. Rozważyliśmy statystyki testowe, które zostały skonstruowane w oparciu o statystyki testowe MANOVA, mianowicie statystykę lambda Wilksa $\mathrm{W} = \det(\mathbf{E})/\det(\mathbf{E}+\mathbf{H})$, statystykę Lawleya-Hotellinga $\mathrm{LH} = \mathrm{trace}(\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1})$, statystykę Pillaia $\mathrm{P} = \mathrm{trace}(\mathbf{H}(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1})$ i statystykę Roya $\mathrm{R} = \lambda_{\max}(\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1})$. ($\lambda_{\max}(\mathbf{M})$ oznacza największą wartość własną macierzy $\mathbf{M}$.) Zaproponowaliśmy testy permutacyjne oparte o te statystyki testowe. Następująca uwaga implikuje, że nie trzeba obliczać wszystkich elementów statystyk testowych $\mathrm{W}, \mathrm{LH}, \mathrm{P}$ i R dla każdej permutacji danych. Ta obserwacja prowadzi do dość szybkiej implementacji testów permutacyjnych.

Uwaga 1.1 ([A4] Remark 2.1). Dowolna permutacja procesów stochastycznych $\mathbf{X}_{ij}(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $i = 1,\dots,l$, $j = 1,\dots,n_i$, nie zmienia wartości sum $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$.

W pracy [A4] zaproponowaliśmy również testy oparte o losowe projekcje, których idea została zaczerpnięta z pracy [11]. Załóżmy, że $\mathcal{H}$ jest separowalną przestrzenią Hilberta wyposażoną w iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a μ rozkładem gaussowskim na przestrzeni $\mathcal{H}$ takim, że każda jego jednowymiarowa projekcja jest niezdegenerowana. Niech $\mathbf{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{ip})^\top$, $m_{ij} \in \mathcal{H}$, $i = 1,\dots,l$, $j = 1,\dots,p$, oraz $v_m \in \mathcal{H}$ będzie elementem losowym wybranym zgodnie z rozkładem μ dla $m = 1,\dots,p$. Prawdziwość hipotezy H_0 implikuje prawdziwość poniższej hipotezy zerowej:

$$H_0^{\mathbf{V}}: \begin{pmatrix}\langle v_1, m_{11}\rangle\\ \vdots\\ \langle v_p, m_{1p}\rangle\end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix}\langle v_1, m_{l1}\rangle\\ \vdots\\ \langle v_p, m_{lp}\rangle\end{pmatrix}$$

dla każdego $\mathbf{V} = (v_1,\dots,v_p)^\top \in \mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$. Jednak co można powiedzieć o hipotezie $H_0^{\mathbf{V}}$, gdy hipoteza H_0 nie jest prawdziwa? Odpowiedź kryje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.14 ([A4] Theorem 2.2). *Przy powyższych założeniach o $\mathcal{H}$ i μ, jeżeli $m_{ij} \in \mathcal{H}$, $i = 1,\dots,l$, $j = 1,\dots,p$, oraz istnieją r_1, r_2, s takie, że $m_{r_1 s} \neq m_{r_2 s}$, to $(\mu\times\cdots\times\mu)(\mathcal{A}) = 0$, gdzie $\mu\times\cdots\times\mu$ jest miarą produktową na przestrzeni $\mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$ oraz zbiór $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie wektory $\mathbf{V} = (v_1,\dots,v_p)^\top \in \mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$, dla których prawdziwa jest hipoteza $H_0^{\mathbf{V}}$.*

Twierdzenie 1.14 implikuje, że jeżeli hipoteza H_0 nie jest prawdziwa, to dla $(\mu\times\cdots\times\mu)$-prawie każdego $\mathbf{V}\in\mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$ hipoteza $H_0^{\mathbf{V}}$ również nie jest prawdziwa. Podsumowując, test statystyczny wielowymiarowej analizy wariancji dla wektorów losowych hipotezy $H_0^{\mathbf{V}}$ może zostać zastosowany w wielowymiarowej analizie wariancji dla danych funkcjonalnych. Zatem zakładając, że $\mathbf{X}_{ij}\in L_2^p(\mathcal{I})$, $i=1,\dots,l$, $j=1,\dots,n_i$, zaproponowaliśmy następującą procedurę testową:

1. Wybierz, zgodnie z rozkładem gaussowskim, funkcje $v_1,\dots,v_p$ w przestrzeni $L_2(\mathcal{I})$.
2. Oblicz $Y_{ijm}=\int_{\mathcal{I}}X_{ijm}(t)v_m(t)dt$ dla $i=1,\dots,l$, $j=1,\dots,n_i$, $m=1,\dots,p$.
3. Zastosuj test MANOVA do l prób $\mathbf{Y}_{ij}=(Y_{ij1},\dots,Y_{ijp})^\top$, $i=1,\dots,l$, $j=1,\dots,n_i$.

Aby wykonać krok 1, można wykorzystać rozkład gaussowskiego białego szumu lub ruchów Browna. W pracy [A4] zastosowaliśmy klasyczne testy MANOVA w kroku 3 procedury testowej, tj. test lambda Wilksa, test Lawleya-Hotellinga, test Pillaia oraz test Roya, ale można wykorzystać również inne testy.

Podobnie jak w pracy [11] zaobserwowaliśmy dwie główne wady tej procedury testowej. Po pierwsze, ponieważ funkcja jest zastępowana przez tylko jedną liczbę rzeczywistą, następuje pewna utrata informacji, co może powodować utratę mocy testu. Po drugie, skoro może się zdarzyć, że gdy przeprowadzimy procedurę testową dwukrotnie, hipoteza zerowa zostanie najpierw odrzucona, a później nie będzie podstaw do jej odrzucenia, akceptujemy pewną losową niestabilność tej procedury. W celu stabilizacji wyników testowania, jak w pracy [11], zaproponowaliśmy testowanie hipotezy zerowej dla każdej z $k>1$ projekcji, a następnie skorygowanie otrzymanych p-wartości, aby kontrolować frakcję fałszywych odkryć procedurą zaproponowaną w pracy [3]. Mianowicie wartość $\inf\{kp_{(i)}/i, i=1,\dots,k\}$ jest skorygowaną p-wartością, gdzie $p_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant p_{(k)}$ są uporządkowanymi p-wartościami k testów tej samej hipotezy zerowej. Ta korekta jest znacznie mniej konserwatywna niż korekta Bonferroniego, a ponadto jest ona mniej czasochłonna niż korekta metodą bootstrapową.

Pojawia się problem wyboru liczby k losowych projekcji. Badania symulacyjne w pracy [A4] wskazują, że większa liczba projekcji może zwiększyć moc testu, ale tempo wzrostu zależy od rozważanego przypadku. Zatem bazując na naszych doświadczeniach, zarekomendowaliśmy liczbę projekcji k około 30, ale w przypadkach wątpliwych (np. gdy p-wartość jest bliska poziomowi istotności), należy użyć większej liczby projekcji k.

Badania symulacyjne (oparte o dane sztucznie generowane oraz rzeczywiste i etykietowane wielowymiarowe szeregi czasowe) w pracy [A4] przedstawiają dobre własności większości proponowanych testów MANOVA dla danych funkcjonalnych. Jednak nie istnieje jeden test, który jest najlepszy. Niestety test oparty o losowe projekcje i test Roya nie jest rekomendowany, ponieważ nie kontroluje on poziomu błędu pierwszego rodzaju.

1.3.2 Analiza powtarzanych pomiarów [A5]

W pracy [A5] rozważałem problem dwóch prób danych funkcjonalnych, które zostały zaobserwowane na tych samych jednostkach eksperymentalnych (badanych w różnych warunkach). Jest to szczególny przypadek analizy powtarzanych pomiarów dla danych funkcjonalnych.

Korzystając z notacji wprowadzonej w pracy [22] przyjmijmy, że dysponujemy próbą danych funkcjonalnych złożoną z niezależnych procesów stochastycznych $X_1(t),\dots,X_n(t)$, które możemy wyrazić następująco:

$$X_i(t) = m(t) + \varepsilon_i(t),\ t \in [0, 2], \tag{1.4}$$

gdzie $\varepsilon_i(t)$ są funkcjami losowymi takimi, że $\mathbb{E}(\varepsilon_i(t)) = 0$ o funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s, t)$, $s, t \in [0, 2]$. Hipoteza zerowa przyjmuje postać:

$$H_0\colon m(t) = m(t + 1),\ t \in [0, 1].$$

Hipotezę H_0 w pracy [22] weryfikowano za pomocą następującej statystyki testowej:

$$\mathcal{C}_n = n \int_0^1 (\bar{X}(t) - \bar{X}(t + 1))^2 dt,$$

gdzie $\bar{X}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$, $t \in [0, 2]$. Rozkład tej statystyki przy prawdziwości hipotezy H_0 przybliżany był za pomocą metod bootstrapu nieparametrycznego i parametrycznego oraz metody permutacyjnej. Chociaż te metody wykazują dobre własności w przypadku prób skończonych, mogą być czasochłonne. W pracy [A5] rozważyłem przybliżenie metodą Boxa [5] zastosowaną do granicznego rozkładu statystyki $\mathcal{C}_n$ przy prawdziwości hipotezy H_0 oraz zaproponowałem nowy test oparty o to przybliżenie.

Badania teoretyczne wymagały sformułowania następujących założeń:

A1. Funkcja średnia $m(t) \in L^2[0, 2]$ i $\text{trace}(\mathbb{C}) = \int_0^2 \mathbb{C}(t, t)dt < \infty$, gdzie $L^2[0, 2]$ oznacza przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem określonych na przedziale $[0, 2]$.
A2. Funkcja efektu jednostki $v_1(t) = X_1(t) - m(t)$ spełnia warunek $\mathbb{E}\|v_1\|^4 = \mathbb{E}(\int_0^2 v_1^2(t)dt)^2 < \infty$.
A3. Dla każdego $t \in [0, 2]$, $\mathbb{C}(t, t) > 0$ oraz $\max_{t \in [0,2]} \mathbb{C}(t, t) < \infty$.
A4. Dla każdego $(s, t) \in [0, 2]^2$, $\mathbb{E}\left(v_1^2(s) v_1^2(t)\right) < C < \infty$, gdzie C jest pewną stałą niezależną od $(s, t) \in [0, 2]^2$.

Powyższe założenia są dość powszechne w literaturze analizy danych funkcjonalnych (patrz na przykład [34] i [36]). Założenie A1 gwarantuje, że przy $n \to \infty$, funkcja średnia z próby zbiega słabo do procesu gaussowskiego. Założenia A2-A4 są potrzebne, aby uzyskać zgodność estymatora funkcji kowariancji. Jednostajna ograniczoność wartości $\mathbb{E}\left(v_1^2(s) v_1^2(t)\right)$ w założeniu A4 jest spełniona, gdy funkcja $v_1(t)$ jest jednostajnie ograniczona według prawdopodobieństwa na przedziale $[0, 2]$.

Z Twierdzenia 1 w pracy [22] przy prawdziwości hipotezy H_0 otrzymujemy, że $\mathcal{C}_n \xrightarrow{d} \|\xi\|^2$ przy $n \to \infty$, gdzie $\xi(t), t \in [0, 1]$ jest procesem gaussowskim o zerowej funkcji średniej i funkcji kowariancji postaci:

$$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{C}(s, t) - \mathbb{C}(s, t + 1) - \mathbb{C}(s + 1, t) + \mathbb{C}(s + 1, t + 1),\ s, t \in [0, 1].$$

Udowodniłem, że $\|\xi\|^2$ ma taki sam rozkład jak suma $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k A_k$, gdzie $A_k \overset{i.i.d}{\sim} \chi_1^2$, $k = 1, 2, \ldots$ oraz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jest ciągiem wartości własnych funkcji $\mathbb{K}(s, t)$ spełniającym warunki $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r \geqslant \cdots \geqslant 0$ oraz $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^2 < \infty$. Zatem przy $n \to \infty$, mamy

$$\mathcal{C}_n \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0^* = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k A_k \tag{1.5}$$

przy prawdziwości hipotezy H_0 oraz założeń A1 i A3. Z zależności (1.5) wynika, że graniczny rozkład statystyki $\mathcal{C}_n$ przy prawdziwości hipotezy H_0 jest znany z wyjątkiem nieznanych wartości własnych λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ funkcji $\mathbb{K}(s,t)$. Estymujemy je wartościami własnymi $\hat{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ estymatora funkcji kowariancji $\mathbb{K}(s,t)$ postaci:

$$\hat{\mathbb{K}}(s,t) = \hat{\mathbb{C}}(s,t) - \hat{\mathbb{C}}(s,t+1) - \hat{\mathbb{C}}(s+1,t) + \hat{\mathbb{C}}(s+1,t+1), \ s,t \in [0,1],$$

gdzie $\hat{\mathbb{C}}(s,t) = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i(s) - \bar{X}(s))(X_i(t) - \bar{X}(t))$, $s,t \in [0,2]$ jest nieobciążonym estymatorem funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s,t)$. Udowodniłem, że estymator $\hat{\mathbb{K}}(s,t)$ jest zgodny w sensie poniższego lematu.

Lemat 1.3 ([A5] Lemma 2.1)**.** *W modelu* (1.4) *oraz przy założeniach A1-A4 mamy, że* $\hat{\mathbb{K}}(s,t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{K}(s,t)$ *jednostajnie na* $[0,1]^2$ *przy* $n \to \infty$.

Stosując przybliżenie typu Boxa, rozkład statystyki testowej $\mathcal{C}_n$ przy prawdziwości hipotezy H_0 przybliżamy rozkładem zmiennej losowej $\beta\chi_d^2$, gdzie $\beta = \mathrm{trace}(\mathbb{K}^{\otimes 2})/\mathrm{trace}(\mathbb{K})$ i $d = \mathrm{trace}^2(\mathbb{K})/\mathrm{trace}(\mathbb{K}^{\otimes 2})$, $\mathrm{trace}(\mathbb{K}) = \int_0^1 \mathbb{K}(t,t)dt$ oraz $\mathbb{K}^{\otimes 2} = \int_0^1 \mathbb{K}(s,u)\mathbb{K}(u,t)du$. Wykorzystałem następujące estymatory parametrów β i d:

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{trace}(\hat{\mathbb{K}}^{\otimes 2})}{\mathrm{trace}(\hat{\mathbb{K}})}, \qquad \hat{d} = \frac{\mathrm{trace}^2(\hat{\mathbb{K}})}{\mathrm{trace}(\hat{\mathbb{K}}^{\otimes 2})}.$$

Zatem obszar krytyczny nowego testu (testu BT) jest postaci $\{\mathcal{C}_n > \hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha} = \hat{\beta}\chi^2_{\hat{d},1-\alpha}\}$. Pokazałem zgodność estymatorów $\hat{\beta}$, $\hat{d}$ i $\hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha}$:

Twierdzenie 1.15 ([A5] Theorem 2.1)**.** *Przy założeniach Lematu 1.3 mamy, że* $\hat{\beta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta$ *i* $\hat{d} \xrightarrow{\mathbb{P}} d$ *przy* $n \to \infty$. *Ponadto* $\hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathcal{C}_{0,\alpha} = \beta\chi^2_{d,1-\alpha}$ *przy* $n \to \infty$.

Badałem graniczną moc testu BT przy założeniu prawdziwości dwóch rodzajów lokalnych hipotez alternatywnych. Rozważałem najpierw lokalne hipotezy alternatywne postaci $H_{1n}^{(1)} : m(t) - m(t+1) = n^{-\tau/2}d(t), t \in [0,1]$, gdzie $\tau \in [0,1)$ jest ustalone oraz $d(t)$ jest ustaloną funkcją rzeczywistą taką, że $\|d\| \in (0,\infty)$. Otrzymałem poniższy wynik przy założeniu, że obserwacje funkcjonalne są procesami gaussowskimi.

Twierdzenie 1.16 ([A5] Theorem 3.1)**.** *W modelu* (1.4)*, w którym* $X_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ *są procesami gaussowskimi, przy założeniach A1-A4 oraz prawdziwości lokalnych hipotez alternatywnych* $H_{1n}^{(1)}$, $\tau \in [0,1)$, *graniczna moc testu BT dąży do* 1 *przy* $n \to \infty$.

Niech $\Delta_r = \int_0^1 d(t)\phi_r(t)dt$, $r = 1, 2, \ldots$ oraz niech $\Delta_\lambda^2 = \sum_{r=1}^l \lambda_r\Delta_r^2$, gdzie $\phi_r(t)$ są funkcjami własnymi funkcji kowariancji $\mathbb{K}(s,t)$, a l jest liczbą jej dodatnich wartości własnych. Przy $H_{1n}^{(1)}$, gdy $\Delta_r = 0$ dla wszystkich $r = 1, \ldots, l$, graniczna moc testu BT jest postaci:

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n > \hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha}) = \mathbb{P}(\mathcal{C}_0^* > \mathcal{C}_{0,\alpha} - n^{1-\tau}\|d\|^2) + o(1)$$

przy $n \to \infty$, podczas gdy $\Delta_r \neq 0$ dla pewnego $r \in \{1, \ldots, l\}$, mamy

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n > \hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha}) = 1 - \Phi\left(\frac{\mathcal{C}_{0,\alpha} - \mathrm{trace}(\mathbb{K}) - n^{1-\tau}\|d\|^2}{\sqrt{2\mathrm{trace}(\mathbb{K}^{\otimes 2}) + 4n^{1-\tau}\Delta_\lambda^2}}\right) + o(1)$$

przy $n \to \infty$, gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$.

Rozważałem również lokalne hipotezy alternatywne postaci $H_{1n}^{(2)} : m(t) - m(t+1) = n^{-1/2}d(t), t \in [0,1]$. W tym przypadku nie zakładam, że obserwacje są procesami gaussowskimi, ale zbieżność granicznej mocy testu BT do 1 otrzymujemy, gdy informacja dostarczona przez funkcję $d(t)$ dąży do nieskończoności.

Twierdzenie 1.17 ([A5] Theorem 3.2)**.** *W modelu* (1.4)*, przy założeniach A1-A4 oraz prawdziwości lokalnych hipotez alternatywnych $H_{1n}^{(2)}$, przy $n \to \infty$, graniczna moc testu BT dąży do* 1*, gdy $\|d\| \to \infty$.*

Przy $H_{1n}^{(2)}$, graniczna moc testu BT przy $n \to \infty$ jest dana wzorem:

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n > \hat{\mathcal{C}}_{n,\alpha}) = \mathbb{P}(\mathcal{C}_0^* + 2\Delta_\lambda Y + \|d\|^2 > \mathcal{C}_{0,\alpha}) + o(1),$$

gdzie $Y = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r^{1/2} \Delta_r Y_r / \Delta_\lambda \sim N(0,1)$ oraz $Y_r \sim N(0,1)$.

Eksperymenty numeryczne w pracy [A5] wskazują, że test BT jest znacznie mniej wymagający obliczeniowo niż testy bootstrapowe i permutacyjne rozważane w pracy [22]. Ponadto test BT jest porównywalny z tymi testami w terminach kontroli poziomu błędu pierwszego rodzaju i mocy. Wszystkie te testy bardzo dobrze kontrolują poziom tego błędu i mają satysfakcjonującą moc.

1.3.3 Ogólna hipoteza liniowa [A6]

W pracy [A6] rozważaliśmy metody wnioskowania statystycznego w problemie testowania ogólnej hipotezy liniowej (GLHT) dla danych funkcjonalnych, którego szczególnymi przypadkami są analiza wariancji, testy post hoc i analiza kontrastów.

Użyjemy notacji wprowadzonej w Sekcji 5.3.3 książki [34]. Niech $T = [a,b], a,b \in \mathbb{R}$ oraz $SP(\eta,\gamma)$ oznacza proces stochastyczny o funkcji średniej $\eta(t)$, $t \in T$ i funkcji kowariancji $\gamma(s,t)$, $s,t \in T$. Załóżmy, że dysponujemy k próbami funkcji losowych $x_{i1}(t), \dots, x_{in_i}(t)$, $t \in T$, które są niezależnymi procesami stochastycznymi $SP(\eta_i,\gamma)$, $i = 1,\dots,k$. Niech $n = n_1 + \dots + n_k$. Rozważamy ogólną hipotezę liniową postaci $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{c}(t)$ dla każdego $t \in T$, przeciwko $H_1 : \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) \neq \mathbf{c}(t)$ dla pewnego $t \in T$, gdzie $\mathbf{C}$ jest znaną macierzą współczynników wymiaru $q \times k$ i pełnego rzędu wierszowego, $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_k(t))^\top$, a $\mathbf{c}(t)$ jest znanym wektorem funkcji wymiaru $q \times 1$.

Wykorzystamy następujące założenia i notację (patrz podrozdział 1.3.2 oraz [35]). Oznaczmy przez $L^2(T)$ (odpowiednio $C^\beta(T)$) zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem (odpowiednio funkcji spełniających warunek Höldera z wykładnikiem $\beta \in (0,1]$) określonych na przedziale T.

A1. Funkcje średnie $\eta_i(t) \in L^2(T), i = 1,\dots,k$ oraz $\mathrm{trace}(\gamma) = \int_T \gamma(t,t)dt < \infty$.
A2. Funkcje efektów jednostek $v_{ij}(t) = x_{ij}(t) - \eta_i(t), j = 1,\dots,n_i, i = 1,\dots,k$ są i.i.d.
A3. Wielkości prób spełniają warunki $n_i/n \to \tau_i \in (0,1), i = 1,\dots,k$.
A4. $\mathbb{E}\|v_{11}\|^4 = \mathbb{E}\left(\int_T v_{11}^2(t)dt\right)^2 < \infty$
A5. Dla każdego $t \in T$, $\gamma(t,t) > 0$ oraz $\rho = \max_{t\in T} \gamma(t,t) < \infty$.
A6. Dla każdego $t \in T$, $\gamma(t,t) > 0$ oraz $\gamma \in C^{2\beta}(T^2)$, gdzie $2\beta \in (0,1]$.
A7. Dla każdego $(s,t) \in T^2$, $\mathbb{E}\left(v_{11}^2(s)v_{11}^2(t)\right) < C < \infty$, gdzie C jest pewną stałą niezależną od $(s,t) \in T^2$.

Niech $GP_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Gamma})$ oznacza p-wymiarowy proces gaussowski o funkcji średniej $\boldsymbol{\mu}(t), t \in T$ oraz funkcji kowariancji $\boldsymbol{\Gamma}(s,t), (s,t) \in T^2$. Ponadto niech $X \stackrel{d}{=} Y$ oznacza, że zmienne losowe X i Y mają ten sam rozkład.

Nieobciążonymi estymatorami funkcji $\eta_i(t)$ i $\gamma(s,t)$ są $\hat{\eta}_i(t) = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}(t)$, $i = 1,\ldots,k$ oraz

$$\hat{\gamma}(s,t) = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}(s) - \hat{\eta}_i(s))(x_{ij}(t) - \hat{\eta}_i(t))$$

odpowiednio. Niech $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = (\hat{\eta}_1(t),\ldots,\hat{\eta}_k(t))^\top$ oraz $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(n_1^{-1},\ldots,n_k^{-1})$. Rozważaliśmy następujące punktowe sumy kwadratów

$$\mathrm{SSH}_n(t) = [\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) - \mathbf{c}(t)]^\top \left(\mathbf{CDC}^\top\right)^{-1} [\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) - \mathbf{c}(t)]$$

oraz $\mathrm{SSE}_n(t) = (n-k)\hat{\gamma}(t,t)$ dla hipotezy i błędu odpowiednio. W celu weryfikacji hipotezy H_0 Zhang [34] zaproponował test L^2 i test typu F bazujące na statystykach testowych postaci

$$T_n = \int_T \mathrm{SSH}_n(t)dt, \quad F_n = \frac{\int_T \mathrm{SSH}_n(t)dt/q}{\int_T \mathrm{SSE}_n(t)dt/(n-k)}$$

odpowiednio, ale nie rozważał ich własności granicznych ani empirycznych. W pracy [A6] dokonaliśmy adaptacji zglobalizowanego punktowego testu F wprowadzonego w pracy [36] (test GPF) oraz testu $F_{\max}$ rozważanego w artykule [35] (test Fmax) do problemu GLHT. Ich statystyki testowe konstruujemy następująco:

$$\mathrm{GPF}_n = \int_T \frac{\mathrm{SSH}_n(t)/q}{\mathrm{SSE}_n(t)/(n-k)}dt, \quad \mathrm{Fmax}_n = \sup_{t\in T}\left\{\frac{\mathrm{SSH}_n(t)/q}{\mathrm{SSE}_n(t)/(n-k)}\right\}$$

odpowiednio. Graniczne rozkłady tych statystyk testowych przy prawdziwości hipotezy H_0 są podane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.18 ([A6] Theorem 1)**.** *Przy założeniach A1-A5 i A7 dla pierwszego wyrażenia we wzorze* (1.6) *oraz A1-A4 i A6-A7 dla drugiego wyrażenia w tym wzorze, oraz przy prawdziwości hipotezy* $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{c}(t)$ *dla każdego* $t \in T$*, mamy*

$$GPF_n \xrightarrow{d} GPF_0 \overset{d}{=} \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^* A_r, \quad Fmax_n \xrightarrow{d} Fmax_0 \overset{d}{=} \sup_{t\in T}\left\{\frac{1}{q}\mathbf{w}(t)^\top\mathbf{w}(t)\right\} \tag{1.6}$$

przy $n\to\infty$*,* $A_1, A_2, \ldots$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* χ_q^2*,* $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots$ *są uporządkowanymi nierosnąco wartościami własnymi funkcji kowariancji* $\gamma_*(s,t) = \gamma(s,t)/\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}$ *oraz* $\mathbf{w}(t) \sim GP_q(\mathbf{0}, \gamma_*\mathbf{I}_q)$.

Z Twierdzenia 1.18 wynika, że graniczne rozkłady statystyk GPF_n i Fmax_n przy prawdziwości hipotezy H_0 są niezależne od macierzy $\mathbf{C}$ oraz funkcji $\mathbf{c}$ z wyjątkiem liczby q. Rozważane testy oparte o statystyki GPF_n i Fmax_n są również niezmiennicze względem przekształceń kontrastowych, tj. gdy macierz $\mathbf{C}$ i funkcja $\mathbf{c}(t)$ są zastąpione przez macierz $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{PC}$ i funkcję $\widetilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{Pc}(t)$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą nieosobliwą wymiaru $q\times q$. Ta własność jest ważna w problemie GLHT z macierzą kontrastów $\mathbf{C}$, ponieważ taka macierz nie jest wyznaczona jednoznacznie.

Aby przybliżyć rozkład statystyki GPF_n przy prawdziwości hipotezy H_0, użyliśmy najpierw przybliżenia typu Boxa oraz wyniku Twierdzenia 1.18. Mianowicie ten rozkład został przybliżony rozkładem zmiennej losowej $\hat{\beta}_*\chi^2_{\hat{d}_*}$, gdzie

$$\hat{\beta}_* = \frac{(n-k-2)\mathrm{trace}\,(\hat{\gamma}_*^{\otimes 2})}{q(n-k)(b-a)}, \quad \hat{d}_* = \frac{q(n-k)^2(b-a)^2}{(n-k-2)^2\mathrm{trace}\,(\hat{\gamma}_*^{\otimes 2})},$$

$\hat{\gamma}_*(s,t) = \hat{\gamma}(s,t)/\sqrt{\hat{\gamma}(s,s)\hat{\gamma}(t,t)}$ jest estymatorem funkcji kowariancji $\gamma_*(s,t)$ i $\xi^{\otimes 2}(s,t) = \int_T \xi(s,u)\xi(u,t)du$. Stąd obszar krytyczny testu GPF jest postaci $\{\mathrm{GPF}_n > \mathrm{GPF}_{n,\alpha} = \hat{\beta}_* \chi^2_{\hat{d}_*,1-\alpha}\}$. Estymatory $\hat{\beta}_*$, $\hat{d}_*$ i $\mathrm{GPF}_{n,\alpha}$ są zgodne przy założeniach A1-A5 i A7.

Druga metoda przybliżania rozkładów statystyk GPF_n i Fmax_n przy prawdziwości hipotezy H_0 to metoda bootstrapu nieparametrycznego. Bazuje ona na estymatorach $\hat{v}_{ij}(t) = x_{ij}(t) - \hat{\eta}_i(t), j = 1,\dots,n_i, i = 1,\dots,k$, funkcji efektu jednostek. Niech $\hat{v}^b_{ij}(t), j = 1,\dots,n_i, i = 1,\dots,k$ będą k próbami bootstrapowymi wylosowanymi ze zwracaniem spośród funkcji $\hat{v}_{ij}(t), j = 1,\dots,n_i, i = 1,\dots,k$. Niech GPF^b_n i Fmax^b_n oznaczają wartości statystyk testowych obliczone dla prób bootstrapowych przyjmując $\mathbf{c} \equiv \mathbf{0}$, aby odpowiednio uwzględnić hipotezę zerową. Udowodniliśmy ważność procedury bootstrapu nieparametrycznego:

Twierdzenie 1.19 ([A6] Theorem 2)**.** *Przy założeniach A1-A5 i A7 (odpowiednio A1-A4 i A6-A7), warunkowy rozkład statystyki GPF^b_n (odpowiednio $Fmax^b_n$) dąży słabo do rozkładu zmiennej losowej GPF_0 (odpowiednio $Fmax_0$) danej w Twierdzeniu 1.18 według prawdopodobieństwa dla każdego $\boldsymbol{\eta}$, przy $n \to \infty$.*

W pracy [A6] rozważaliśmy również graniczną moc testów GPF i Fmax przy założeniu prawdziwości lokalnych hipotez alternatywnych postaci $H_{1n} : \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{c}(t) = n^{-1/2}\mathbf{d}(t)$, gdzie $\mathbf{d}(t) = (d_1(t),\dots,d_q(t))^\top$ jest ustalonym wektorem funkcji rzeczywistych, niezależnych od n oraz $\|d_i\| \in (0,\infty)$.

Twierdzenie 1.20 ([A6] Theorem 3)**.** *Niech $\delta^2 = \int_T \mathbf{d}(t)^\top(\mathbf{C}\mathbf{D}_\tau\mathbf{C}^\top)^{-1}\mathbf{d}(t)/\gamma(t,t)dt$, gdzie $\mathbf{D}_\tau = \mathrm{diag}(\tau_1^{-1},\dots,\tau_k^{-1})$. Przy założeniu prawdziwości lokalnych hipotez alternatywnych $H_{1n} : \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{c}(t) = n^{-1/2}\mathbf{d}(t)$ oraz*

1. *założeniach A1-A5 i A7, przy $n \to \infty$, graniczna moc testu GPF jak również moc testu GPF opartego o metodę bootstrapu nieparametrycznego dąży do* 1 *przy $\delta \to \infty$.*
2. *założeniach A1-A4 i A6-A7, przy $n \to \infty$, moc testu Fmax opartego o metodę bootstrapu nieparametrycznego dąży do* 1 *przy $\delta \to \infty$.*

W pracy [A6] uzyskaliśmy także graniczne własności testu L^2 i testu typu F zaproponowanych w książce [34], jak również ich własności w przypadku prób skończonych, które nie były rozważane w tej książce. Jednak sformułowania tych granicznych własności są podobne do sformułowań Twierdzeń 1.19 i 1.20, więc je pomijamy.

Chociaż graniczne własności testów zaproponowanych w pracach [A6] i [34] są bardzo podobne, ich własności w przypadku prób skończonych mogą być bardzo różne jak sugerują badania symulacyjne w pracy [A6]. Eksperymenty symulacyjne zostały przeprowadzone dla różnie skorelowanych gęstych i rzadkich danych funkcjonalnych przy braku lub występowaniu błędów pomiarów lub braków danych. Testy zaproponowane w pracy [A6] zazwyczaj lepiej kontrolują poziom błędu pierwszego rodzaju niż testy rozważane w książce [34]. Moc testów jest zróżnicowana głównie przez wielkość korelacji występującej w danych funkcjonalnych. W przypadku średnio i mocno skorelowanych gęstych danych funkcjonalnych oraz mocno skorelowanych rzadkich danych funkcjonalnych, test Fmax ma większą moc niż test GPF, który z kolei może mieć większą moc niż test L^2 i test typu F. Gdy gęste dane funkcjonalne są mniej skorelowane, zachodzi sytuacja odwrotna. W przypadku średnio i słabo skorelowanych rzadkich danych funkcjonalnych, wszystkie testy mają podobną moc, ale test Fmax może charakteryzować się trochę mniejszą mocą. Zatem testy Fmax i GPF są preferowane względem testów Zhanga [34], ponieważ dane funkcjonalne są zazwyczaj średnio i mocno skorelowane.

Rozdział 2

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Moje pozostałe osiągnięcia naukowe zostały opublikowane w 25 artykułach naukowych. Ich lista jest podana poniżej. Wyniki tych prac przedstawiam w podrozdziałach 2.1-2.4, zgodnie z ich tematyką.

Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie JCR

Prace przed doktoratem

[B1] Katulska, K., Smaga, Ł. (2012). D-optimal chemical balance weighing designs with $n \equiv 0 \pmod 4$ and 3 objects. Communications in Statistics - Theory and Methods 41, 2445–2455.

[B2] Katulska, K., Smaga, Ł. (2013). D-optimal chemical balance weighing designs with autoregressive errors. Metrika 76, 393–407.

Prace po doktoracie

[B3] Smaga, Ł. (2014). Necessary and sufficient conditions in the problem of D-optimal weighing designs with autocorrelated errors. Statistics & Probability Letters 92, 12–16.

[B4] Jasiczak, J., Kanoniczak, M., Smaga, Ł. (2014). Statistical division of compressive strength results on the aspect of concrete family concept. Computers and Concrete 14, 145–161.

[B5] Jasiczak, J., Kanoniczak, M., Smaga, Ł. (2015). Stochastic identity of test result series of the compressive strength of concrete in industrial production conditions. Archives of Civil and Mechanical Engineering 15, 584–592.

[B6] Smaga, Ł. (2015). Uniquely E-optimal designs with $n \equiv 2 \pmod 4$ correlated observations. Linear Algebra and its Applications 473, 297–315.

[B7] Górecki, T., Smaga, Ł. (2015). A comparison of tests for the one-way ANOVA problem for functional data. Computational Statistics 30, 987–1010.

[B8] Katulska, K., Smaga, Ł. (2016). D-optimal and highly D-efficient designs with non-negatively correlated observations. Kybernetika 52, 575–588.

[B9] Smaga, Ł. (2016). A note on D-optimal chemical balance weighing designs with autocorrelated observations. Statistical Papers 57, 721–730.

[B10] Katulska, K., Smaga, Ł. (2017). On highly D-efficient designs with non-negatively correlated observations. REVSTAT - Statistical Journal 15, 443–453.
[B11] Smaga, Ł. (2017). E-optimal and highly E-efficient designs with $n \equiv 3 \pmod 4$ correlated observations. Linear and Multilinear Algebra 65, 2293–2305.
[B12] Smaga, Ł., Matsui, H. (2018). A note on variable selection in functional regression via random subspace method. Statistical Methods and Applications 27, 455–477.
[B13] Krzyśko, M., Smaga, Ł. (2018). Robust estimation in canonical correlation analysis for multivariate functional data. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (przyjęta do druku) DOI:10.15672/HJMS.2018.613
[B14] Górecki, T., Smaga, Ł. (2018). fdANOVA: An R software package for analysis of variance for univariate and multivariate functional data. Computational Statistics (przyjęta do druku) DOI:10.1007/s00180-018-0842-7

Publikacje naukowe w czasopismach innych niż znajdujące się w bazie JCR

Prace przed doktoratem

[B15] Katulska, K., Smaga, Ł. (2010). On some construction of D-optimal chemical balance weighing designs. Colloquium Biometricum 40, 155–164.
[B16] Katulska, K., Smaga, Ł. (2011). D-optimal biased chemical balance weighing designs. Colloquium Biometricum 41, 143–153.
[B17] Katulska, K., Smaga, Ł. (2012). On some D-optimal chemical balance weighing design with $n \equiv 2 \pmod 4$. Colloquium Biometricum 42, 67–75.

Prace po doktoracie

[B18] Katulska, K., Smaga, Ł. (2013). A note on D-optimal chemical balance weighing designs and their applications. Colloquium Biometricum 43, 37–45.
[B19] Katulska, K., Smaga, Ł. (2014). A note on D-efficiency of biased chemical balance weighing designs. Colloquium Biometricum 44, 25–34.
[B20] Jasiczak, J., Kanoniczak, M., Smaga, Ł. (2014). Normowe pojęcie rodzina betonów na przykładzie ciągłej produkcji płyt Spiroll. Budownictwo i Architektura 13, 99–108.
[B21] Smaga, Ł. (2016). A note on the D-optimality and D-efficiency of nonorthogonal blocked main effects plans. Biometrical Letters 53, 119–131.
[B22] Krzyśko, M., Smaga, Ł. (2017). An application of functional multivariate regression model to multiclass classification. Statistics in Transition new series 18, 433–442.
[B23] Jasiczak, J., Kanoniczak, M., Smaga, Ł. (2017). Division of series of concrete compressive strength results into concrete families in terms of seasons within annual work period. Journal of Computer Engineering & Information Technology 6:6. DOI: 10.4172/2324-9307.1000187
[B24] Smaga, Ł. (2017). A two-sample test based on cluster subspaces for equality of mean vectors in high dimension. Discussiones Mathematicae Probability and Statistics 37, 147–156.
[B25] Krzyśko, M., Smaga, Ł. (2018). Selected robust logistic regression specification for classification of multi-dimensional functional data in presence of outliers. Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica 2 (334), 53–66.

2.1 Analiza danych funkcjonalnych

W pracach [B7], [B12], [B13], [B14], [B22] i [B25] rozważałem różne zagadnienia analizy danych funkcjonalnych.

W artykułach [B7] i [B14] rozważaliśmy funkcjonalną analizę wariancji dla jednowymiarowych (FANOVA) i wielowymiarowych danych (FMANOVA). W tej analizie testuje się hipotezę o równości funkcji średnich w l grupach scharakteryzowanych przez dane funkcjonalne. W pracy [B7] zaproponowaliśmy testy FANOVA oparte o reprezentację bazową tych danych, których idea jest podobna do testów rozważanych w artykule [A4]. Ponadto dokonaliśmy przeglądu istniejących testów FANOVA. Testy zostały także porównane względem kontroli błędu pierwszego rodzaju oraz mocy za pomocą badań symulacyjnych bazujących na rzeczywistych, etykietowanych szeregach czasowych oraz danych sztucznie generowanych. Wyniki symulacji sugerują, że testy nie mają takich samych własności i nie ma jednego testu, który jest najlepszy. Gdy dane funkcjonalne obserwowane są na średniej lub dużej siatce punktów czasowych, test Zhanga i Lianga [36] oraz jeden z nowych testów (test FP) wydają się być najlepsze. Gdy dane funkcjonalne obserwowane są na małej siatce punktów czasowych, test FP lub pewne inne nowe testy są najlepsze, w zależności od struktury danych. Wreszcie, jeden z nowych testów oraz test z pracy [13] są zazwyczaj zbyt liberalne i nie mogą być rekomendowane. W pracy [B14] rozszerzyliśmy badania symulacyjne w artykule [B7] przez rozważenie również innych testów FANOVA, jak i pewnych nowych wariantów i własności testów FMANOVA zaproponowanych w pracy [A4]. Odnotowaliśmy, że te testy FMANOVA są niezmiennicze względem zmiany skali danych funkcjonalnych, co implikuje, że mogą one być wykorzystane w przypadku, gdy składowe wielowymiarowych danych funkcjonalnych są mierzone w różnych jednostkach. Ponadto wprowadziliśmy nowy pakiet fdANOVA programu R, w którym testy FANOVA i FMANOVA zostały zaimplementowane. Oceniliśmy numerycznie również efektywność zrównoleglenia implementacji w pakiecie.

W pracach [B22] i [B25] rozważaliśmy odpowiednio wieloklasową i binarną klasyfikację wielowymiarowych danych funkcjonalnych. W artykule [B22], rozpatrywaliśmy funkcjonalny wielowymiarowy model regresji o skalarnych zmiennych zależnych i funkcjonalnych predyktorach. Rozważaliśmy dwie wersje tego modelu, tj. z i bez wyrazu wolnego. Korzystając z reprezentacji bazowej predyktorów i współczynników regresji, ten model reprezentujemy jako wielowymiarowy model regresji, w którym macierz modelu (parametrów) składa się ze współczynników reprezentacji bazowej predyktorów (współczynników regresji). Ta reprezentacja została wykorzystana do konstrukcji reguł klasyfikacyjnych dla wielowymiarowych danych funkcjonalnych. Eksperymenty numeryczne na sześciu rzeczywistych i etykietowanych zbiorach danych wskazują na dobre własności proponowanych metod klasyfikacji. Ponadto model z wyrazem wolnym jest preferowany. W pracy [B25] rozważaliśmy binarną klasyfikację wielowymiarowych danych funkcjonalnych wykorzystując funkcjonalny model regresji logistycznej. Górecki i in. [15] rozpatrywali ten problem biorąc pod uwagę różne funkcjonalne modele regresji i ustalili, że model regresji logistycznej ma najlepsze własności. Jednak do estymacji użyli standardowej metody największej wiarogodności, która może dawać gorsze wyniki w obecności obserwacji odstających. To prawdopodobnie wpływa negatywnie na proces klasyfikacji. W pracy [B25] zaproponowaliśmy rozszerzenie metod z pracy [15]. Dokładnej, rozważyliśmy bardziej ogólną reprezentację bazową funkcjonalnego modelu regresji logistycznej, w której wykorzystać można także bazy nieortogonalne, a ponadto użyliśmy odporne metody estymacji w modelu regresji logistycznej. Wyniki numeryczne wskazują, że nowe klasyfikatory mają mniejszy błąd klasyfikacji niż te zaproponowane w pracy [15] w przypadku występowania obserwacji odstających.

W pracy [B12] rozważaliśmy zagadnienie wyboru zmiennych w funkcjonalnym modelu regresji o skalarnej zmiennej zależnej i funkcjonalnych predyktorach. Wykorzystując reprezentację bazową funkcjonalnych predyktorów, ten model można reprezentować przez model regresji wielokrotnej. Korzystając z tego modelu i metody losowych podprzestrzeni (RSM) zaproponowanej w pracy [26], skonstruowaliśmy dwie procedury wyboru zmiennych. W Algorytmie 1 zastosowaliśmy procedurę RSM w zrekonstruowanym modelu traktując współczynniki reprezentacji bazowej jako nowe zmienne, zwane zmiennymi reprezentacji bazowej. Zmienne reprezentacji bazowej wybrane przez procedurę RSM wskazują, które zmienne funkcjonalne należy wybrać. Algorytm 1 może być wykorzystany przy dowolnej liczbie funkcjonalnych predyktorów i prawie każdym parametrze ucięcia w reprezentacji bazowej. To odróżnia tę metodę od metod znanych w literaturze. W Algorytmie 2 zastosowaliśmy tylko trzy pierwsze kroki procedury RSM do zrekonstruowanego modelu. Otrzymane wyniki dla zmiennych reprezentacji bazowej odpowiadające różnym funkcjonalnym predyktorom są sumowane. W ten sposób, agregujemy informację o tych predyktorach ze zmiennych reprezentacji bazowej. Sortując te sumy, konstruujemy zagnieżdżoną listę modeli. Badania symulacyjne i rzeczywisty przykład w pracy [B12] pokazują bardzo satysfakcjonujące własności Algorytmów 1 i 2 oraz sugerują, że są one lepsze niż procedura rozważana w pracy [10], grupowe lasso oraz grupowy SCAD [25], w terminach poprawnie wybranego modelu, frakcji fałszywych odkryć i błędu predykcji.

W artykule [B13] rozważano analizę korelacji kanonicznych wielowymiarowych danych funkcjonalnych (MFCCA). Jej celem jest identyfikacja i ilościowe określenie relacji między p-wymiarowym procesem stochastycznym $\mathbf{X}(s)$ i q-wymiarowym procesem stochastycznym $\mathbf{Y}(t)$. Relacje między $\mathbf{X}(s)$ i $\mathbf{Y}(t)$ są mierzone jako korelacje między kombinacjami liniowymi składowych procesów. Analiza korelacji kanonicznych dla jednowymiarowych danych funkcjonalnych została opisana w monografii [29]. Górecki i in. [16] rozszerzyli tę analizę na przypadek wielowymiarowych danych funkcjonalnych. Ich metoda bazuje na reprezentacji danych funkcjonalnych w bazie ortonormalnej oraz estymatorze macierzy kowariancji z próby, co może negatywnie wpłynąć na analizę korelacji kanonicznych. Mianowicie pewne bazy nieortogonalne mogą być bardziej odpowiednie dla szczególnego typu danych oraz klasyczny estymator macierzy kowariancji może być wrażliwy na odstępstwa od normalność danych, jak i występowanie obserwacji odstających. W pracy [B13] rozszerzyliśmy MFCCA z pracy [16], aby było możliwe użycie baz nieortogonalnych, oraz rozważyliśmy odporne metody estymacji macierzy kowariancji w tej analizie. Badania symulacyjne i analiza punktu załamania sugerują, że zaproponowane modyfikacje MFCCA mogą mieć lepsze własności niż metoda klasyczna w przypadku odstępstw od normalności danych oraz występowania obserwacji odstających.

2.2 Optymalne układy eksperymentalne

W pracach [B1]-[B3], [B6], [B8]-[B11], [B15]-[B19] i [B21] rozważałem optymalne układy eksperymentalne, głównie chemiczne układy wagowe względem kryterium D-optymalności przy różnych postaciach macierzy kowariancji błędów losowych. Przedstawię tylko przykładowe wyniki, aby zilustrować rezultaty tych artykułów. W pracach [B1]-[B3], [B9] i [B15]-[B18] przedstawione są głównie wyniki zawarte w mojej rozprawie doktorskiej.

Modelem chemicznego układu wagowego jest model liniowy postaci $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ jest wektorem obserwacji, $\mathbf{X} = (x_{ij})$ jest macierzą wymiaru $n \times p$ ($n \geqslant p$) taką, że $x_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ i $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = p$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p)^\top$ jest wektorem nieznanych parametrów oraz $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)^\top$ jest wektorem błędów losowych, $\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_n$ i $\mathrm{Cov}(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{G}$, $\sigma > 0$ jest nieznanym parametrem, a $\mathbf{G} > 0$ jest znaną macierzą wymiaru $n \times n$. Klasę takich układów oznaczamy przez $\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1, 0, 1\})$. Problemem jest wyznaczenie najlepszego układu w sensie pewnego kryterium, np. $\mathbf{X}$ jest A-optymalny gdy $\mathrm{trace}(\mathbf{X}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$ jest minimalny, $\mathbf{X}$ jest D-optymalny gdy $\det(\mathbf{X}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X})$ jest maksymalny, $\mathbf{X}$ jest E-optymalny gdy najmniejsza wartość własna macierzy $\mathbf{X}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}$ jest maksymalna. Te kryteria mają sensowną interpretację [B6]. Układy optymalne zależą od postaci macierzy $\mathbf{G}$. Zatem są one konstruowane osobno dla różnych postaci tej macierzy.

W pracach [B1]-[B3], [B9], [B15]-[B17] i [B19] rozważałem D-optymalność i D-efektywność układów przy błędach losowych tworzących proces autoregresyjny rzędu pierwszego, rozszerzając wyniki z prac [21] i [31]. Mianowicie $\mathbf{G} = (1-\rho^2)^{-1}(\rho^{|i-j|})_{i,j=1}^n$, gdzie $\rho \in (-1, 1)$. W tym przypadku, układy D-optymalne zależą od znaku parametru ρ:

Twierdzenie 2.1 ([B9] Theorem 2 i Corollary 1)**.** *Załóżmy, że* $n \equiv 0\ (mod\ 4)$, $\mathbf{G} = (1-\rho^2)^{-1}(\rho^{|i-j|})_{i,j=1}^n$ *i* $\rho \in [0, 1)$ *gdy* $n = 4, 8, \ldots, 28$, *oraz* $\rho \in [0, \eta)$ *gdy* $n = 32, 36, \ldots$, *gdzie* η *jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem wielomianu postaci:*

$$\begin{aligned} p(\rho) =&(7n^2 - 22n - 48)\rho^5 - (n^3 - 41n^2 + 124n + 240)\rho^4 - (3n^3 - 89n^2 + 246n + 528)\rho^3 \\ &- (3n^3 - 87n^2 + 192n + 592)\rho^2 - (n^3 - 40n^2 + 56n + 320)\rho + 8n^2 - 64. \end{aligned}$$

Wtedy układ

$$\widetilde{\mathbf{X}}^\top = \begin{cases} \begin{bmatrix} <n>^+ \\ <n/2>^+<n/2>^- \\ <n/4>^+<n/2>^+<n/4>^- \end{bmatrix} & \textit{jeżeli } \frac{n}{4} = 2k-1, \\ \begin{bmatrix} <n>^+ \\ <n/2>^+<n/2>^- \\ <n/4>^+<n/2>^-<n/4>^+ \end{bmatrix} & \textit{jeżeli } \frac{n}{4} = 2k, \end{cases}$$

gdzie $<t>^+ = [(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \ldots, (-1)^{t+1}]$, $<t>^- = [(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \ldots, (-1)^t]$, *i* $k = 1, 2, \ldots$ *jest D-optymalny w klasie* $\mathcal{M}_{n\times 3}(\{-1, 1\})$.

Twierdzenie 2.2 ([B3] Theorem 7)**.** *Załóżmy, że* $n \equiv 0\ (mod\ 4)$, $\mathbf{G} = (1-\rho^2)^{-1}(\rho^{|i-j|})_{i,j=1}^n$ *oraz* $\rho \in (-1, 0]$. *Wtedy układ*

$$\hat{\mathbf{X}}^\top = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1_1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1_2 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1_3 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie elementy o indeksach $1, 2, 3$ *znajdują się na pozycjach* $(n/2 + 1, 2), (n/4 + 1, 3)$ *i* $(3n/4 + 1, 3)$ *odpowiednio, jest D-optymalny w klasie* $\mathcal{M}_{n\times 3}(\{-1, 1\})$.

W artykułach [B8], [B10] i [B18] zawarte zostały wyniki odnośnie D-optymalności i D-efektywności układów, gdy $\mathbf{G} = (1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$, $\rho \in [0, 1)$. Wspomnę tu jedynie o D-efektywności układów, która jest zdefiniowana jak następuje [7]:

$$\text{D-eff}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\det(\mathbf{X}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X})}{\max_{\mathbf{Y}\in\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,1\})}\det(\mathbf{Y}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y})}\right]^{1/p}.$$

Niestety $\max_{\mathbf{Y}\in\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,1\})}\det(\mathbf{Y}^\top\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y})$ jest zazwyczaj nieznane. Jednak w pracy [B8] udowodniliśmy następujące dolne ograniczenie D-efektywności D-eff$(\mathbf{X})$:

$$\text{D}^*\text{-eff}(\mathbf{X}) = \frac{[\det(\mathbf{X}^\top(\mathbf{I}_n - r\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top)\mathbf{X})]^{1/p}}{n},$$

gdzie $r = \rho/(1 + (n-1)\rho)$. To dolne ograniczenie D-efektywności jest rodzajem miary, która podaje na ile dany układ różni się (w sensie kryterium D-optymalności) od regularnego układu D-optymalnego (tj. układu $\mathbf{X}_*$, dla którego D-eff$(\mathbf{X}_*) = 1$). Wykorzystaliśmy ją, aby pokazać, że pewne układy mają wysoką D-efektywność w przypadkach, gdy regularny układ D-optymalny nie istnieje. Przykład takiego wyniku przedstawia się następująco: Niech $n \equiv 1 \pmod 4), n \geqslant 5$. Załóżmy, że $\mathbf{H}_{n-1} = (\mathbf{1}_{n-1}, \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-2})$ jest macierzą Hadamarda rozmiaru $n-1$ oraz $\mathbf{k}_i = (\mathbf{h}_i^\top, 1)^\top$ dla $i = 1, \ldots, n-2$. W pracy [23] pokazano, że układ $\mathbf{K}$ złożony z p kolumn spośród $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-2}$, jest D-optymalny przy każdym $\rho > 0$ w podklasie $\{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,1\}) : \mathbf{X}^\top\mathbf{X} = (n-1)\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^\top\}$. Udowodniliśmy, że układ $\mathbf{K}$ ma wysoką D-efektywność w całej klasie układów $\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,1\})$:

Twierdzenie 2.3 ([B8] Theorem 3.2)**.** *Niech $n \equiv 1$ (mod 4), $n \geqslant 5$, $p = 2, \ldots, n-2$, $\mathbf{G} = (1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$ oraz $\rho \in (0,1)$. Wtedy,* D*-eff$(\mathbf{K})$ *maleje wraz ze wzrostem ρ. Ponadto* D*-eff$(\mathbf{K})$ *jest większe niż* 0.93.

W pracach [B6] i [B11] również założyłem, że $\mathbf{G} = (1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$, $\rho \in [0,1)$, ale rozważałem E-optymalność i E-efektywność układów. W tych pracach uzupełniłem wyniki z pracy [24] o układy E-optymalne w klasie $\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,0,1\})$ dla $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. Przykładowo, główny wynik podany w pracy [B6] jest następujący:

Twierdzenie 2.4 ([B6] Theorem 5)**.** *Załóżmy, że $\rho \in (0,1), n \equiv 2$ (mod 4), $p \geqslant 3, n \geqslant p+1$ oraz $\mathbf{G} = (1-\rho)\mathbf{I}_n + \rho\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$. Każdy układ $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,0,1\})$ taki, że $\mathbf{S}^\top\mathbf{S} = (n-1)\mathbf{I}_p$ i $\mathbf{S}_{\bullet j} = \pm 1, j = 1, \ldots, p$, jest E-optymalny w klasie $\mathcal{M}_{n\times p}(\{-1,0,1\})$ ($\mathbf{S}_{\bullet j}$ oznacza sumę elementów j-tej kolumny macierzy $\mathbf{S}$).*

Konstrukcje układów E-optymalnych $\mathbf{S}$ zostały również zaprezentowane w pracy [B6]. Udowodniłem również, że układy E-optymalne nie są w ogólności ani A-optymalne, ani D-optymalne (patrz Twierdzenie 11 w pracy [B6]), co uzasadnia sensowność poszukiwania układów optymalnych osobno dla różnych kryteriów.

Wreszcie, w pracy [B21] rozważałem układy efektów głównych wykorzystanych do badania m czynników na dwóch poziomach każdy, przy n obserwacjach, które są podzielone na b bloków rozmiaru $k = n/b$. Przy założeniach, że $n \equiv 2 \pmod 8$ i $k > 2$ jest liczbą parzystą, pewne układy niemające wszystkich efektów głównych ortogonalnych względem bloków są D-optymalne, gdy $(m-2)(k-2)+2 \leqslant n \leqslant (m-1)(k-2)+2$, co zostało pokazane w artykule [18]. W pracy [B21] rozszerzyłem ten wynik. Mianowicie udowodniłem D-optymalność tych układów, gdy $(m-3)(k-2)+2 \leqslant n < (m-2)(k-2)+2$. Pokazałem również, że ich D-efektywność jest bliska jeden, gdy $2(m+1) \leqslant n < (m-3)(k-2)+2$, wskazując na ich dobre własności w sensie kryterium D-optymalności.

2.3 Test dla dwóch prób danych wysoce wielowymiarowych

W artykule [B24], rozważałem test dla dwóch prób danych wysoce wielowymiarowych, które charakteryzują się tym, że ich wymiar jest większy niż wielkość próby. W takim przypadku, test Hotellinga nie może być zastosowany ze względu na osobliwość estymatora macierzy kowiariancji. Zhang i Pan [32] zaproponowali test permutacyjny oparty o podprzestrzenie niższego wymiaru otrzymane w drodze analizy skupień, w których statystyka testu Hotellinga może być zastosowana. W pracy [B24] rozważyłem modyfikację tego testu. Zhang i Pan [32] użyli 1−współczynnik korelacji Pearsona jako miary niepodobieństwa, która najpierw łączy wysoce dodatnio skorelowane zmienne. Jednak wysoce ujemnie skorelowane zmienne są łączone na końcu. Zaproponowałem wykorzystanie 1−współczynnik determinacji jako miarę niepodobieństwa, która najpierw łączy wysoce dodatnio lub ujemnie skorelowane zmienne. Na końcu łączone są najmniej skorelowane zmienne. Dla nowej miary niepodobieństwa wyznaczyłem odcięcie służące do obliczania pierwszych skupień, aby ograniczyć wpływ statystycznych fluktuacji na współczynnik determinacji. Podobnie jak testy rozważane w pracach [30] i [32], nowy test jest niezmienniczy względem przekształceń liniowych rozkładów brzegowych:

Stwierdzenie 2.1 ([B24] Proposition 2)**.** *Załóżmy, że* $\mathbf{C}$ *jest odwracalną, rzeczywistą macierzą diagonalną wymiaru* $p \times p$ *oraz* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$*. Przy ustalonej permutacji danych, nowa procedura testowa jest niezmiennicza względem liniowych przekształceń postaci* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to (\mathbf{CX} + \mathbf{c}, \mathbf{CY} + \mathbf{c})$*, gdzie* $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{n_1})$ *i* $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{n_2})$ *są macierzami obserwacji.*

Badania symulacyjne w pracy [B24] pokazują, że nowy test jest porównywalny z testem z pracy [32] w terminach kontroli błędu pierwszego rodzaju i mocy, gdy wszystkie niezerowe korelacje zmiennych są dodatnie. Jednak nowy test może mieć większą moc w przypadku występowania ujemnie skorelowanych zmiennych.

2.4 Zastosowanie metod statystyki matematycznej w budownictwie

W pracach [B4], [B5], [B20] i [B23] rozważano podział wyników wytrzymałości betonu na ściskanie ze względu na pojęcie rodziny betonu. Problem ten był badany dla różnych danych dotyczących tej wytrzymałości oraz w różnych praktycznych sytuacjach.

Motywacja do napisania prac [B4], [B5], [B20] i [B23] była następująca: Duże ilości mieszanki betonowej wytwarzanej w sposób ciągły powinny podlegać ciągłej kontroli. Przy ocenie jakości elementów betonowych i betonowych nawierzchni drogowych głównym zagadnieniem jest kontrola parametrów wytrzymałości betonu na ściskanie. Standardowe podejście do oceny wytrzymałości betonu jest zwykle niewystarczające, ponieważ nie pozwala na wykrycie podzbiorów wyników o zmniejszonej lub zwiększonej wytrzymałości. To z kolei uniemożliwia dokonania korekty procesu produkcyjnego i zidentyfikowania konkretnego produktu lub obszaru ze zmniejszoną wytrzymałością betonu.

Metody zaproponowane w artykułach [B4], [B5], [B20] i [B23] zostały oparte o koncepcję rodziny betonu. Ta koncepcja była rozważana przykładowo w pracach [8], [17] i [28]. Rodzinę betonu definiuje się jako serię wyników wytrzymałości betonu na ściskanie, które mają stabilne parametry wytrzymałościowe. Zaproponowaliśmy grupowanie wyników wytrzymałości betonu na ściskanie w produkcji ciągłej, w oparciu o weryfikację odpowiednich hipotez statystycznych. Użyliśmy standardowych testów statystycznych, a mianowicie testu t-Studenta, testu U-Manna-Whitneya i testu χ^2-Pearsona. Sensowność uzyskanych wyników została potwierdzona na rzeczywistych przykładach danych.

Bibliografia

[1] Anderson, T.W. (2003). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3rd edition. Wiley, London.

[2] Andrews, D.W.K. (1987). Asymptotic results for generalized Wald tests. Econometric Theory 3, 348–358.

[3] Benjamini, Y., Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology) 57, 289–300.

[4] Bhimasankaram, P., Sengupta, D. (1991). Testing for the mean vector of a multivariate normal distribution with a possibly singular dispersion matrix and related results. Statistics & Probability Letters 11, 473–478.

[5] Box, G.E.P. (1954). Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. The Annals of Mathematical Statistics 25, 290–302.

[6] Brunner, E., Dette, H., Munk, A. (1997). Box-type approximations in nonparametric factorial designs. Journal of the American Statistical Association 92, 1494–1502.

[7] Bulutoglu, D.A., Ryan, K.J. (2009). D-optimal and near D-optimal 2^k fractional factorial designs of resolution V. Journal of Statistical Planning and Inference 139, 16–22.

[8] Caspeele, R., Taerwe, L. (2007). Conformity control of concrete based on the "concrete family" concept. In: 5th International Probabilistic Control, Ghent, 241–252.

[9] Chung, E.Y., Romano, J.P. (2013). Exact and asymptotically robust permutation tests. The Annals of Statistics 41, 484–507.

[10] Collazos, J.A.A., Dias, R., Zambom, A.Z. (2016). Consistent variable selection for functional regression models. Journal of Multivariate Analysis 146, 63–71.

[11] Cuesta-Albertos, J.A., M. Febrero-Bande, M. (2010). A simple multiway ANOVA for functional data. Test 19, 537–557.

[12] Duchesne, P., Francq, C. (2015). Multivariate hypothesis testing using generalized and {2}-inverses - with applications. Statistics 49, 475–496.

[13] Fan, J., Lin, S.K. (1998). Test of significance when data are curves. Journal of American Statistical Association 93, 1007–1021.

[14] Getson, A.J., Hsuan, F.C. (1988). {2}-inverses and their statistical application. Lecture Notes in Statistics 47. Springer-Verlag, New York.

[15] Górecki, T., Krzyśko, M., Wołyński, W. (2015). Classification problem based on regression models for multidimensional functional data. Statistics in Transition new series 16, 97–110.

[16] Górecki, T., Krzyśko, M., Waszak, Ł., Wołyński, W. (2018). Selected statistical methods of data analysis for multivariate functional data. Statistical Papers 59, 153–182.

[17] Harrison, T.A. (1999). The use of concrete families in the control of concrete. In: Utilizing Ready Mix Concrete and Mortar, Proceedings of the International Conference, UK, Scotland, 269–276.

[18] Jacroux, M. (2011). On the D-optimality of orthogonal and nonorthogonal blocked main effects plans. Statistics & Probability Letters 81, 116–120.

[19] Konietschke, F., Bathke, A.C., Harrar, S.W., Pauly, M. (2015). Parametric and nonparametric bootstrap methods for general MANOVA. Journal of Multivariate Analysis 140, 291–301.

[20] Konietschke, F., Pauly, M. (2012). A studentized permutation test for the non-parametric Behrens-Fisher problem in paired data. Electronic Journal of Statistics 6, 1358–1372.

[21] Li, C.H., Yang, S.Y. (2005). On a conjecture in D-optimal designs with $n \equiv 0 \pmod 4$. Linear Algebra and its Applications 400, 279–290.

[22] Martínez-Camblor, P., Corral, N. (2011). Repeated measures analysis for functional data. Computational Statistics & Data Analysis 55, 3244–3256.

[23] Masaro, J., Wong, C.S. (2008a). D-optimal designs for correlated random vectors. Journal of Statistical Planning and Inference 138, 4093–4106.

[24] Masaro, J., Wong, C.S. (2008b). Robustness of optimal designs for correlated random variables. Linear Algebra and its Applications 429, 1639–1646.

[25] Matsui, H., Konishi, K. (2011). Variable selection for functional regression models via the L_1 regularization. Computational Statistics & Data Analysis 55, 3304–3310.

[26] Mielniczuk, J., Teisseyre, P. (2014). Using random subspace method for prediction and variable importance assessment in regression. Computational Statistics & Data Analysis 71, 725–742.

[27] Pauly, M., Brunner, E., Konietschke, F. (2015). Asymptotic permutation tests in general factorial designs. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology) 77, 461–473.

[28] Ping, L.J., Hong, S.G., Yong, G.L. (2010). Use of "concrete family" concept for conformity control of ready mixed concrete. In: 35th Conference on Our World in Concrete & Structures, Singapore, 25–27.

[29] Ramsay, J.O., Silverman, B.W. (2005). Functional Data Analysis, 2nd Edition. Springer, New York.

[30] Thulin, M. (2014). A high-dimensional two-sample test for the mean using random subspaces. Computational Statistics & Data Analysis 74, 26–38.

[31] Yeh, H.G., Lo Huang, M.N. (2005). On exact D-optimal designs with 2 two-level factors and n autocorrelated observations. Metrika 61, 261–275.

[32] Zhang, J., Pan, M. (2016). A high-dimension two-sample test for the mean using cluster subspaces. Computational Statistics & Data Analysis 97, 87–97.

[33] Zhang, J.-T. (2005). Approximate and asymptotic distributions of chi-squared-type mixtures with applications. Journal of the American Statistical Association 100, 273–285.

[34] Zhang, J.-T. (2013). Analysis of Variance for Functional Data. Chapman & Hall, London.

[35] Zhang, J.-T., Cheng, M.Y., Wu, H.T., Zhou, B. (2018). A new test for functional one-way ANOVA with applications to ischemic heart screening. Computational Statistics & Data Analysis (przyjęta do druku) DOI:10.1016/j.csda.2018.05.004

[36] Zhang, J.-T., Liang, X. (2014). One-way ANOVA for functional data via globalizing the pointwise F-test. Scandinavian Journal of Statistics 41, 51–71.

Łukasz Smaga