



ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITY IN POZNAŃ

Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Przestrzeni Funkcyjnych i Równań Różniczkowych

Wniosek o wszczęcie postępowania habilitacyjnego
na podstawie osiągnięcia naukowego zatytułowanego

Własności geometryczne i topologiczne wybranych przestrzeni unormowanych i F-unormowanych

Radosław Kaczmarek

Załącznik nr 2

Autoreferat

Poznań, 4 lutego 2019

Collegium Mathematicum, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 08, fax +48 61 829 53 15
wmiuam@amu.edu.pl

www.wmi.amu.edu.pl

Spis treści

1	Dyplomy i stopnie naukowe	3
2	Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych	3
3	Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)	3
3.1	Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego	3
3.2	Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego	4
3.2.1	Wstęp	4
3.2.2	Preliminaria i oznaczenia	5
3.2.3	Własności monotonicznościowe w przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza -prace [K1] z [K3] oraz [K6] i [K7]	5
3.2.4	Niektóre własności geometryczne w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza z normą p -Amemiya, $1 \leq p \leq \infty$ -prace [K4] i [K5]	12
3.2.5	Łatwo wyliczalna quasi-norma w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza -praca [K2]	17
4	Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych	18
4.1	Lista pozostałych publikacji, niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego	18
4.2	Krótkie omówienie wyników pozostałych publikacji	19
4.2.1	Moduły i charakterystyki monotoniczności w różnych przestrzeniach Köthego oraz pewne własności monotonicznościowe w przestrzeniach symetrycznych -prace: [R1]-[R5] i [R9]	19
4.2.2	Operatory kompozycji i mnożenia pomiędzy funkcyjnymi przestrzeniami Orlicza -praca [R7]	24
4.2.3	Niektóre własności geometryczne przestrzeni Banacha i ich zastosowania -prace [R6],[R8] i [R10]	25
5	Bibliografia	28

1 Dyplomy i stopnie naukowe

- | | | |
|------|---|---|
| 2003 | magister matematyki
specjalność: matematyka
stosowana | Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Promotor: prof. dr hab. Henryk Hudzik
Tytuł: <i>Wybrane zagadnienia z geometrii przestrzeni
Banacha i jej zastosowania</i> |
| 2007 | doktor nauk matematycznych
w zakresie matematyki | Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Promotor: prof. dr hab. Henryk Hudzik
Tytuł: <i>Moduły i charakterystyki monotoniczności
w niektórych przestrzeniach funkcji skalarnych
i wektorowych</i> |

2 Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- | | | |
|------------------------|-----------------------|---|
| 1.11.2007 – 30.09.2017 | adiunkt | Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu |
| 1.10.2017– | starszy
wykładowca | Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu |

3 Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)

Powyższe osiągnięcie naukowe zatytułowane: "Własności geometryczne i topologiczne wybranych przestrzeni unormowanych i F-unormowanych" stanowi cykl powiązanych tematycznie 6 prac i erraty do jednej z nich.

3.1 Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

- [K1] H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Wójtowicz, *Some monotonicity properties in certain s -normed ($0 < s < 1$) and F -normed lattices*, J. Nonlinear Convex Anal. **17** (2016), no. 10, 1985–2011.
- [K2] P. Foralewski, H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbec¹, *Normed Orlicz function spaces which can be quasi-renormed with easily calculable quasinorms*, Banach J. Math. Anal. **11** (2017), no. 3, 636–660.
- [K3] H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Wójtowicz, *Corrigendum to: Some monotonicity properties in certain s -normed ($0 < s < 1$) and F -normed lattices [Journal of Nonlinear and Convex Analysis Vol. 17 (10) (2016), 1985–2011]*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **18** (2017), no. 12, 2275–2275.

¹Publikacja po śmierci Prof. RNDr. M. Krbeca, DSc., DrSc.

- [K4] R. Kaczmarek, *Uniform rotundity of Orlicz function spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Mathematische Nachrichten **291** (2018), no. 10, 1514–1532, DOI: 10.1002/mana.201700025, <https://doi.org/10.1002/mana.201700025>.
- [K5] R. Kaczmarek, *Uniform rotundity in every direction of Orlicz function spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Collectanea Mathematica **70** (2018), no. 1, 71–86, DOI: 10.1007/s13348-018-0220-3, <https://doi.org/10.1007/s13348-018-0220-3>.
- [K6] H. Hudzik, R. Kaczmarek, Y. Wang, M. Wójtowicz, *Problems of existence of order copies of ℓ^∞ and $L_p(\nu)$ in some non-Banach Köthe spaces*, Positivity. 2019, 1–19, DOI: 10.1007/s11117-019-00645-9, <https://doi.org/10.1007/s11117-019-00645-9>.
- [K7] Y. Cui, H. Hudzik, R. Kaczmarek, P. Kolwicz, *Geometric properties of F-normed Orlicz spaces*, Aequationes Mathematicae. 2018, 1–33, DOI: 10.1007/s00010-018-0615-y, <https://doi.org/10.1007/s00010-018-0615-y>.

3.2 Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

3.2.1 Wstęp

Główną tematyką moich badań stanowiących osiągnięcie naukowe są różne własności geometryczne i topologiczne niektórych przestrzeni F-unormowanych (tzn. F-unormowanych przestrzeni Köthe’go, w szczególności przestrzeni Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza) oraz unormowanych przestrzeni Orlicza z normą p -Amemiya, gdzie $1 \leq p \leq \infty$. Przestrzenie Orlicza, wprowadzone w 1932r. przez Prof. Władysława Orlicza (zob. [108]), są uogólnieniem przestrzeni L^p , gdzie $p > 0$. Unormowane i generowane przez wypukłe funkcje Orlicza (patrz Definicja 21 w sekcji 3.2.4), należą do bardzo ważnej w analizie funkcjonalnej klasy przestrzeni liniowo-topologicznych, zwanych przestrzeniami Banacha. Są również przestrzeniami Köthe’go (z relacją częściowego porządku μ -p.w.). Natomiast F-unormowane i generowane przez monotoniczne (niekoniecznie wypukłe) funkcje Orlicza (patrz Definicja 3 w sekcji 3.2.3) stanowią ważną klasę wśród wszystkich F-unormowanych przestrzeni Köthe’go (z relacją częściowego porządku μ -p.w.). Wiele własności geometrycznych przestrzeni Banacha, w szczególności (unormowanych) przestrzeni Orlicza, znalazło zastosowanie m. in. w teorii punktu stałego (zob. np. [5, 28, 30, 43, 44, 46, 48, 54, 64, 76, 78, 83, 102, 111, 114, 117, 123]) oraz teorii aproksymacji (zob. np. [22, 23, 29, 40, 55, 88, 123]).

W przypadku F-unormowanej i zupełnej kraty X , jej ścisła monotoniczność jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dla dowolnego $z \in X$ i dowolnej podkraty $A \subset X$ zbiór $P_A(z)$, projekcji elementu z na podkratę A , był co najwyżej jednoelementowy, tzn. jeżeli istnieje rozwiązanie problemu zdominowanej najlepszej aproksymacji względem podkraty A , to jest ono jedyne. Jeśli jednak F-unormowana i σ -zupełna krata X ma porządkowo ciągłą F-normę, to zbiór $P_A(z)$ jest niepusty dla dowolnej domkniętej podkraty A , $A \subset X$, zdominowanej (z dołu lub z góry) przez pewien element $z \in X$.

Rozwiązanie problemów przedstawionych dalej szczegółowo w osiągnięciu naukowym wymagało niekiedy nie tylko znaczącej modyfikacji technik wypracowanych już dla przypadku normowego, ale także wypracowania nowych technik dowodowych i nowych idei dla rozwiązania postawionych problemów. Dla przeprowadzenia tych badań dla F-krat Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza koniecznym było wykazanie najpierw pewnych ogólnych związków pomiędzy modułem i F-normą, a w wielu dowodach istotną rolę odegrały takie własności jak: ciągłość, znikanie tylko w zerze, ścisła monotoniczność, warunek Δ_2 oraz silny warunek Δ_2 dla generującej (w ogólności niewypukłej) monotonicznej funkcji Orlicza. Z kolei w pracach [K2], [K4] i [K5] koniecznym było sformułowanie i udowodnienie nowych lematów, odgrywających ważną rolę w dowodach głównych twierdzeń tych prac. Należą do nich: znaczna część wyników z

rozdziału 2 pracy [K2], lemat podający inną postać wzoru na normę p-Amemiya dla $p \in (1, \infty)$ (znacznie ułatwiający jej wyliczenie) w przypadku N-funkcji Φ spełniającej pewien warunek modularny (zob. [K4], Lemat 3.1), twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny na to, by wszystkie stałe wydobywające normę p-Amemiya elementu ze sfery jednostkowej w funkcyjnej przestrzeni Orlicza były (jednostajnie) większe od 1 (zob. [K4], Twierdzenie 3.1, punkt 1.), twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór stałych wydobywających normę p-Amemiya dla $p \in (1, \infty)$ elementu z funkcyjnej przestrzeni Orlicza z pierścienia normowego był (jednostajnie) ograniczony z góry (zob. [K4], Twierdzenie 3.1, punkt 2.), czy pewne techniczne lematy (np. Lematy 5 i 6 sformułowane dla N-funkcji z pracy [K5]).

3.2.2 Preliminaria i oznaczenia

W całym autoreferacie $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb: naturalnych, rzeczywistych i rzeczywistych nieujemnych (tzn. $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$), $S(X)$ oraz $B(X)$ oznaczają odpowiednio sferę oraz kulę jednostkową (tj. o promieniu 1) w przestrzeni unormowanej (w szczególności Banacha) $X = (X, \|\cdot\|)$, a (Ω, Σ, μ) będzie zawsze przestrzenią miary σ -skończonej i zupełnej.

W przypadku rzeczywistej kraty Banacha $X = (X, \leq, \|\cdot\|)$, gdzie $\leq$ oznacza relację częściowego porządku, oraz F-unormowanej przestrzeni Köthego E , przez X_+ (odp. E_+) oznaczmy stożek dodatni kraty Banacha X , tzn. $X_+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ (odp. stożek dodatni F-unormowanej przestrzeni Köthego E), przez $S_+(X)$ oznaczmy zbiór $S(X) \cap X_+$ oraz $B_+(X) := B(X) \cap X_+$.

Dla dowolnego odwzorowania $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ zdefiniujemy następujące dwa parametry:

$$a(\Phi) := \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\} \text{ oraz } b(\Phi) := \sup\{u > 0 : \Phi(u) < \infty\}.$$

Będą one używane w dalszej części autoreferatu zarówno dla monotonicznej funkcji Orlicza Φ (patrz Definicja 3 w sekcji 3.2.3) jak i dla klasycznej (tzn. wypukłej) funkcji Orlicza Φ (patrz Definicja 21 w sekcji 3.2.4). Zauważmy, że dla obu tych funkcji warunek $a(\Phi) = 0$ oznacza, że funkcja Orlicza Φ zeruje się tylko w zerze, a warunek $b(\Phi) = \infty$ oznacza, że Φ przyjmuje jedynie skończone wartości. Przez $\|\cdot\|_\Phi$ oznaczać będziemy albo F-normę Mazura Orlicza (w sekcji 3.2.3) albo normę Luxemburga (w sekcji 3.2.4).

3.2.3 Własności monotonicznościowe w przestrzeniach Orlicza z F- normą Mazura-Orlicza -prace [K1] z [K3] oraz [K6] i [K7]

Zanim omówimy najważniejsze wyniki tej sekcji, przypomnijmy podstawowe definicje, pojęcia i fakty.

Definicja 1. Funkcję $x \mapsto \|x\|$ definiowaną na rzeczywistej przestrzeni liniowej X i o wartościach w $\mathbb{R}_+$ nazywamy F-normą, gdy spełnia następujące warunki:

1. $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
2. $\|-x\| = \|x\|$ dla każdego $x \in X$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla wszystkich $x, y \in X$,
4. $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \rightarrow 0$ dla każdego $x \in X$ i dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ z X , takich, że $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ i dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ w $\mathbb{R}$ takich, że $\lambda_n \rightarrow \lambda$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Niech $s \in (0, 1]$. Funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy s-normą (lub s-jednorodną normą), jeżeli spełnia warunki 1. i 3. z definicji F-normy oraz gdy warunki 2. i 4. są zastąpione przez następujące:

2a. $\|\lambda x\| = |\lambda|^s \|x\|$ dla wszystkich $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gdy $s = 1$, to s -norma jest zwyczajną normą. Oczywiście każda s -norma jest F -normą. Jeżeli X jest $\|\cdot\|$ -zupełna, to $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy F -przestrzenią [65]. Jeżeli krata E wyposażona jest w monotoniczną F -normę $\|\cdot\|$ (tzn. dla $x, y \in E$ warunek $|x| \leq |y|$ implikuje, że $\|x\| \leq \|y\|$), przy której jest ona zupełna, to nazywamy ją F -kratą. Podobnie kratę E z monotoniczną s -normą nazywamy s -unormowaną kratą.

Oznaczmy przez $L^0(\mu) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ przestrzeń wszystkich (klas równoważności) funkcji Σ -mierzalnych zdefiniowanych na Ω , gdzie (Ω, Σ, μ) jest zupełną, σ -skończoną przestrzenią miary taką, że $\mu(\Omega) > 0$.

Definicja 2. F -unormowaną przestrzeń $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy F -unormowaną przestrzenią Köthego jeżeli jest liniową podprzestrzenią $L^0(\mu)$ spełniającą następujące warunki:

- (i) Jeżeli $x \in L^0(\mu)$, $y \in E$ i $|x| \leq |y|$ μ -p.w., to $x \in E$ i $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.
- (ii) Istnieje ściśle dodatni $x \in E$ (zwany słabą jedyneką).

Poniższa definicja odnosić się będzie do "niebanachowskich" przestrzeni Orlicza będących przedmiotem badań prac [K1] z [K3] oraz [K6] i [K7].

Definicja 3. Funkcję $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy monotoniczną funkcją Orlicza, gdy $\Phi(0) = 0$, Φ jest niemalejąca i ciągła na przedziale $[0, b(\Phi))$, $\lim_{u \rightarrow b(\Phi)-} \Phi(u) = \Phi(b(\Phi)) \in [0, \infty]$ i $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) > 0$.

Definicja 4. Mówimy, że monotoniczna funkcja Orlicza Φ spełnia warunek Δ_2 dla dużych argumentów (będziemy pisać krótko $\Phi \in \Delta_2(\infty)$), gdy $b(\Phi) = \infty$ i istnieją stałe $K > 0$ oraz $u_0 > 0$ takie, że $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ dla wszystkich $u \geq u_0$. Mówimy, że monotoniczna funkcja Orlicza Φ spełnia warunek Δ_2 dla małych argumentów (będziemy pisać krótko $\Phi \in \Delta_2(0)$), gdy $a(\Phi) = 0$ i istnieją stałe $K > 0$ oraz $u_0 > 0$ takie, że $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ dla wszystkich $u \in (0, u_0]$. Mówimy, że monotoniczna funkcja Orlicza Φ spełnia warunek Δ_2 dla wszystkich argumentów (będziemy pisać krótko $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$), gdy istnieje stała $K > 0$ taka, że $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ dla wszystkich $u > 0$.

W przestrzeniach Orlicza z F -normą Mazura-Orlicza używany będzie również silny warunek Δ_2 .

Definicja 5. Niech Φ będzie monotoniczną funkcją Orlicza. Mówimy, że Φ spełnia warunek $\Delta_2^{str}(\infty)$ (krótko $\Phi \in \Delta_2^{str}(\infty)$), gdy $b(\Phi) = \infty$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $\delta > 0$ i $u_0 > 0$ takie, że $\Phi((1 + \delta)u) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(u)$ dla wszystkich $u \geq u_0$. Mówimy, że Φ spełnia warunek $\Delta_2^{str}(\mathbb{R}_+)$ (krótko $\Phi \in \Delta_2^{str}(\mathbb{R}_+)$), gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje stała $\delta > 0$ taka, że $\Phi((1 + \delta)u) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(u)$ dla wszystkich $u \geq 0$. Mówimy, że Φ spełnia warunek $\Delta_2^{str}(0)$ (krótko $\Phi \in \Delta_2^{str}(0)$), gdy $a(\Phi) = 0$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $\delta > 0$ i $u_1 > 0$ takie, że $\Phi((1 + \delta)u) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(u)$ dla wszystkich $u \in [0, u_1]$.

Mówimy, że monotoniczna funkcja Orlicza Φ spełnia odpowiedni warunek Δ_2 , gdy $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ w przypadku funkcyjnej przestrzeni Orlicza nad przestrzenią miary bezatomowej, skończonej, $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$ w przypadku funkcyjnej przestrzeni Orlicza nad przestrzenią miary bezatomowej, nieskończonej oraz gdy $\Phi \in \Delta_2(0)$ w przypadku ciągowej przestrzeni Orlicza ℓ^Φ . Analogicznie rozumiemy powiedzenie, iż monotoniczna funkcja Orlicza Φ spełnia odpowiedni warunek Δ_2^{str} .

Dla dowolnej, monotonicznej funkcji Orlicza Φ porządkowy ideał

$$L^\Phi(\mu) = \{f \in L^0(\mu) : I_\Phi(rf) < \infty \text{ dla pewnego } r > 0\}$$

w $L^0(\mu)$ nazywamy przestrzenią Orlicza. Przestrzeń ta jest zupełna względem następującej kratowej F -normy, zwanej F -normą Mazura-Orlicza (zob. [103]):

$$\|f\|_\Phi = \inf\{t > 0 : I_\Phi(f/t) \leq t\},$$

jest więc F-unormowaną przestrzenią Köthego, choć w ogólności nie jest kratą Banacha. Zdefiniujemy również F-kratowy ideał $E^\Phi(\mu)$ w $L^\Phi(\mu)$ wzorem:

$$E^\Phi(\mu) = \{f \in L^0(\mu) : I_\Phi(rf) < \infty \text{ dla wszystkich } r > 0\}$$

(zob. [84, 96, 98, 100, 103, 105, 109]).

Definicja 6 (Zob. [57]). Funkcję Orlicza $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy s -wypukłą, jeżeli spełnia nierówność: $\Phi(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s \Phi(u) + \beta^s \Phi(v)$ dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}_+$ oraz dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ takich, że $\alpha^s + \beta^s = 1$.

Dla s -wypukłej funkcji Orlicza Φ , definiujemy s -normę (zwaną również s -normą typu Luxemburga) na $L^\Phi(\mu)$ wzorem: $\|x\|_{\Phi,s} := \inf\left\{\lambda > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda^{1/s}}\right) \leq 1\right\}$. W tym przypadku, przestrzeń $(L^\Phi(\mu), \|x\|_{\Phi,s})$ jest zupełną s -unormowaną kratą (więc również i zupełną F -kratą).

Definicja 7. Dla danej unormowanej przestrzeni Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ i dla dowolnego $s \in (0, 1)$, definiujemy jej s -uwklęśnienie wzorem: $E^s = \{x \in L^0(\mu) : |x|^s \in E\}$.

Jest to liniowa podprzestrzeń przestrzeni $L^0(\mu)$, a funkcja $\|\cdot\|_{E^s} : E^s \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiowana wzorem $\|x\|_{E^s} = \||x|^s\|_E$ jest s -normą dla $s \in (0, 1)$. Dla dowolnej unormowanej przestrzeni Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$, jej s -uwklęśnienie E^s jest s -unormowaną przestrzenią Köthego.

Podamy teraz definicje podstawowych własności monotonicznościowych oraz różnych własności typu Kadeca-Klee w F -unormowanych przestrzeniach Köthego $E = (E, \|\cdot\|_E)$.

Definicja 8. Punkt $x \in E$ nazwiemy H_g -punktem (odp. H_l -punktem) w E , gdy dla każdego $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ takiego, że $x_n \rightarrow x$ globalnie (odp. lokalnie) według miary i $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$, mamy, że $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$. Powiemy, że przestrzeń E posiada własność Kadeca-Klee względem zbieżności globalnej (odp. lokalnej) według miary, gdy każdy $x \in E$ jest H_g -punktem (odp. H_l -punktem) w E .

Odnajmy, że w przypadku ciągowej F-przestrzeni Köthego analogony powyższych własności noszą nazwę własności Kadeca-Klee względem zbieżności jednostajnej (odp. punktowej). Będziemy je oznaczać H_u (odp. H_c).

Definicja 9 (Zob. [6]). F -unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy ściśle monotoniczną, gdy dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $0 \leq y \leq x$ i $y \neq x$ spełniona jest nierówność $\|y\|_E < \|x\|_E$.

Definicja 10. F -unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy ortogonalnie ściśle monotoniczną, gdy dla dowolnego $x \in E_+ \setminus \{0\}$ i dla dowolnego $A \in \Sigma \cap \text{supp } x$ z $\mu(A) > 0$, mamy, że $\|x\chi_{\Omega \setminus A}\|_E < \|x\|_E$.

Definicja 11. F -unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczną, gdy dla dowolnego $x \in E$ i $(x_n)_{n=1}^\infty$ w E takich, że $0 \leq x_n \leq x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$, gdy $n \rightarrow \infty$, zachodzi warunek, iż $\|x - x_n\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Definicja 12. F -unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy ortogonalnie dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczną, gdy dla dowolnego $x \in E_+ \setminus \{0\}$ i dowolnego $(A_n)_{n=1}^\infty$ w Σ spełniona jest następująca implikacja:

$$\left(\|x\chi_{A_n}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|_E\right) \Rightarrow \left(\|x - x\chi_{A_n}\|_E = \|x\chi_{\Omega \setminus A_n}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right).$$

Definicja 13. *F-unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy górnio lokalnie jednostajnie monotoniczną, gdy dla dowolnego $x \in E_+$ i $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E_+ takich, że $x \leq x_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$ gdy $n \rightarrow \infty$, spełniony będzie warunek $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.*

Definicja 14. *F-unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy ortogonalnie górnio lokalnie jednostajnie monotoniczną, gdy dla dowolnego $x \in E_+ \setminus \{0\}$ takiego, że $\mu(\text{supp } E \setminus \text{supp } x) > 0$ i dla każdego $x_n \in E_+$ z $\text{supp } x_n \subset \text{supp } E \setminus \text{supp } x$, jeżeli $\|x + x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$, to $\|x_n\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.*

Definicja 15. *F-unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy jednostajnie monotoniczną, gdy dla każdego $c > 0$, dowolnych $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \subset E$ takich, że $0 \leq y_n \leq x_n$, $\|x_n\|_E \leq c$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\|y_n\|_E \rightarrow c$, zachodzi warunek, iż $\|x_n - y_n\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.*

Definicja 16. *F-unormowaną przestrzeń Köthego $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy ortogonalnie jednostajnie monotoniczną, gdy dla każdego $c > 0$, dowolnego $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E_+$ i dowolnego $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ takich, że $\|x_n\|_E \leq c$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\|x_n \chi_{A_n}\|_E \rightarrow c$, spełniony będzie warunek, iż $\|x_n - x_n \chi_{A_n}\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.*

Własności monotonicznościowe różnych krat unormowanych były przedmiotem badań wielu matematyków, takich jak np. M. A. Akcoglu, B. Bru, A. Betiuk-Pilarska, M. Ciesielski. Chen, Y. Cui, P. Foralewski, H. Heinrich, X. He, H. Hudzik, R. Kaczmarek, P. Kolwicz, W. Kurc, H. J. Lee, Y. M. Lü, M. Mastyló, A. Narloch, A. Panfil, S. Prus, R. Płuciennik, L. Sucheston, L. Szymaszkiewicz, T. Wang, J. M. Wang, T. F. Wang, M. Wisła, czy W. Wnuk, a wiele ważnych wyników zawiera m. in. książka G. Birkhoffa [6], monografia W. Wnuka [127], praca przeglądowa autorstwa P. Foralewski, H. Hudzik, W. Kowalewski i M. Wisła [40], czy prace [1, 2, 5, 10, 12, 13, 22, 23, 27, 29, 49, 51, 55, 60, 83, 87–90, 99] oraz [R1]–[R5] (zob. rozdział 4.1). Prowadzone były również pewne badania dla F-unormowanych krat Orlicza oraz Musielaka-Orlicza (np. W. Wnuk [126, 127], czy M. Wójtowicz i H. Wiśniewska [124, 125]).

Dla ścisłej i jednostajnej monotoniczności przestrzeni Köthego istnieją proste kryteria. Mówią one, że w definicjach tych własności możemy się wtedy ograniczyć do takich par dodatkowych elementów, że elementy mniejsze są obcięciami (zawężeniami) elementów większych. Takie własności monotonicznościowe nazywamy ortogonalnymi. Postawiłem sobie naturalne pytanie, czy takie kryteria zachowują się w szerszej klasie F-unormowanych przestrzeni Köthego i zauważyłem, że brak dodatniej jednorodności F-normy stanowi tu prawdopodobnie istotną przeszkodę. Dla upewnienia się, czy ta przeszkoda jest istotna, czy nie, naturalnym było znalezienie kryteriów dla własności monotonicznościowych oryginalnych oraz ich ortogonalnych odpowiedników dla F-unormowanych przestrzeni Orlicza. Okazało się, że w tym przypadku własności oryginalne są istotnie silniejsze od ich odpowiedników ortogonalnych. Mianowicie dla odpowiedników ortogonalnych wystarczy, by generująca funkcja Orlicza była ściśle monotoniczna w pewnym otoczeniu zera, czyli by znikała tylko w zerze, zaś dla oryginalnych własności monotonicznościowych koniecznym jest by generująca funkcja Orlicza była ściśle rosnąca na całym przedziale $[0, b(\Phi))$. Widać, że własności te nie były rozróżniane w przypadku unormowanych przestrzeni Orlicza tylko dlatego, że wypukła funkcja Orlicza znikająca tylko w zerze jest automatycznie ściśle rosnąca na całym przedziale $[0, b(\Phi))$.

Praca [K1] jest pierwszą z cyklu 3 prac zawierających wyniki dotyczące różnych własności (głównie monotonicznościowych) w "niebanachowskich" przestrzeniach Orlicza. Praca ta najpierw rozszerza ogólny wynik dotyczący charakteryzacji ścisłej monotoniczności w funkcyjnych przestrzeniach Banacha uzyskany przez H. Hudzika, A. Kamińską i M. Mastyló w pracy [51], na przypadek F-krat zupełnych w sensie Dedekinda ([K1], Twierdzenie 2.2), ze szczególnym

uwzględnieniem "niebanachowskich" przestrzeni Orlicza oraz częściowo rozszerza wyniki uzyskane w pracach [27, 55, 88] z unormowanych przestrzeni Musielaka-Orlicza do F-unormowanych przestrzeni Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza i s-unormowanych przestrzeni Orlicza z s-normą Luxemburga $\|\cdot\|_{\Phi, s}$. Następnie sformułowano i udowodniono dwa podstawowe narzędzia ([K1], Lemat 6.1 oraz [K1], Wniosek 6.2), umożliwiające badanie różnych własności w F-przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza. Istotne z punktu widzenia dalszych badań było Twierdzenie 6.5 mówiące kiedy przestrzeń $(L^\Phi(\mu))_a$ elementów porządkowo ciągłych z $L^\Phi(\mu)$ albo ℓ^Φ jest nietrywialna bądź identyczna z przestrzenią $E^\Phi(\mu)$ (podano na to warunki konieczne i dostateczne dla przypadku funkcyjnego i ciągłego). Nadmienimy, iż chociaż problemy z tegoż twierdzenia były wcześniej rozważane przez W. Wnuka (zob. [126, 127]), to w przypadku miary liczącej na $2^{\mathbb{N}}$ uzyskany rezultat jest silniejszy ponieważ w [K1] uzyskano również formułę dla podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych $(\ell^\Phi)_a$ przestrzeni ℓ^Φ wyrażoną w języku modulary I_Φ (w [126, 127] pokazano to tylko w przypadku miary bezatomowej). Następnie podano kompletną charakteryzację ścisłej monotoniczności w F-unormowanych funkcyjnych i ciągłych przestrzeniach Orlicza generowanych przez monotoniczną funkcję Orlicza Φ z F-normą Mazura-Orlicza ([K1], Twierdzenie 6.6 i Twierdzenie 6.8) oraz dla przestrzeni $(L^\Phi(\mu))_a$ elementów porządkowo ciągłych z F-normą Mazura-Orlicza indukowaną z $L^\Phi(\mu)$ (zob. [K1] z [K3], Wniosek 6.7 i Twierdzenie 6.8).

Warto zauważyć, że pojawiające się w pracach [K1] i [K7] w twierdzeniach dotyczących przestrzeni elementów porządkowo ciągłych $E^\Phi(\mu)$ (odp. h^Φ) z przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ (odp. ℓ^Φ) z F-normą Orlicza-Mazura założenie, iż $b(\Phi) = \infty$ jest dość naturalne, bowiem gdyby $b(\Phi) < \infty$, to $E^\Phi(\mu) = \{0\}$, czyli $E^\Phi(\mu)$ jest wtedy jednostajnie monotoniczna bez żadnych dodatkowych założeń o funkcji Φ .

Dodatkowo, w pracy [K1] podano kompletne kryteria odpowiednio dla: ścisłej monotoniczności, ortogonalnej jednostajnej monotoniczności, ortogonalnej dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności i ortogonalnej górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności dla s-uwklęśnięć ($0 < s < 1$) unormowanych przestrzeni Köthe'go E (patrz [K1], Twierdzenie 3.1, Twierdzenie 3.6 i Twierdzenie 3.7). Jako wnioski, otrzymano kryteria dla s-uwklęśnięć funkcyjnych i ciągłych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga i z normą Amemiya-Orlicza oraz s-uwklęśnięć funkcyjnych i ciągłych przestrzeni Orlicza-Lorentza z normą Luxemburga. Wskazano też warunki konieczne i dostateczne dla ścisłej monotoniczności w s-unormowanych funkcyjnych i ciągłych przestrzeniach Orlicza $L^\Phi(\mu)$ generowanych przez s-wypukłe funkcje Orlicza Φ ([K1], Twierdzenie 4.3) oraz dla przestrzeni $(L^\Phi(\mu))_a$ elementów porządkowo ciągłych z przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ wyposażonych w s-jednorodną normę $\|\cdot\|_\Phi$ indukowaną z przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ nad przestrzenią miary bezatomowej oraz liczącej ([K1], Wniosek 4.4).

Niewielkie corrigendum sformułowania treści Wniosku 6.7 oraz jednej definicji z pracy [K1] zawarte zostało w [K3].

Kilka ogólnych wyników dotyczących F-unormowanych przestrzeni Köthe'go zostało umieszczonych w rozdziale trzecim pracy [K7]. Wyniki tej pracy dotyczą jednak przede wszystkim własności monotonicznościowych i różnego rodzaju własności Kadeca-Klee dla rozważanych F-przestrzeni Orlicza. W niemal wszystkich przypadkach uzyskano twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne. Wiadomo, że (zob. [51]) w przypadku unormowanych przestrzeni Köthe'go ścisła monotoniczność równoważna jest ortogonalnej ścisłej monotoniczności i podobnie jednostajna monotoniczność jest równoważna ortogonalnej jednostajnej monotoniczności. Nadmienimy, że warunki konieczne i dostateczne dla ścisłej monotoniczności oraz jednostajnej monotoniczności zarówno przestrzeni Musielaka-Orlicza z normą Luxemburga jak też jej podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych z normą Luxemburga, nad przestrzenią miary bezatomowej podał W. Kurec (zob. [88], Twierdzenia 2.7 i 2.8). W przypadku ciągłej przestrzeni Orlicza ℓ^Φ z normą Luxemburga, generowanej przez dowolną funkcję Orlicza, charakteryzację ścisłej monotoniczności i jednostajnej monotoniczności dla tej przestrzeni można znaleźć np.

w [40], Wniosek 2.8 (patrz również praca [R3]). Gdy jednak rozważać będziemy takie własności monotonicznościowe w szerszej klasie F-unormowanych przestrzeni Köthe, to takie równoważności nie muszą już być prawdziwe, co ilustruje przykład F-kraty Orlicza (zob. [K7], Twierdzenie 4.3 oraz Wniosek 4.6 dla F-kraty $L^\Phi(\mu)$, [K7], Twierdzenia: 4.2 oraz 4.5 dla F-kraty $E^\Phi(\mu)$, [K7], Wnioski: 4.10 oraz 4.12 dla F-kraty ℓ^Φ , [K7], Twierdzenia: 4.9 oraz 4.11 dla F-kraty h^Φ , [K7], Twierdzenie 4.18 oraz, przy dodatkowym założeniu, że monotoniczna funkcja Orlicza Φ jest wypukła, Twierdzenia: 4.20 i 4.21).

W omawianej pracy, dla F-unormowanych funkcyjnych lub ciągowych przestrzeni Orlicza $L^\Phi(\mu)$ lub ℓ^Φ odpowiednio, wyposażonych w F-normę Mazura-Orlicza oraz ich podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych $E^\Phi(\mu)$ lub h^Φ z tą samą F-normą, w rozdziale 4 sformułowano pełne (tzn. podające warunki konieczne i dostateczne) kryteria dla następujących własności monotonicznościowych:

1. ortogonalnej ściśle monotoniczności,
2. dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności,
3. ortogonalnej dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności,
4. górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności,
5. ortogonalnej górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności.

Pokazano również istotne rozszerzenie Twierdzenia 6.8 z [K1], osłabiając nieco założenie, iż $b(\Phi) = \infty$ (zob. [K7], Twierdzenie 4.11). Przy pewnych założeniach o generującej funkcji Orlicza Φ , sformułowano warunki implikujące własność ortogonalnej jednostajnej monotoniczności (OUM) dla przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ oraz ℓ^Φ z F-normą Mazura-Orlicza ([K7], Twierdzenie 4.18). W kryterium tym istotną rolę odegrał warunek Δ_2^{str} , silniejszy (jeśli rozpatrywany dla F-unormowanych przestrzeni Orlicza generowanych przez monotoniczną funkcję Orlicza) od warunku Δ_2 .² Okazało się bowiem, że warunki Δ_2^{str} i Δ_2 nie są identyczne, jeśli pominąć założenie o wypukłości funkcji Orlicza Φ . W Przykładzie z rozdziału drugiego pokazano przykład ściśle monotonicznej funkcji Orlicza Φ spełniającej warunek $\Delta_2(\infty)$, lecz nie spełniającej warunku $\Delta_2^{str}(\infty)$. W związku z rozróżnieniem powyższych warunków dla monotonicznej funkcji Orlicza Φ , koniecznym było udowodnienie najpierw kilku lematów zakładających m. in. spełnienie odpowiedniego warunku Δ_2^{str} przez generującą (niekoniecznie wypukłą) funkcję Orlicza Φ ([K7], Lematy: 4.14, 4.15 i 4.16). W przypadku przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ generowanej przez wypukłą funkcję Orlicza i wyposażonej w F-normę Mazura-Orlicza podano warunki konieczne i dostateczne na jednostajną monotoniczność, ortogonalną jednostajną monotoniczność, ortogonalną dolną lokalną jednostajną monotoniczność i ortogonalną ściśle monotoniczność przestrzeni $L^\Phi(\mu)$ (każda z tych własności okazała się być równoważna następującym warunkom: $a(\Phi) = 0$ i $\Phi \in \Delta_2$, co z kolei okazało się być równoważne z jednostajną monotonicznością przestrzeni $E^\Phi(\mu)$ z F-normą Mazura-Orlicza, generowaną przez wypukłą funkcję Orlicza Φ przyjmującą jedynie skończone wartości ([K7], Twierdzenie 4.20)). Również w przypadku ciągowej przestrzeni Orlicza ℓ^Φ z F-normą Mazura-Orlicza, generowanej przez wypukłą funkcję Orlicza Φ możliwym było podanie pełnej charakteryzacji jednostajnej monotoniczności ([K7], Twierdzenie 4.21). Następnie rozważono różne własności Kadeca-Klee, tzn. własność Kadeca-Klee względem globalnej oraz względem lokalnej zbieżności według miary (w przypadku funkcyjnym) oraz własność Kadeca-Klee zbieżności jednostajnej oraz po współrzędnych (w przypadku ciągowym) w F-kratkach Orlicza znajdując pełne kryteria na posiadanie przez te F-kraty odpowiednich własności Kadeca-Klee ([K7], Twierdzenia: 4.22-4.25). Pokazano również, że elementy porządkowo ciągłe z symetrycznej funkcyjnej F-przestrzeni spełniają warunek $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = 0$. Analogiczny wynik znany był jedynie dla elementów porządkowo ciągłych z symetrycznej funkcyjnej przestrzeni Banacha (zob. [13, Lemat 2.5]). Nadto udowodniono, że w symetrycznej funkcyjnej

²Porównaj Definicja 5 i Definicja 4.

F-przestrzeni E z własnością Fatou, własność Kadeca-Klee względem lokalnej zbieżności według miary implikuje nie tylko własność Kadeca-Klee względem globalnej zbieżności według miary (co jest natychmiastowe), lecz również porządkową ciągłość E oraz jej ortogonalną ściłą monotoniczność. Analogiczny rezultat uzyskano dla ciągowych symetrycznych F-przestrzeni z własnością Fatou. Przypomnijmy, że w funkcyjnych kratkach Banacha własność Kadeca-Klee względem lokalnej zbieżności według miary implikuje porządkową ciągłość (zob. [32, Stwierdzenie 2.1]). Nadmienimy też, że własności Kadeca-Klee były już badane w niektórych kratkach Banacha oraz quasi-Banacha (zob. np. [14, 24, 32, 38, 58, 61, 79, 80, 82]).

W pracy [K6], powstałej w ramach grantu Narodowego Centrum Nauki, udzielono odpowiedzi na następujący problem: czy zawieranie przez klasyczną przestrzeń Orlicza z normą Luxemburga (generowaną przez wypukłą funkcję Orlicza Φ) liniowej porządkowo-izometrycznej kopii przestrzeni ℓ^∞ zostanie zachowane, jeśli przeniesiemy się z unormowanej przestrzeni Orlicza do F-przestrzeni Orlicza (z F-normą Mazura-Orlicza), generowanej przez monotoniczną funkcję Orlicza? Przeprowadzone badania dały częściowo pozytywną odpowiedź. Ujawniły jednak pewną różnicę w stosunku do przypadku przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga. Okazało się, że brak jednorodności F-normy generowanej przez monotoniczną funkcję Orlicza Φ znikającą tylko w zerze we wszystkich przypadkach przestrzeni miary sprawia, iż nie jest możliwym znalezienie liniowej porządkowo-izometrycznej kopii całej przestrzeni ℓ^∞ w takich F-przestrzeniach Orlicza. Dlatego, w pracy [K6] podano kryteria zarówno na istnienie liniowej, porządkowo-izometrycznej kopii $\ell^\infty \setminus B_{\ell^\infty}(0, \varepsilon)$ przy dowolnym $\varepsilon > 0$, jak również (w pewnych przypadkach) na istnienie liniowej, porządkowo-izometrycznej kopii całej przestrzeni ℓ^∞ w funkcyjnych i ciągowych przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza ([K6], Twierdzenia: 2 i 3). Rozważono również problem zawierania liniowej, porządkowo-izometrycznej kopii $L_p(\nu)$, $0 < p \leq 1$, w przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza ([K6], rozdział 4). Dla monotonicznej funkcji Orlicza Φ przyjmującej jedynie wartości 0 oraz ∞ , dla obu przypadków, s-jednorodnej normy $\|\cdot\|_{\Phi,s}$, gdy Φ jest s-wypukłą ($0 < s \leq 1$) i dla F-normy Mazura-Orlicza $\|\cdot\|_\Phi$, gdy Φ jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$ udowodniono w [K6], że $L^\Phi(\mu) = L^\infty(\mu)$, a odpowiednie rodzaje norm są proporcjonalne do normy $\|\cdot\|_\infty$ ([K6], Twierdzenie 1). W pracy zamieszczono również dwie uwagi dotyczące charakteryzacji kul otwartych $B_{\|\cdot\|_\Phi}(0, \varepsilon)$ o środku w 0 i promieniu ε dla F-normy Mazura-Orlicza w funkcyjnych oraz ciągowych przestrzeniach Orlicza, dla każdego $\varepsilon > 0$, w języku modularu I_Φ . Podano również rozwiązanie problemu otwartości kul modularnych $B_{\Phi,\varepsilon} := \{x \in L^\Phi(\mu) : I_\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\}$ w topologii metrycznej zarówno dla s-jednorodnej normy $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ ($0 < s \leq 1$) jak również dla F-normy Mazura-Orlicza $\|\cdot\|_\Phi$. W przypadku s-jednorodnej normy $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ zostało to zrobione dla $\varepsilon = 1$, a w przypadku F-normy Mazura-Orlicza dla wszystkich $\varepsilon > 0$.

Chociaż w niektórych miejscach dowodów głównych twierdzeń zastosowane zostały podobne techniki jak w przypadku ich normowych odpowiedników, to zastosowano również w wielu przypadkach pewne nowe drobne idee, czy pomysły.

Kontynuację problematyki badania różnych własności monotonicznościowych w F-kratkach Köthego stanowi kolejna autorska praca habilitanta, pt. "Some monotonicity properties in F-normed Musielak-Orlicz spaces" (praca wysłana), w której uogólniono niektóre z wyników otrzymanych w pracach: [K1] z [K3] oraz [K7] z przestrzeni Orlicza oraz jej podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych, obie z F-normą Mazura-Orlicza, na funkcyjną przestrzeń Musielaka-Orlicza $L^\Phi(\mu)$ oraz jej podprzestrzeń $E^\Phi(\mu) = \{x \in L^0(\mu) : I_\Phi(\lambda x) < \infty \text{ dla każdego } \lambda > 0\}$, obie z F-normą Mazura-Orlicza, generowanych przez monotoniczną (niekoniecznie wypukłą) funkcję Musielaka-Orlicza Φ , znajdując pełne charakteryzacje wszystkich rozważanych własności monotonicznościowych (ściślej monotoniczności, dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności, górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności oraz ortogonalnych odpowiedników tych własności).

3.2.4 Niektóre własności geometryczne w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza z normą p -Amemiya, $1 \leq p \leq \infty$ -prace [K4] i [K5]

Najważniejszymi własnościami typu wypukłościowego w przestrzeniach Banacha są: jednostajna wypukłość oraz znacznie od niej słabsza, jednostajna wypukłość w każdym kierunku. Wiążą one geometrię przestrzeni Banacha między innymi z teorią punktu stałego (patrz Twierdzenie 3.2 i Twierdzenie 3.1 poniżej) oraz teorią aproksymacji.

Rozpocznijmy od przypomnienia podstawowych definicji i twierdzeń.

Definicja 17. *Przestrzeń Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$ nazywamy ściśle wypukłą, gdy $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ dla wszystkich $x, y \in S(X)$ takich, że $x \neq y$. Przestrzeń Banacha nazywamy jednostajnie wypukłą [zob. Clarkson, [16]], gdy dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 2]$ istnieje $\delta(\varepsilon) > 0$ taka, że warunki $x, y \in S(X)$ oraz $\|x - y\| \geq \varepsilon$ implikują, że $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.*

Przestrzeniami jednostajnie wypukłymi są np. przestrzenie Hilberta, przestrzenie L^p oraz ℓ^p dla $p \in (1, \infty)$ podczas gdy przestrzenie L^1 , ℓ^1 , ℓ^∞ , c_0 , L^∞ nie są nawet ściśle wypukłe. Każda jednostajnie wypukła przestrzeń unormowana jest ściśle wypukła, ale nie na odwrót (np. przestrzeń Banacha $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ z normą $\|x\| := \|x\|_{L^\infty} + \frac{1}{2}\|x\|_{L^2}$ dla wszystkich $x \in C[0, 1]$ jest ściśle wypukła, ale nie jednostajnie wypukła). Wiadomo jednak, że w skończone wymiarowych przestrzeniach Banacha pojęcia te pokrywają się (bo sfera jednostkowa jest zbiorem zwartym w skończonej wymiarowej przestrzeni Banacha X). Ponadto, każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest refleksywna.

Własnością silniejszą od ścisłej wypukłości, ale słabszą od jednostajnej wypukłości w przestrzeniach Banacha jest własność jednostajnej wypukłości w każdym kierunku.

Definicja 18 (Zob. [31], [113]). *Przestrzeń Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$ nazywamy jednostajnie wypukłą w każdym kierunku (w skrócie URED), gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego niezerowego $z \in X$ istnieje $\delta(z, \varepsilon) > 0$ takie, że jeżeli $x, y \in S(X)$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ i $x - y = \alpha z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(z, \varepsilon)$.*

Istnieje kilka warunków równoważnych definicji URED, np. warunek używany w pracy [K5]: dla dowolnych $x_n, z \in X$, warunki $\|x_n\| \rightarrow 1$, $\|x_n + z\| \rightarrow 1$ i $\|2x_n + z\| \rightarrow 2$, gdy $n \rightarrow \infty$, implikują, że $z = 0$ (zob. [31]). Wiadomo, że w przypadku przestrzeni Köthego $E = (E, \leq, \|\cdot\|)$, gdzie $\leq$ jest relacją częściowego porządku, wystarczy sprawdzić definicję własności URED dla elementów $z \in E_+ \setminus \{0\}$, gdzie $E_+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ oznacza stożek dodatni przestrzeni Köthego E (zob. P. Kolwicz i R. Płuciennik [83], Stwierdzenie 3.3).

Przejdźmy teraz do definicji struktury normalnej, która jest własnością geometryczną nieco bardziej ogólną niż jednostajna wypukłość.

Definicja 19. *Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma strukturę normalną, gdy dla każdego niepustego, wypukłego, domkniętego i ograniczonego podzbioru C przestrzeni X , który nie jest singletonem, istnieje $x \in C$ taki, że*

$$\sup\{\|x - y\| : y \in C\} < \text{diam}(C) := \sup\{\|u - v\| : u, v \in C\}.$$

Pojęcie struktury normalnej wprowadzili Brodskiĭ i Milman w pracy [8]. Pokazali oni również pierwsze zastosowanie tego pojęcia w teorii punktu stałego. Natomiast w 1971, M. M. Day, R. C. James i S. Swaminathan oraz V. Zidler udowodnili, niezależnie od siebie, następujące:

Twierdzenie 3.1 (Zob. [31], Wniosek 3 i [129], Stwierdzenie 23). *Każda jednostajnie wypukła w każdym kierunku przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ posiada strukturę normalną.*

Wiadomo, że struktura normalna implikuje słabą własność punktu stałego oraz pełni istotną rolę w metrycznej teorii punktu stałego (zob. [44]).

Przypomnijmy teraz kilka znanych twierdzeń wiążących jednostajną wypukłość oraz jednostajną wypukłość w każdym kierunku z teorią punktu stałego oraz teorią aproksymacji wraz z niezbędnymi definicjami. Więcej informacji o zastosowaniach własności geometrycznych przestrzeni Banacha w teorii punktu stałego oraz w teorii aproksymacji można znaleźć np. w [7, 44, 48, 78, 106, 111, 112].

Definicja 20. *Odwzorowanie $T : C \rightarrow C$ zdefiniowane na podzbiorze C przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy nierozszerzającym, jeżeli nierówność $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ zachodzi dla wszystkich $x, y \in C$. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma własność punktu stałego (odpowiednio własność słabego punktu stałego), gdy dla każdego niepustego, ograniczonego, wypukłego i domkniętego (odpowiednio słabo zwartego i wypukłego) podzbioru C , odwzorowanie nierozszerzające $T : C \rightarrow C$ ma punkt stały w C (tzn. istnieje $x \in C$ taki, że $Tx = x$).*

Nadmieńmy, że w refleksywnych przestrzeniach Banacha własność punktu stałego i własność słabego punktu stałego pokrywają się.

W 1965 trzech matematyków: F. E. Browder i D. Göhde (niezależnie od siebie) oraz W. A. Kirk udowodnili następujące dwa twierdzenia wiążące pojęcie jednostajnej wypukłości przestrzeni Banacha a także normalnej struktury z teorią punktu stałego:

Twierdzenie 3.2 (1965, Browder [9], Göhde [45]). *Jeżeli C jest ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$ i jeśli $T : C \rightarrow C$ jest odwzorowaniem nierozszerzającym, to T posiada punkt stały.*

Twierdzenie 3.3 (1965, Kirk [77]). *Jeżeli C jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem refleksywnej przestrzeni Banacha X ze strukturą normalną i jeżeli $T : C \rightarrow C$ jest nierozszerzającym, to T ma punkt stały.*

Warto wspomnieć o innym, ważnym wyniku z 2006r. z pracy [43] (zob. również [101, 102]), mianowicie

Twierdzenie 3.4 (Zob. [43], Wniosek 5.1). *Każda jednostajnie niekwadratowa przestrzeń Banacha ma własność punktu stałego.*

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy jednostajnie niekwadratową (w sensie Jamesa), gdy istnieje dodatnia liczba $\delta < 2$ taka, że $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leq \delta$ dla dowolnych $x, y \in S(X)$.

Przejdźmy teraz do przypomnienia kilku definicji oraz wyników wiążących ściśle i jednostajną wypukłość z teorią aproksymacji.

Niech A będzie niepustym podzbiorem unormowanej przestrzeni liniowej $X = (X, \|\cdot\|)$. Odwzorowanie $P_A : X \rightarrow A \cup \{\emptyset\}$ zdefiniowane wzorem:

$$P_A(x) := \{z \in A : d(x, A) = \|x - z\|\}, \quad \forall x \in X,$$

gdzie $d(x, A) := \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ jest odległością x do zbioru A , nazywamy metryczną projekcją z X na zbiór A , a dla każdego $x \in X$ zbiór $P_A(x)$ nazywamy metryczną projekcją elementu x na zbiór A . Zbiór A jest nazywany proksyminalnym w przestrzeni Banacha X , jeżeli $P_A(x)$ jest niepusty dla każdego $x \in X$. Zbiór A nazywamy zbiorem Czebyszewa w przestrzeni Banacha X , gdy $P_A(x)$ jest singletonem (tzn. zbiorem jednoelementowym) dla każdego $x \in X$. Wiadomo, że dla każdego niepustego, domkniętego i wypukłego zbioru A i dla każdego $x \in X$ zbiór $P_A(x)$ jest co najwyżej singletonem (tzn. zbiorem jednoelementowym) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Banacha X jest ściśle wypukła. Natomiast na to, by dla każdego $x \in X$ zbiór $P_A(x)$ był singletonem potrzeba i wystarcza, aby przestrzeń Banacha X była jednostajnie wypukła (zob. np. [48]).

Definicja 21. Odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy funkcją Orlicza, gdy $\Phi(0) = 0$, Φ nie jest identycznie równa zero (tzn. $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$), Φ jest parzysta i wypukła na przedziale $(-b(\Phi), b(\Phi))$ i Φ jest lewostronnie ciągła w $b(\Phi)$, tzn. $\lim_{u \rightarrow b(\Phi)^-} \Phi(u) = \Phi(b(\Phi))$.

Funkcję Orlicza Φ nazywamy N -funkcją, gdy funkcja Orlicza Φ znika tylko w zerze, przyjmuje jedynie skończone wartości i spełnia następujące dwa warunki: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ oraz $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$.

Zauważmy, że każda funkcja Orlicza Φ jest ciągła na przedziale $(-b(\Phi), b(\Phi))$ (zob. [84], Rozdział I, Lemat 1.3).

Definicja 22. Funkcję Orlicza $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy wypukłą, gdy

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\Phi(u) + \Phi(v)}{2} \quad (1)$$

dla wszystkich $u, v \in \mathbb{R}$. Jeśli nierówność (1) jest ostra w przypadku $u \neq v$, to funkcję Φ nazywamy ściśle wypukłą (na $\mathbb{R}$).

Definicja 23 (Zob. również [3, 98]). Funkcję Orlicza $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy jednostajnie wypukłą w nieskończoności, gdy dla każdego $a \in (0, 1)$ istnieje $\delta_a \in (0, 1)$ taka, że

$$\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1-\delta_a)(\Phi(u) + \Phi(au)) \quad (2)$$

dla wszystkich $u \geq u_0$, gdzie $u_0 > 0$. Jeśli warunek (2) zachodzi z $u_0 = 0$, to mówimy, że funkcja Φ jest jednostajnie wypukła na $\mathbb{R}_+$ (więc również na $\mathbb{R}$ z wypukłości Φ).

Dla funkcji Orlicza Φ , definiujemy funkcję Ψ dopełniającą do Φ (w sensie Younga) wzorem:

$$\Psi(v) = \sup_{u \geq 0} \{u|v| - \Phi(u)\}.$$

Definicja 24. Mówimy, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta_2(\infty)$, gdy istnieją $K > 0$ i $u_0 > 0$ z $\Phi(u_0) < \infty$ takie, że dla wszystkich $u \geq u_0$ zachodzi nierówność $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$. Będziemy wówczas pisać, że $\Phi \in \Delta_2(\infty)$. Mówimy, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta_2(\mathbb{R}_+)$, gdy istnieje $K > 0$ takie, że dla wszystkich $u \geq 0$ zachodzi nierówność $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$. Będziemy wówczas pisać, że $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$.

Niech (Ω, Σ, μ) oznacza przestrzeń miary z miarą bezatomową, zupełną, σ -skończoną μ i niech $L^0(\mu) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią wszystkich (klas równoważności) Σ -mierzalnych funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na Ω . Powiemy, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta_2(\mu)$, gdy $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ w przypadku przestrzeni z miarą bezatomową skończoną oraz $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$, gdy przestrzeń miary jest bezatomowa nieskończona.

Dla danej funkcji Orlicza Φ , definiujemy na $L^0(\mu)$ wypukły funkcjonal (zob. [84, 98, 100, 105, 109]) $I_\Phi(x) = \int_\Omega \Phi(x(t))d\mu$. Przestrzeń Orlicza $L^\Phi(\mu)$ generowana przez funkcję Orlicza Φ jest przestrzenią liniową funkcji mierzalnych definiowaną w następujący sposób (zob. [108]):

$$L^\Phi(\mu) = \{x \in L^0(\mu) : I_\Phi(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}.$$

Jest ona wyposażona zazwyczaj w normę Luxemburga (zob. [98])

$$\|x\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

lub normę Orlicza (zob. [107, 108])

$$\|x\|_o = \sup \left\{ \int_\Omega |x(t)y(t)|d\mu : y \in L^\Psi, I_\Psi(y) \leq 1 \right\},$$

gdzie Ψ jest funkcją dopełniającą do Φ w sensie Younga.

Dla dowolnego $1 \leq p \leq \infty$ i $u \geq 0$ zdefiniujemy

$$s_p(u) = \begin{cases} (1 + u^p)^{\frac{1}{p}} & \text{dla } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{1, u\} & \text{dla } p = \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Oznaczmy, dla krótszego zapisu, $s_{\Phi,p}(x) = s_p \circ I_{\Phi}(x)$ dla wszystkich $1 \leq p \leq \infty$ i $x \in L^0(\mu)$. Funkcje s_p i $s_{\Phi,p}$ są wypukłe odpowiednio na $\mathbb{R}_+$ i na $L^0(\mu)$. Ponadto, funkcja s_p jest rosnąca na $\mathbb{R}_+$ dla $1 \leq p < \infty$, ale funkcja s_{∞} jest rosnąca jedynie na przedziale $[1, \infty)$.

Przestrzeń Orlicza można również wyposażyć w tzw. normę p-Amemiya, gdzie $p \in [1, \infty]$. Koncepcja tej normy pojawiła się po raz pierwszy w pracy S. Reisnera (zob. [110]) z 1988, gdzie Autor wprowadził tę normę dla przestrzeni Calderóna-Lozanovskiego. W roku 2000 w pracy [56], H. Hudzik i L. Maligranda zasugerowali zasadność podjęcia badań nad rodziną norm p-Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) w przestrzeniach Orlicza L^{Φ} . W konsekwencji powstała pierwsza ważna praca [25], napisana przez Y. Cuiego, L. Duana, H. Hudzika i M. Wisłę, kładąca solidne podwaliny dla dalszego rozwoju tychże badań. We wspomnianej pracy, scharakteryzowano punkty ekstremalne i ściłą wypukłość w przestrzeniach Orlicza dla całej rodziny norm p-Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) oraz uzyskano szereg podstawowych i kluczowych dla dalszych badań wyników. W powyższej pracy norma p-Amemiya dla $x \in L^0$ została zdefiniowana wzorem:

$$\|x\|_{\Phi,p} := \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_{\Phi,p}(kx), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Przestrzeń Orlicza z normą p-Amemiya $\|\cdot\|_{\Phi,p}$, $1 \leq p \leq \infty$ będziemy oznaczać krótko $L^{\Phi,p}$.

Wiadomo, że $\|x\|_{\Phi,1} = \|x\|_o$ w ogólności, tzn. nie tylko w przypadku, gdy Φ jest N-funkcją (zob. [56]) oraz, że norma Luxemburga $\|\cdot\|_{\Phi}$ i ∞ -Amemiya są sobie równe (zob. [25, 107]).

Warto nadmienić, że w pracy [56] pokazano, że jeżeli przestrzeń Orlicza jest ściśle wypukła przy normie $\|\cdot\|_{\Phi,1}$ lub $\|\cdot\|_{\Phi,\infty}$, to jest też ściśle wypukła przy normach $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ dla każdego $p \in (1, \infty)$ oraz, że istnieje funkcja Orlicza Φ taka, że $L^{\Phi}(\mu)$ jest ściśle wypukła przy każdej z norm $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ ($1 < p < \infty$) i nie jest ściśle wypukła ani dla normy $\|\cdot\|_{\Phi,1}$ ani też dla normy $\|\cdot\|_{\Phi,\infty}$. Od tego momentu nastąpił intensywny rozwój badań przestrzeni Orlicza oraz ogólniejszych od nich przestrzeni Musielaka-Orlicza wyposażonych w normę p-Amemiya z $p \in [1, \infty]$. Powstało wiele ważnych prac rozszerzających i uzupełniających dotychczasową wiedzę o geometrii tychże przestrzeni [18–21, 25, 26, 28–30, 33, 46, 47, 94, 122, 123].

Niech $p \in [1, \infty]$. Oznaczając przez p_+ prawostronną pochodną funkcji Φ na $[0, b(\Phi))$ i kładąc $p_+(b(\Phi)) = \lim_{u \rightarrow b(\Phi)^-} p_+(u)$, zdefiniujemy funkcję $\alpha_p : L^{\Phi,p} \rightarrow [-1, \infty]$ wzorem

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} I_{\Phi}^{p-1}(x) I_{\Psi}(p_+(|x|)) - 1, & \text{gdy } 1 \leq p < \infty, \\ -1, & \text{gdy } p = \infty \wedge I_{\Phi}(x) \leq 1, \\ I_{\Psi}(p_+(|x|)), & \text{gdy } p = \infty \wedge I_{\Phi}(x) > 1, \end{cases}$$

oraz funkcje $k_p^* : L^{\Phi,p} \rightarrow [0, \infty)$, $k_p^{**} : L^{\Phi,p} \rightarrow (0, \infty]$ wzorami

$$\begin{aligned} k_p^*(x) &= \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kx) \geq 0\} \quad (\text{z } \inf \emptyset = \infty), \\ k_p^{**}(x) &= \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kx) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Jest oczywistym, że $k_p^*(x) \leq k_p^{**}(x)$ dla każdego $1 \leq p \leq \infty$ i $x \in L^{\Phi,p}$.

Oznaczmy przez $K_p(x)$ zbiór wszystkich $k \in (0, \infty)$ pomiędzy $k_p^*(x)$ i $k_p^{**}(x)$, tzn. $K_p(x) = \{0 < k < \infty : k_p^*(x) \leq k \leq k_p^{**}(x)\}$. Zauważmy, że $K_p(x) = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k_p^*(x) = k_p^{**}(x) = \infty$. Ponadto, norma p-Amemiya $\|x\|_{\Phi,p}$, $x \neq 0$, jest wydobywana przez każdy punkt $k \in [k_p^*(x), k_p^{**}(x))$, gdy $k_p^*(x) < \infty$ i przez każdy punkt $k \in [k_p^*(x), k_p^{**}(x)]$, gdy

$k_p^{**}(x) < \infty$ (zob. [25]). Przypomnijmy również, że funkcja Orlicza Φ jest k_p^* -skończona (odpowiednio k_p^{**} -skończona), jeśli $k_p^*(x) < \infty$ (odpowiednio $k_p^{**}(x) < \infty$) dla wszystkich $x \in L^{\Phi,p}$. Mówimy, że funkcja Orlicza Φ jest k_p -jedyna, gdy $0 < k_p^*(x) = k_p^{**}(x) < \infty$ dla wszystkich $x \in L^{\Phi,p} \setminus \{0\}$. Oczywiście, Φ jest k_p -jedyna wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{card } K_p(x) = 1$ dla wszystkich $x \in L^{\Phi,p} \setminus \{0\}$.

Przejdźmy teraz do omówienia wyników z prac [K4] i [K5].

W pracy [K4] podano warunki konieczne i dostateczne na to, by przestrzeń Orlicza $(L^\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p})$ z normą p-Amemiyi $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ dla $p \in [1, \infty)$, generowana przez dowolną funkcję Orlicza Φ (a nie jedynie przez szczególny jej przypadek, tzn. przez N-funkcję), zbudowana nad przestrzenią miary bezatomowej skończonej i zupełnej oraz nad przestrzenią miary bezatomowej nieskończonej, ale σ -skończonej i zupełnej, posiadała własność jednostajnej wypukłości (praca [K4], Twierdzenie 3.5 i Twierdzenie 3.8, odpowiednio). Warunki te są następujące: $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, funkcja Orlicza Φ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$ i jednostajnie wypukła w nieskończoności, gdy przestrzeń miary (Ω, Σ, μ) , nad którą zbudowana jest przestrzeń Orlicza L^Φ , jest bezatomowa skończona i zupełna oraz Φ jest jednostajnie wypukła na $\mathbb{R}$ funkcją Orlicza, spełniającą warunek $\Delta_2(\mathbb{R}_+)$, gdy przestrzeń miary (Ω, Σ, μ) jest bezatomowa, nieskończona, ale σ -skończona i zupełna. W przypadku funkcyjnych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga (tj. ∞ -Amemiyi) kompletne kryteria dla jednostajnej wypukłości tych przestrzeni podali A. Kamińska (zob. [68], 1982r.) oraz H. Hudzik, A. Kamińska i M. Musielak (zob. [54], 1988r.). Główne twierdzenia uzyskane w [K4] obejmują w szczególności wynik H.W. Milnesa z 1957r.³, charakteryzujący jednostajną wypukłość w przestrzeniach Orlicza generowanych przez dowolne funkcje Orlicza i wyposażonych w normę Orlicza, a także szczególny jego przypadek, sformułowany jedynie dla przestrzeni Orlicza generowanych przez N-funkcje i z tą samą normą, przedstawiony wraz z dowodem w książce S.T. Chena (zob. [17], Twierdzenie 2.37). Krótko mówiąc, praca [K4] rozszerza, uzupełnia i dopełnia wiedzę na temat charakteryzacji jednostajnej wypukłości w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza generowanych przez dowolną funkcję Orlicza Φ i wyposażonych w normę p-Amemiyi, gdzie $p \in [1, \infty]$.

Z uwagi na bardziej ogólną postać normy p-Amemiyi, gdy $p \in (1, \infty)$ w stosunku do definicji normy Orlicza (tzn. 1-Amemiyi), dowód głównych wyników z pracy [K4] wymagał zastosowania pewnych nowych narzędzi ([K4], Twierdzenie 3.1 oraz [K4], Lemat 3.2), których prawdziwość należało najpierw wykazać. Uzyskano również ciekawy wniosek z Lematu 3.2 (patrz [K4], Wniosek 3.3), dający możliwość obliczania dla $p \in [1, \infty)$, normy p-Amemiyi $\|\chi_E\|_{\Phi,p}$ funkcji charakterystycznej χ_E dowolnego zbioru mierzalnego E miary dodatniej i skończonej w przestrzeni Orlicza nad miarą bezatomową, σ -skończoną, zupełną i generowanej przez N-funkcję Φ , która jest k_p -jedyna.

W omawianej pracy [K4], sformułowano również naturalnie nasuwające się Wnioski 3.6 i 3.9 oraz 3.7 i 3.10, wskazujące związki uzyskanych wyników z teorią punktu stałego i z teorią aproksymacji.

W 1984 A. Kamińska w pracy [67] podała warunki konieczne i dostateczne na jednostajną wypukłość w każdym kierunku funkcyjnych przestrzeni Musielaka-Orlicza z normą Luxemburga. Następnie, w pracy [69], Autorka uogólniła uzyskany wynik podając kompletną charakteryzację własności URED w funkcyjnych przestrzeniach Musielaka-Orlicza typu Bochnera $L^\Phi(X)$ z normą Luxemburga przy założeniu óśrodkowości przestrzeni Banacha X . Warto nadmienić, iż inny dowód charakteryzacji własności URED dla funkcyjnych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga generowanych przez N-funkcje autorstwa H. Hudzika został pokazany w monografii pod redakcją W. A. Kirka i B. Simsa [78], Twierdzenie 3.2 (Rozdział 12, str. 357). Z kolei charakteryzację własności URED dla przestrzeni Orlicza generowanych przez N-funkcje, z normą Orlicza nad przestrzenią miary bezatomowej skończonej i zupełnej, uzyskali w 1995r. T. F. Wang, Z. R. Shi i Y. Cui w pracy [117] (zob. również książka S. Chena [17], Twierdzenie

³zob. [104] lub książka M. M. Rao i Z. D. Ren [109], Twierdzenie 8 (Rozdział VII), str. 288.

2.33).

Praca [K5] stanowi kontynuację badań nad własnością URED w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza z normą p -Amemiya dla dowolnego $p \in (1, \infty)$. Własność tę bada się znacznie trudniej niż znacznie silniejszą od niej jednostajną wypukłość. W pracy [K5] podano warunki dostateczne na to, by przestrzeń Orlicza $(L^\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p})$ nad przestrzenią miary bezatomowej skończonej i zupełnej z normą p -Amemiya $\|\cdot\|_{\Phi,p}$, $p \in [1, \infty)$, generowana przez N -funkcję Φ , była jednostajnie wypukła w każdym kierunku (patrz [K5], Twierdzenie 4). Bardziej złożona definicja normy p -Amemiya, gdy $p \in (1, \infty)$ wymusiła konieczność sformułowania i udowodnienia pewnych nowych pomocniczych lematów (patrz [K5], Lemat 5 i Lemat 6), na ogół ogólniejszych od znanych dotychczas narzędzi wykazanych jedynie dla przestrzeni Orlicza z normą Orlicza generowanych przez N -funkcje (zob. [117] lub [17]). W dowodzie Lematu 6 ważnym było wykorzystanie ciągłości funkcji Orlicza $f(u) := s_p(|u|) - 1$ (funkcja s_p została zdefiniowana na początku tego podrozdziału wzorem (3)) zmiennej rzeczywistej u , gdzie $p \in [1, \infty)$ oraz następującej własności funkcji Orlicza Φ znikającej tylko w zerze i przyjmującej jedynie skończone wartości (w szczególności N -funkcji):

$$\Phi(|u| - |v|) \leq |\Phi(2u) - \Phi(2v)| \text{ dla wszystkich } u, v \in \mathbb{R}.$$

Warto nadmienić, że powyższe własności były również wykorzystywane w pracy [K4] w dowodach dostateczności głównych wyników (tzn. Twierdzenia 3.5 i Twierdzenia 3.8).

W pracy [K5] sformułowano i udowodniono również wniosek mówiący, iż ścisła wypukłość N -funkcji Φ oraz warunek $\Delta_2(\infty)$ dla funkcji Φ gwarantują jednostajną wypukłość w każdym kierunku przestrzeni Orlicza z normą p -Amemiya, $p \in [1, \infty)$ nad przestrzenią miary bezatomowej, skończonej (zob. [K5], Wniosek 2). Opierając się na Twierdzeniu 3.1 z tego podrozdziału oraz Twierdzeniu 4 z pracy [K5], podano również prosty wniosek (zob. [K5], Wniosek 3) wskazujący związek własności URED ze słabą własnością punktu stałego poprzez pojęcie struktury normalnej w tych przestrzeniach.

3.2.5 Łatwo wyliczalna quasi-norma w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza -praca [K2]

W wielu zagadnieniach analizy nieliniowej, teorii przepływu płynów, równań różniczkowych, równań całkowych i teorii operatorów używa się w sposób naturalny zamiast przestrzeni Lebesgue'a,⁴ ogólniejszych od nich przestrzeni Orlicza. Przestrzeń Lebesgue'a, będące szczególnym przypadkiem przestrzeni Orlicza, wyposażone są w normę, która jest łatwo wyliczalna przy pomocy jedynie potęgowania i całkowania. Stanowi to niewątpliwą ich zaletę oraz wpływa na łatwość aplikacji. Niestety, klasyczne normy Orlicza, bądź Luxemburga w przestrzeniach Orlicza są zazwyczaj trudno wyliczalne (poza normą generowaną przez szczególne przypadki funkcji Orlicza oraz normą funkcji charakterystycznej zbioru mierzalnego dodatniej i skończonej miary), co znacznie utrudnia możliwości zastosowań tychże przestrzeni, a nawet mocno je ogranicza. Dość naturalnym było więc pytanie, czy można dla możliwie szerokiej klasy przestrzeni Orlicza wprowadzić równoważną quasi-normę, o prostej (z obliczeniowego punktu widzenia) definicji. Źródłem inspiracji był przykład takiej łatwo wyliczalnej quasi-normy równoważnej normie Luxemburga w przestrzeniach Orlicza $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ generowanych przez funkcję Orlicza $\Phi(u) = |u|^p \log(e + |u|)$, $p \geq 1$, podany przez T. Iwańca and A. Verde w 1999r. w pracy [63] oraz ogólniejszy, choć podobny, podany przez M. Krbećka and H.J. Schmeissera w 2012 r. w pracy [85] dla funkcji Orlicza $\Phi(u) = |u|^p \log^\alpha(e + |u|)$ z $p \geq 1$ i $\alpha > 0$.

Odpowiedzią na powyższy problem jest praca [K2], powstała w ramach grantu Narodowego Centrum Nauki, która pokazuje, że w niewąskiej klasie przestrzeni Orlicza klasyczne normy mogą być zastąpione łatwo wyliczalną quasi-normą, która jest im równoważna. W pracy

⁴W niektórych źródłach znane pod nazwą przestrzeni Riesa.

tej uzyskano, przy pewnych założeniach o funkcji Orlicza Φ , potędze p ($p \geq 1$) oraz funkcji ρ , definiowanej wzorem $\rho(t) = \frac{\Phi(t)}{t^p}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$, formułę na quasi-normę wykorzystującą dolne i górne indeksy Simonenki stosowne do przestrzeni miary, włożenia funkcyjnej przestrzeni Orlicza $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ w odpowiednią, funkcyjną przestrzeń Köthe'go $E = E(\Omega, \Sigma, \mu)$, całkowanie oraz takie operacje algebraiczne jak: mnożenie, dzielenie i potęgowanie (patrz główne twierdzenia pracy: [K2], Twierdzenie 3.1 i Twierdzenie 3.8). W przypadku, gdy miara μ jest bezatomowa, skończona i zupełna, E jest funkcyjną przestrzenią Lebesgue'a $L^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ z $r \in [1, p_S^l(\Phi)]$, gdzie $p_S^l(\Phi) := \inf_{t \geq 1} \frac{t\Phi'_+(t)}{\Phi(t)}$ jest dolnym indeksem Simonenki a Φ'_+ jest prawostronną pochodną funkcji Φ , natomiast gdy miara μ jest bezatomowa nieskończona ale σ -skończona i zupełna, jako E bierzemy wagową przestrzeń Lebesgue'a $L_\omega^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ z $r \in [1, p_S^a(\Phi)]$, gdzie $p_S^a(\Phi) := \inf_{t > 0} \frac{t\Phi'_+(t)}{\Phi(t)}$ (dolny indeks Simonenki), z wagą $\omega(t) := \sum_{n=1}^{\infty} [2^n(1 + \mu(T_n))]^{-1} \chi_{T_n}$, gdzie $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Σ -mierzalnych parami rozłącznych zbiorów dodatniej i skończonej miary takich, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = \Omega$. Udowodniono też konieczność założonych warunków $\nabla_3(\infty)$ oraz $\nabla^2(\infty)$ dla funkcji ρ [lub, równoważnie, odpowiednio warunków $\Delta_3(\infty)$ oraz $\Delta^2(\infty)$ dla funkcji ρ^{-1} , odwrotnej do ρ] ([K2], Twierdzenie 3.5, Twierdzenie 3.6, Twierdzenie 3.10 oraz Twierdzenie 3.11) w większości rozważonych przypadków.

Przypomnijmy tutaj definicje warunków $\Delta_3(\infty)$, $\Delta^2(\infty)$, $\nabla_3(\infty)$ i $\nabla^2(\infty)$ (zob. [84]). Mówimy, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta_3(\infty)$, jeżeli Φ jest równoważna funkcji $|u|\Phi(u)$ w nieskończoności, tzn. istnieją stałe $K, L > 0$ oraz $u_0 > 0$ takie, że $\Phi(Ku) \leq |u|\Phi(u) \leq \Phi(Lu)$ dla wszystkich $u \in \mathbb{R}$ takich, że $|u| \geq u_0$. Mówimy, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta^2(\infty)$, jeżeli Φ jest równoważna funkcji Φ^2 w nieskończoności, tzn. istnieją stałe $K, L > 0$ oraz $u_1 > 0$ takie, że $\Phi(Ku) \leq \Phi^2(u) \leq \Phi(Lu)$ dla wszystkich $u \geq u_1$. Mówimy, że funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ spełnia warunek $\nabla_3(\infty)$, jeżeli istnieją stałe $K, L > 0$ takie, że dla dowolnego $v \geq 1$ spełnione są nierówności $Kf(v) \leq f(f(v)v) \leq Lf(v)$. Mówimy, że funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ spełnia warunek $\nabla^2(\infty)$, jeżeli istnieją stałe $K, L > 0$ takie, że nierówności $Kf(v) \leq f(v^2) \leq Lf(v)$ są prawdziwe dla wszystkich $v \geq 1$.

Warto nadmienić, że w pracy [K2] wyjaśniono, dlaczego w przypadku przestrzeni Orlicza nad miarą bezatomową nieskończoną, ale σ -skończoną wystarczy posługiwać się jedynie warunkami $\nabla_3(\infty)$ oraz $\nabla^2(\infty)$ dla funkcji ρ , a nie, jak mogłoby się wydawać, bardziej naturalnymi w tym przypadku (dla funkcji ρ) warunkami $\nabla_3(\mathbb{R}_+)$ oraz $\nabla^2(\mathbb{R}_+)$ (równoważnie warunkami $\Delta_3(\mathbb{R}_+)$ oraz $\Delta^2(\mathbb{R}_+)$ dla funkcji ρ^{-1} odpowiednio). Wskazano nadto, kiedy potęga p generująca przedmiotową quasi-normę z pracy [K2] jest jedyna i równa dolnemu indeksowi Simonenki, stosownemu do przestrzeni miary.

4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

4.1 Lista pozostałych publikacji, niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

- [R1] H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Moduli and characteristics of monotonicity in general Banach lattices and in Orlicz spaces in particular*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 9, 3407–3423.
- [R2] H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Monotonicity characteristic of Köthe-Bochner spaces*, J. Math. Anal. Appl. **349** (2009), no. 2, 459–468.
- [R3] P. Foralewski, H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbec, *Moduli and characteristics of monotonicity in some Banach lattices*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Art. ID 852346, 22 pp., DOI: 10.1155/2010/852346.

- [R4] P. Foralewski, H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbeć, *Characteristic of monotonicity of Orlicz function spaces equipped with the Orlicz norm*, Comment. Math. **53** (2013), no. 2, 421–432.
- [R5] P. Foralewski, H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbeć, M. Wójtowicz, *On the moduli and characteristic of monotonicity in Orlicz-Lorentz function spaces*, J. Convex Anal. **20** (2013), no. 4, 955–970.
- [R6] Y. Cui, W. Huang, H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Generalized von Neumann–Jordan constant and its relationship to the fixed point property*, Fixed Point Theory Appl. 2015, 2015:40, 11 pp., DOI: 10.1186/s13663-015-0288-3, <https://fixedpointtheoryandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13663-015-0288-3>.
- [R7] T. Chawziuk, Y. Cui, Y. Estaremi, H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Composition and multiplication operators between Orlicz function spaces*, J. Inequal. Appl. 2016, Paper no. **52**, 18 pp., DOI: 10.1186/s13660-016-0972-9.
- [R8] Y. Cui, H. Hudzik, R. Kaczmarek, H. Ma, Y. Wang, M. Zhang, *On some applications of geometry of Banach spaces and some new results related to the fixed point theory in Orlicz sequence spaces*, J. Math. Study **49** (2016), no. 4, 325–378.
- [R9] H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbeć, *In some symmetric spaces monotonicity properties can be reduced to the cone of rearrangements*, Aequationes Math. **90** (2016), no. 1, 249–261.
- [R10] L. Chen, Y. Cui, H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Ellipsoidal geometry of Banach spaces and applications*, J. Nonlinear Convex Anal. **18** (2017), no. 2, 279–308.

4.2 Krótkie omówienie wyników pozostałych publikacji

4.2.1 Moduły i charakterystyki monotoniczności w różnych przestrzeniach Köthe’go oraz pewne własności monotonicznościowe w przestrzeniach symetrycznych -prace: [R1]-[R5] i [R9]

Rozpocznijmy od przypomnienia najważniejszych pojęć. Funkcję $\delta_{m,X} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, zdefiniowaną wzorem:

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x - y\| : 0 \leq y \leq x, \|x\| = 1, \|y\| \geq \varepsilon\},$$

nazywamy (dolnym) modułem monotoniczności kraty Banacha X . Moduł monotoniczności $\delta_{m,X}$ jest funkcją niemalejącą i wypukłą na $[0, 1]$ (zob. [87]), więc i ciągłą na $[0, 1]$ (w punkcie 1 moduł (dolnej) monotoniczności $\delta_{m,X}$ funkcją ciągłą być nie musi -patrz [R3], Przykłady 2.3 i 2.4) oraz $\delta_{m,X}(\varepsilon) \leq \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon \in [0, 1]$. Wiele podstawowych i ważnych wyników związanych z powyższym modułem zawiera praca W. Kurca [87].

Charakterystyką monotoniczności kraty Banacha X nazywamy liczbę $\varepsilon_{0,m}(X) \in [0, 1]$ definiowaną wzorem:

$$\varepsilon_{0,m}(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 1] : \delta_{m,X}(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in (0, 1] : \delta_{m,X}(\varepsilon) > 0\}$$

(przy czym $\inf \emptyset := 1$). Charakterystyka monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ pozwala na określenie ”stopnia monotoniczności” kraty Banacha X (im bliżej wartości zero tym silniej monotoniczna).

Zarówno charakterystyka monotoniczności jak i moduł monotoniczności kraty Banacha X powiązane są z dwoma ważnymi własnościami monotonicznościowymi: jednostajną monotonicznością (oznaczaną w skrócie UM) oraz, słabszą od niej, ścisłą monotonicznością (w skrócie STM), wprowadzonymi w [6] przez G. Birkhoffa w 1940. Przypomnijmy, że kratę Banacha X nazywamy jednostajnie monotoniczną, gdy dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$ istnieje $\delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ taka, że $\|x - y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$, o ile $0 \leq y \leq x$, $\|x\| = 1$ i $\|y\| \geq \varepsilon$. Kratę Banacha X nazywamy ściśle

monotoniczną, gdy $\|y\| < \|x\|$ dla wszystkich $x, y \in X_+$ takich, że $y \leq x$ i $y \neq x$. Nietrudno zauważyć, iż $X \in (UM) \Leftrightarrow \varepsilon_{0,m}(X) = 0$, $X \in (UM) \Leftrightarrow \delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, 1]$ oraz $X \in (STM) \Leftrightarrow \delta_{m,X}(1) = 1$. Nadmienimy, iż w przypadku przestrzeni Köthe'go E , jednostajna monotoniczność (odp. ścisła monotoniczność) jest zawężeniem pojęcia jednostajnej wypukłości (odp. ścisłej wypukłości) do par elementów nieujemnych, porównywalnych ze stożka dodatniego E_+ . Wynik ten został uzyskany przez H. Hudzika, A. Kamińską i M. Mastylę w roku 2000 (zob. [51, Twierdzenie 1]).

Własności monotonicznościowe znalazły zastosowanie w zdominowanej, najlepszej aproksymacji [22, 23, 40, 83, 88, 89], teorii punktu stałego [5], czy teorii ergodycznej [1, 2]. Znane są też ich związki z zespolonymi własnościami wypukłościowymi [60], które z kolei, są powiązane z teorią wektorowo-wartościowych funkcji analitycznych. Wiele ważnych wyników dotyczących krat i ich różnych własności monotonicznościowych można znaleźć w książce G. Birkhoffa [6], monografii [127], pracy przeglądowej [40], w pracach [1, 2, 5, 10, 12, 13, 22, 23, 27, 29, 49, 51, 55, 60, 83, 87–90, 99] oraz [R1]–[R5] z podrozdziału 4.1.

W literaturze dobrze znana jest również inna charakterystyka monotoniczności $\tilde{\varepsilon}_{0,m}(X)$ definiowana wzorem: $\tilde{\varepsilon}_{0,m}(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0: \eta_{m,X}(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \geq 0: \eta_{m,X}(\varepsilon) > 0\}$, gdzie $\eta_{m,X}$ jest (górnym) modułem monotoniczności zdefiniowanym, dla każdego $\varepsilon \geq 0$, wzorem:

$$\begin{aligned}\eta_{m,X}(\varepsilon) &= \inf\{\|x + y\| - 1: x, y \in X_+, \|x\| = 1, \|y\| \geq \varepsilon\} \\ &= \inf\{\|x + y\| - 1: x, y \in X_+, \|x\| = 1, \|y\| = \varepsilon\}\end{aligned}\quad (4)$$

(zob. [88] i [90]). Wiadomo, że $\varepsilon_{0,m}(X) \leq \tilde{\varepsilon}_{0,m}(X) \leq \min\{1, 2\varepsilon_{0,m}(X)\}$ (patrz [R3], czy [R1], Theorem 1) oraz, że $X \in (UM) \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_{0,m}(X) = 0$. W 1999 w pracy [99] Y. M. Lü, J. M. Wang i T. F. Wang wyliczyli charakterystykę monotoniczności $\tilde{\varepsilon}_{0,m}(L^\Phi)$ dla przestrzeni Orlicza generowanych przez N-funkcje Φ nad przestrzenią miary bezatomowej, σ -skończonej i zupełnej z normami Luxemburga i Orlicza. Charakterystyką tą zajmował się również H. J. Lee w pracy [90].

Powodem, dla którego warto wyliczać lub znajdować dobre oszacowania charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ w kratkach Banacha X jest następujące twierdzenie autorstwa A. Betiuk-Pilarskiej i S. Prusa z 2008 roku:

Twierdzenie 4.1 (zob. [5], Twierdzenie 3.1). *Jeżeli X jest słabo ortogonalną kratą Banacha z charakterystyką monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$, to X ma słabo normalną strukturę.*

W konsekwencji X ma słabą własność punktu stałego. Przypomnijmy, że kratę Banacha X nazywamy słabo ortogonalną, gdy $\liminf_{n \rightarrow \infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_n\| \wedge \|x_m\| = 0$ dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ z X słabo zbieżnego do zera.

Przejdźmy teraz do omówienia najważniejszych wyników. Artykuły [R1] i [R2] zawierają wyniki z rozprawy doktorskiej habilitanta. Prace [R3]–[R5] oraz [R9] stanowią kontynuację jej problematyki. Kilka ważnych narzędzi ułatwiających wyznaczenie charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(E)$ przestrzeni Köthe'go E , a nawet charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ dowolnej kraty unormowanej X , zawiera praca [R3].

Praca [R1] zawiera ogólne wzory umożliwiające obliczenie dwóch charakterystyk monotoniczności dla dowolnej kraty Banacha X . Przy założeniach, że funkcja Orlicza Φ znika tylko w zerze, Φ spełnia warunek Δ_2 stosowny do przestrzeni miary i $\Phi(1) = 1$, uzyskano najlepsze oszacowania z dołu i z góry modułu (dolnej) monotoniczności przestrzeni Orlicza L^Φ z normą Luxemburga nad przestrzenią miary bezatomowej (skończonej albo nieskończonej, ale σ -skończonej) oraz w przypadku miary liczącej, przy pomocy zarówno indeksów Simonenki i Lindberga (stosownych do rozważanego przypadku miary), jak również przy pomocy pewnych dwóch parametrów dla generującej funkcji Orlicza Φ (odpowiednich do rozważanego przypadku miary). Wyliczono lub oszacowano wartości dwóch charakterystyk monotoniczności w przypadku funkcyjnych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga oraz obliczono wartość dolnego

modułu monotoniczności w punkcie 1 dla funkcyjnych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga. Ponadto, w przypadku skończenie wymiarowych krat Banacha X podano interpretację geometryczną charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$. Mianowicie, w skończenie wymiarowej kratce Banacha X , charakterystyka monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ jest długością najdłuższego odcinka porządkowego leżącego na sferze jednostkowej w stożku dodatnim X_+ kraty X (zob. [R1], Wniosek 3).

Przypomnijmy teraz definicje przestrzeni oraz kraty Köthego-Bochnera $E(X)$. Niech (Ω, Σ, μ) będzie zupełną i σ -skończoną przestrzenią miary i niech E oznacza przestrzeń Köthego $E = (E, \|\cdot\|_E)$ zbudowaną nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) . Dla danej przestrzeni Banacha $X = (X, \|\cdot\|_X)$, przestrzenią Köthego-Bochnera $E(X)$ nazywamy przestrzeń liniową wszystkich (klas równoważności względem relacji równości funkcji μ -prawie wszędzie) silnie Σ -mierzalnych funkcji x (o wartościach rzeczywistych) z Ω do X takich, że funkcja $[x] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $[x](\omega) := \|x(\omega)\|_X$ należy do E , wyposażonych w normę $\|x\|_{E(X)} = \|[x]\|_E$. $E(X)$ jest przestrzenią Banacha oraz, jeśli dodatkowo, X jest kratą Banacha, to $E(X)$ jest również kratą Banacha (z relacją $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(\omega) \leq y(\omega)$ μ -prawie wszędzie). Więcej informacji o powyższych przestrzeniach można znaleźć między innymi w [11, 95].

W pracy [R2] uzyskano optymalne (tj. najlepsze) oszacowania charakterystyki monotoniczności generowanej przez dolny moduł monotoniczności dla funkcyjnych przestrzeni Köthego-Bochnera $E(X)$ ([R2], Twierdzenie 2) wraz z kilkoma istotnymi wnioskami ([R2], Wnioski 1-6). Podano również warunki konieczne i dostateczne na to, by ciągowa kratka Köthego-Bochnera $e((X_n)_{n=1}^\infty)$, gdzie e jest ciągową przestrzenią Köthego, a $X_n = (X_n, \|\cdot\|_n)$, $n \in \mathbb{N}$ są rzeczywistymi kratami Banacha, była ściśle monotoniczna oraz jednostajnie monotoniczna ([R2], Twierdzenie 3 i Twierdzenie 4).

Praca [R3] powstała w ramach realizacji jednego z zadań grantu naukowego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Zawiera wyniki ogólne dla krat unormowanych (np. krat Banacha) oraz dla szczególnego ich przypadku, tj. krat Köthego. Najważniejszymi wynikami ogólnymi pracy [R3] są: Twierdzenie 2.1 oraz Twierdzenie 2.8 wraz z Wnioskiem 2.9.

Twierdzenie 2.1 (zob. sformułowanie Twierdzenia 4.2 poniżej) podaje, między innymi, nowy, dokładny wzór na charakterystykę monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ dowolnej kraty unormowanej X (np. kraty Banacha) przy pomocy wartości granicy lewostronnej w jedynce (dolnego) modułu monotoniczności $\delta_{m,X}$. Z kolei Twierdzenie 2.8 (zob. Twierdzenie 4.3 poniżej) wraz z Wnioskiem 2.9 dotyczą tylko przestrzeni Köthego i umożliwiają łatwiejsze wyliczenie w nich charakterystyki monotoniczności (struktura przestrzeni Köthego umożliwiła uproszczenie definicji charakterystyki monotoniczności poprzez wprowadzenie dla przestrzeni Köthego pewnego nowego modułu $\hat{\delta}_{m,E}$ (zob. [R3], wzór (2.22) lub wzór (7) poniżej), a następnie pokazanie, że ta uproszczona charakterystyka monotoniczności i charakterystyka monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(E)$ są identyczne w przestrzeniach Köthego E). Narzędzia te ułatwiają znajdowanie dokładnych wartości lub nie najgorszych oszacowań charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(E)$ w różnych przestrzeniach Köthego E .

Przytoczmy teraz sformułowania Twierdzenia 2.1, Twierdzenia 2.8 oraz Wniosku 2.9.

Twierdzenie 4.2 (zob. [R3], Twierdzenie 2.1). *Dla dowolnej kraty unormowanej X zachodzi równość:*

$$\varepsilon_{0,m}(X) = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^-} \delta_{m,X}(\varepsilon). \quad (5)$$

Ponadto,

$$\delta_{m,X}(1 - \delta_{m,X}(\varepsilon)) = 1 - \varepsilon \quad (6)$$

dla dowolnego $\varepsilon \in (\varepsilon_{0,m}(X), 1]$, gdy $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$, jak również w przypadku, gdy $\varepsilon = \varepsilon_{0,m}(X) = 1$.

W tej samej pracy pokazano, że w ogólności nie można zastąpić w równości (5) liczby $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1^-} \delta_{m,X}(\varepsilon)$ liczbą $\delta_{m,X}(1)$ (zob. [R3], Przykłady 2.3 i 2.4).

Przytoczmy teraz definicję modułu monotoniczności $\widehat{\delta}_{m,E} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dla przestrzeni Köthego $E = (E, \leq, \|\cdot\|)$ wprowadzoną w pracy [R3]:

$$\widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) = \inf \{1 - \|x - x\chi_A\|_E : x \geq 0, \|x\|_E = 1, A \in \Sigma, \|x\chi_A\|_E \geq \varepsilon\}. \quad (7)$$

Charakterystyka monotoniczności $\widehat{\varepsilon}_{0,m}(E)$ dla przestrzeni Köthego E , związana z modulem monotoniczności $\widehat{\delta}_{m,E}$, jest liczbą zdefiniowaną wzorem:

$$\widehat{\varepsilon}_{0,m}(E) = \sup \left\{ \varepsilon \in [0, 1] : \widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) = 0 \right\} = \inf \left\{ \varepsilon \in [0, 1] : \widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) > 0 \right\},$$

(gdzie $\inf \emptyset := 1$). Na podstawie [R3], Stwierdzenie 2.6, dla dowolnej przestrzeni Köthego E prawdziwy jest następujący wzór:

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_{0,m}(E) &= \sup \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_n\chi_{A_n}\|_E : x_n \in S_+(E), A_n \in \Sigma \right. \\ &\quad \left. \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N} \text{ i } \|x_n\chi_{A_n}\|_E \rightarrow 1 \right\}. \end{aligned}$$

Ponadto

Twierdzenie 4.3 (Zob. [R3], Twierdzenie 2.8). *Dla dowolnej przestrzeni Köthego E*

$$\varepsilon_{0,m}(E) = \widehat{\varepsilon}_{0,m}(E). \quad (8)$$

Z powyższego Twierdzenia (zob. [R3], Wniosek 2.9) otrzymujemy, że dla przestrzeni Köthego E mamy równości

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0,m}(E) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^-} \sup \{ \|x - x\chi_A\|_E : x \in S_+(E), A \in \Sigma, \|x\chi_A\|_E \geq \varepsilon \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^-} \sup \{ \|x - x\chi_A\|_E : x \in S_+(E), A \in \Sigma, \|x\chi_A\|_E = \varepsilon \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Podsumowując, wzór (5), a w przypadku przestrzeni Köthego również wzory (8) i (9), stanowią narzędzia ułatwiające wyliczenie charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(E)$ w przestrzeniach Köthego E .

Warto też wspomnieć o Stwierdzeniu 2.10, podającym nowy wzór na znaną już wcześniej w literaturze charakterystykę monotoniczności dla krat Banacha X definiowaną przy pomocy modułu (górnej) monotoniczności określonego wzorem (4). W pracy [R3] wyliczono również charakterystykę monotoniczności generowaną przez dolny moduł monotoniczności dla funkcyjnych i ciągowych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga generowanych przez dowolną funkcję Orlicza Φ . W najtrudniejszym przypadku funkcyjnym wyrażono charakterystykę monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(L^\Phi)$ przy pomocy pewnego wyrażenia liczbowego zależnego wyłącznie od generującej funkcji Orlicza Φ . Natomiast w ciągowych przestrzeniach Orlicza ℓ^Φ z normą Luxemburga formuła na charakterystykę $\varepsilon_{0,m}(\ell^\Phi)$ jest w najtrudniejszym przypadku bardziej skomplikowana i nie tak bezpośrednia jak dla przypadku funkcyjnego (tzn. zależy nie tylko od generującej funkcji Orlicza Φ). Dodatkowo, praca [R3] zawiera trzy przykłady (zob. Przykłady: 3.11, 3.12 i 3.13) ilustrujące dlaczego w przypadku ciągowych przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga uzyskanie lepszego (tzn. bardziej konstruktywnego) wzoru na charakterystykę monotoniczności jest problemem trudnym.

W pracy [R4] rozważono problem wyliczenia lub oszacowania charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(L_\sigma^\Phi)$ funkcyjnych przestrzeni Orlicza L_σ^Φ z normą Orlicza $\|\cdot\|_\sigma$ generowanych przez dowolną funkcję Orlicza Φ . Z uwagi na specyfikę normy Orlicza, znalezienie dokładnych wartości powyższej charakterystyki monotoniczności nie w każdym przypadku było zadaniem prostym. W przypadku, gdy miara jest skończona, funkcja Orlicza Φ znika poza

zerem, $\sup_{u>0}\{A|u| - \Phi(u)\} = \infty$, gdzie $A = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u}$ i Φ spełnia warunek $\Delta_2(\infty)$, podano jedynie dolne i górne oszacowania charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(L_o^\Phi)$ funkcyjnych przestrzeni Orlicza z normą Orlicza. W pozostałych przypadkach podano dokładne wartości charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(L_o^\Phi)$. Dodatkowo odnotowano dwie uwagi dotyczące ścisłej monotoniczności i porządkowej gładkości w przestrzeniach Köthego. Pokazano w jednej z nich, że własność ścisłej monotoniczności przestrzeni Köthego $E = (E, \|\cdot\|_E)$ i/lub jej Köthe dualu $E' = (E', \|\cdot\|_{E'})$ może być użyta do porównania nośników $x \in E \setminus \{\theta\}$ i $y \in S(E')$, gdzie $\langle x, y \rangle = \|x\|_E$, $\langle x, y \rangle := \int_\Omega x(t)y(t)d\mu$. Udowodniono również, że każdy element $x \in S_+(E)$ z $\mu(\Omega \setminus \text{supp } x) = 0$ jest punktem porządkowej gładkości w E , jeżeli E jest porządkowo ciągłą przestrzenią Köthego. Przypomnijmy, że punkt $x \in S_+(E)$, gdzie $E = (E, \|\cdot\|_E)$ jest przestrzenią Köthego, nazywamy punktem porządkowej gładkości, gdy $\text{Grad}(x) := \{x^* \in S(E^*) : x^*(x) = \|x\|_E\}$ (E^* jest dualiem topologicznym E) nie zawiera porządkowych przedziałów innych niż tylko jednopunktowe. Przestrzeń Köthego E nazywamy porządkowo gładką, gdy wszystkie punkty $x \in S_+(E)$ są punktami porządkowej gładkości. Przestrzeń Köthego $E = (E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy porządkowo ciągłą, gdy dla każdego elementu $x \in E$ i każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ w E_+ z $0 \leq x_n \leq |x|$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \rightarrow 0$ μ -prawie wszędzie, mamy, że $\|x_n\|_E \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Przestrzenie Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\Phi,\omega}$, wprowadzone przez A. Kamińską na początku lat 90-tych ubiegłego wieku (zob. [66, 70, 71]), stanowią interesujące, ważne i naturalne uogólnienie przestrzeni Orlicza. Stanowią szczególny przypadek tzw. uogólnionych przestrzeni Lorentza wprowadzonych w najnowszej pracy A. Kamińskiej i Y. Raynaud [73]. Wprowadzenie przestrzeni Orlicza-Lorentza szybko dało impuls do kontynuacji i rozwoju badań nad ich własnościami geometrycznymi i topologicznymi przez wielu matematyków (zob. np. [50, 52, 53, 72, 74, 92, 93]). Według danych MathSciNet ze stycznia 2019r., liczba prac zawierających w tytule powyższe przestrzenie bądź ich uogólnienie osiągnęła wartość 76. Nadmienimy, iż przestrzenie Orlicza-Lorentza również zostały uogólnione do tzw. uogólnionych przestrzeni Orlicza-Lorentza, gdzie funkcją generującą zamiast funkcji Orlicza jest funkcja Musielaka-Orlicza o pewnych monotonicznościowych własnościach. Poświęcone są im, między innymi, prace [34–37, 41, 42, 81]).

Przypomnijmy teraz definicję funkcyjnych przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\Phi,\omega}$. Niech $L^0 = L^0([0, \gamma))$ będzie przestrzenią (klas równoważności) mierzalnych w sensie Lebesgue’a funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na przedziale $[0, \gamma)$, gdzie $\gamma \leq \infty$. Oznaczając przez m miarę Lebesgue’a, dla każdego $x \in L^0$ zdefiniujemy jego funkcję dystrybucji $\mu_x : [0, +\infty) \rightarrow [0, \gamma]$ wzorem:

$$\mu_x(\lambda) = m\{t \in [0, \gamma) : |x(t)| > \lambda\}$$

(zob. [4], [86] i [96]) i jego nierosnące przestawienie (nonincreasing rearrangement) $x^* : [0, \gamma) \rightarrow [0, \infty]$ wzorem

$$x^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_x(\lambda) \leq t\}$$

(przy czym $\inf \emptyset = \infty$). Nierosnącą i lokalnie całkowaną (ale nie identycznie równą zero) funkcję $\omega : [0, \gamma) \rightarrow \mathbb{R}_+$, gdzie $\gamma \leq \infty$ nazywamy funkcją wagową. Mówimy, że funkcja wagowa ω jest regularna, gdy istnieje $\eta > 0$ takie, że

$$\int_0^{2t} \omega(s)ds \geq (1 + \eta) \int_0^t \omega(s)ds$$

dla każdego $t \in [0, \gamma/2)$ (zob. [71], [49]).

Dla dowolnej funkcji Orlicza Φ oraz funkcji wagowej ω zdefiniujemy funkcyjną przestrzeń Orlicza-Lorentza

$$\Lambda_{\Phi,\omega}([0, \gamma)) = \{x \in L^0 : I_{\Phi,\omega}(\lambda x) = \int_0^\gamma \Phi(\lambda x^*(t))\omega(t)dt < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

(zob. [50, 70]), która jest symetryczną przestrzenią Banacha przy normie Luxemburga

$$\|x\|_{\Lambda_{\Phi,\omega}} = \inf\{\lambda > 0 : I_{\Phi,\omega}(x/\lambda) \leq 1\}.$$

Przestrzenie te będziemy oznaczać $\Lambda_{\Phi,\omega} = (\Lambda_{\Phi,\omega}, \|\cdot\|_{\Lambda_{\Phi,\omega}})$.

Praca [R5], powstała w ramach grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, stanowi istotne uogólnienie wyników zawartych w pracy [R3], gdzie wyliczono charakterystykę monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(L^\Phi)$ dla przestrzeni Orlicza L^Φ z normą Luxemburga. W pracy [R5] obliczono charakterystykę monotoniczności

$$\varepsilon_{0,m}(\Lambda_{\Phi,\omega}) = \sup\{\varepsilon \in [0, 1] : \delta_{m,\Lambda_{\Phi,\omega}}(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in (0, 1] : \delta_{m,\Lambda_{\Phi,\omega}}(\varepsilon) > 0\}$$

dla funkcyjnych przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\Phi,\omega}$ z normą Luxemburga. Główne wyniki ([R5], Twierdzenie 2.1 oraz [R5], Twierdzenie 2.5) obejmują najszerszą klasę tychże krat funkcyjnych, generowaną przez dowolne funkcje Orlicza Φ i dowolne funkcje wagowe ω (tj. regularne lub nieregularne) nad przestrzenią miary zupełnej i σ -skończonej.

Narzędziami umożliwiającymi i ułatwiającymi wyznaczanie charakterystyki monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(\Lambda_{\Phi,\omega})$ były, w szczególności: Twierdzenie 2.1 z [R3] (patrz Twierdzenie 4.2 w tej sekcji) oraz Twierdzenie 2.8 z [R3] wraz z Wnioskiem 2.9 [R3] (patrz Twierdzenie 4.3 oraz wzór (9) w tej sekcji). Zależność (5) oraz fakt, iż dolny moduł monotoniczności kraty Banacha X jest funkcją niemalejącą (więc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1^-} \delta_{m,X}(\varepsilon) \leq \delta_{m,X}(1)$), zasugerowały konieczność wyliczenia wartości modułu dolnej monotoniczności dla przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\Phi,\omega}$ w jedyne (zob. [R5], Twierdzenie 2.3), dzięki czemu uzyskano dolne oszacowania charakterystyki monotoniczności powyższej przestrzeni. Następnie, w większości rozważanych przypadków, wykazano, że nierówność $\varepsilon_{0,m}(\Lambda_{\Phi,\omega}) > 1 - \delta_{m,\Lambda_{\Phi,\omega}}(1)$ prowadzi do sprzeczności, wykorzystując rozmaite techniki właściwe dla przestrzeni Orlicza-Lorentza.

Praca [R9] zawiera pewne charakteryzacje tych przestrzeni symetrycznych, w których podstawowe własności monotonicznościowe (ściśła monotoniczność, dolna lokalna jednostajna monotoniczność, górna lokalna jednostajna monotoniczność) wystarczy mieć na stożku funkcji nieujemnych i nierosnących na dodatniej części osi rzeczywistej, by zachodziły one na całej przestrzeni. W omawianej pracy zaprezentowano inne dowody twierdzeń już w literaturze znanych: [24, Twierdzenie 3.2], [13, Wniosek 2.2], [13, Lemma 2.7] i [39, Wniosek 4.4]. Udowodniono też, że każda ściśle wypukła i refleksywna przestrzeń Banacha X taka, że X oraz X^* posiadają własność Kadeca-Klee, jest lokalnie jednostajnie wypukła.

Przypomnijmy, iż mówimy, że symetryczna przestrzeń X ma własność Kadeca-Klee lub własność H, gdy dla każdego $x \in X$ oraz dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ w X takiego, że $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ i $x_n \xrightarrow{w} x$ mamy, że $x_n \rightarrow x$ w normie, gdy $n \rightarrow \infty$. Przypomnijmy również, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy lokalnie jednostajnie wypukłą, gdy dla dowolnego $x \in S_+(X)$ i dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ w X takiego, że $0 \leq x_n \leq x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\|x_n\| \rightarrow 1$, gdy $n \rightarrow \infty$ zachodzi warunek $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

4.2.2 Operatory kompozycji i mnożenia pomiędzy funkcyjnymi przestrzeniami Orlicza -praca [R7]

Niech (Ω, Σ, μ) będzie bezatomową, σ -skończoną i zupełną przestrzenią miary i niech $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ będzie odwzorowaniem mierzalnym, tzn. takim odwzorowaniem, że $\tau^{-1}(A) \in \Sigma$, gdy $A \in \Sigma$ dla każdego $A \subset \Omega$, gdzie $\tau^{-1}(A)$ oznacza przeciwobraz zbioru A względem odwzorowania τ . Niech τ będzie odwzorowaniem niesingularnym, tzn. $\mu(\tau^{-1}(A)) = 0$, o ile $\mu(A) = 0$. Nadmienmy, że niesingularność τ gwarantuje absolutną ciągłość miary $\mu \circ \tau^{-1}$ względem miary μ . Dla niesingularnego i mierzalnego odwzorowania $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ definiuje się na L^0 operator kompozycji

$$(c_\tau x)(t) := x(\tau(t))$$

dla każdego $t \in \Omega$ i dowolnego $x \in L^0(\Omega)$. Dodajmy, że założenie niesingularności gwarantuje, iż operator kompozycji jest dobrze zdefiniowany.

Niech $w \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie funkcją o wartościach ściśle dodatnich. Operator mnożenia $M_w : L^0 \rightarrow L^0$ definiuje się wzorem:

$$(M_w x)(t) := w(t)x(t)$$

dla dowolnego $t \in \Omega$ i dowolnego $x \in L^0(\Omega)$. Oczywiście $c_\tau x \in L^0(\Omega)$ i $M_w x \in L^0(\Omega)$, jeśli $x \in L^0(\Omega)$.

W pracy [R7] uzyskano warunki konieczne i dostateczne dla ciągłości operatora kompozycji oraz mnożenia z jednej funkcyjnej przestrzeni Orlicza $L^\Phi(\Omega)$ z normą Luxemburga w drugą funkcyjną przestrzeń Orlicza $L^\Psi(\Omega)$ ze stosowną normą Luxemburga oraz z jednej funkcyjnej przestrzeni Orlicza $L^\Phi(\Omega)$ z normą Luxemburga na drugą funkcyjną przestrzeń Orlicza $L^\Psi(\Omega)$ ze stosowną normą Luxemburga, generowanych przez funkcje Orlicza Φ i Ψ , które zerują się tylko w zerze i przyjmują wartości skończone. Pokazano, że pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d(\mu \circ \tau^{-1})}{d\mu}(s)$ nie musi należeć do $L^\infty(\Omega)$, by operator kompozycji $c_\tau x(t) = x(\tau(t))$ z $L^\Phi(\Omega)$ do $L^\Psi(\Omega)$ był ciągły. Rozważono również problem zwartości tych operatorów. Sformułowano warunki dostateczne, a także warunki konieczne dla zwartości operatorów kompozycji i mnożenia pomiędzy różnymi funkcyjnymi przestrzeniami Orlicza z normą Luxemburga generowanymi przez funkcje Orlicza o skończonych wartościach i znikających tylko w zerze. Ważną rolę odegrało kryterium zwartościowe dla przestrzeni Orlicza (sformułowane nawet dla przestrzeni Musielaka-Orlicza przez H. Hudzika, R. Urbańskiego i J. Musielaka (zob. [59], Twierdzenie 1.2)), wiążące zwartość względem topologii lokalnej zbieżności według miary i jednakowo absolutną ciągłość norm wszystkich elementów rozważanego zbioru. Przypomnijmy, że mówimy, iż funkcje ze zbioru A zawartego w przestrzeni Musielaka-Orlicza $L^\Phi(\mu)$ posiadają jednakowo absolutnie ciągłe normy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $B_\varepsilon \in \Sigma$ z $\mu(B_\varepsilon) < \infty$ i liczba rzeczywista $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takie, że dla wszystkich funkcji $x \in A$ mamy, że $\|x\chi_{\Omega \setminus B_\varepsilon}\|_\Phi < \varepsilon$ i $\|x\chi_B\|_\Phi < \varepsilon$, o ile $B \in \Sigma \cap B_\varepsilon$ i $\mu(B) < \delta$.

4.2.3 Niektóre własności geometryczne przestrzeni Banacha i ich zastosowania -prace [R6],[R8] i [R10]

W pracy [R6], dla rzeczywistych przestrzeni Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$ wprowadzono nową stałą $C_{NJ}^{(p)}(X)$, $p \in (1, \infty)$, nazwaną uogólnioną stałą von Neumanna-Jordana. Stanowi ona uogólnienie klasycznej stałej von Neumanna-Jordana $C_{NJ}(X)$ wprowadzonej przez Clarksona w [15] w 1937 i będącej później obiektem licznych badań (zob. np. [75, 76, 114, 128]). Uogólniona stała von Neumanna-Jordana⁵ rozważana w pracy, zdefiniowana jest wzorem:

$$C_{NJ}^{(p)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p)} : x, y \in X, (x, y) \neq (0, 0) \right\},$$

gdzie $1 \leq p < \infty$. Pokazano najpierw, że $1 \leq C_{NJ}^{(p)}(X) \leq 2$ dla dowolnej przestrzeni Banacha X ([R6], Twierdzenie 3.1) oraz, że prawa nierówność jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy X jest jednostajnie niekwadratową przestrzenią Banacha ([R6], Twierdzenie 3.3). Następnie pokazano związek pomiędzy stałą Jamesa

$$J(X) := \sup \{ \min(\|x+y\|, \|x-y\|) : x, y \in S(X) \}$$

przestrzeni Banacha X , a uogólnioną stałą von Neumanna-Jordana $C_{NJ}^{(p)}(X)$ ([R6], Twierdzenie 3.4) oraz wykazano, że gdy $C_{NJ}^{(p)}(X) < 2$ dla przestrzeni Banacha X , to X ma własność punktu

⁵W literaturze znane są również inne "uogólnione stałe von Neumanna-Jordana".

stałego ([R6], Wniosek 3.5). Pokazano również związek tej nowej uogólnionej stałej z teorią punktu stałego poprzez własność struktury normalnej ([R6], Twierdzenie 3.7, będące uogólnieniem podobnego wyniku z [64], gdzie rozważono jedynie przypadek tej stałej dla $p = 2$). Wyliczono również uogólnioną stałą von Neumanna-Jordana dla przestrzeni $L_r[0, 1]$, gdzie $r \in (1, 2]$.

Praca [R8] ma charakter częściowo przeglądowy, choć zawiera również pewne nowe wyniki. W pracy tej dwa rozdziały poświęcono przeglądowi znanych i opublikowanych wyników; jeden zastosowaniu geometrii przestrzeni Banacha w teorii najlepszej aproksymacji, a drugi w teorii uogólnionych operatorów odwrotnych, który oparto głównie na publikacjach [62, 91, 97, 115, 116, 118–121].

Najpierw zaprezentowano zastosowania geometrii przestrzeni Banacha do problemów aproksymacyjnych, takich jak niepustość $P_A(x)$, jego jedyność, podprzestrzenie proksymalne, czy wzory na odległość dowolnego elementu przestrzeni Köthe'go od jej podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych. Przypomniano kryteria na aproksymatywną zwartość różnych przestrzeni Banacha (przestrzeni Orlicza, Musielaka-Orlicza, czy Orlicza-Lorentza) oraz dla własności pełnej wypukłości przestrzeni Musielaka-Orlicza. Omówiono problem proksymalności w przestrzeni Calderóna-Lozanowskiiego E_φ pewnych jej podprzestrzeni i podano szczegółową interpretację tych wyników dla pewnych podprzestrzeni przestrzeni Orlicza.

Następnie zaprezentowano ważne wyniki dotyczące uogólnionych metrycznych operatorów odwrotnych, w szczególności operatorów odwrotnych typu Moora-Penrosa. Przywołano kilka ważnych twierdzeń dotyczących analizy perturbacji uogólnionych odwrotności w przestrzeniach Banacha. Jedna z sekcji została poświęcona rozwiązaniom ekstremalnym i rozwiązaniom aproksymacyjnie optymalnym wielowartościowych operatorów liniowych.

Do nowych wyników zawartych w pracy zaliczyć należy uzyskane wzory na moduł prawie jednostajnej gładkości oraz dla współczynnika Tomasa Domingueza Benavidesa $R(a, \ell^\Phi)$ ciągłych przestrzeni Orlicza ℓ^Φ wyposażonych w normę Orlicza z pomocą pewnych parametrów dotyczących generującej funkcji Orlicza. Sformułowano również warunek dostateczny na słabą własność punktu stałego przestrzeni ℓ^Φ .

Przejdźmy teraz do geometrii elipsoidalnej w przestrzeniach Banacha oraz jej zastosowań, będącej tematem pracy [R10]. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Weźmy dowolne $c > 0$ i $y_0 \in X$ takie, że $\|y_0\| \in (0, \frac{c}{2})$. Abstrakcyjną elipsoidę $E_c(y_0)$ definiujemy wzorem

$$E_c(y_0) = \{x \in X : \|x + y_0\| + \|x - y_0\| \leq c\}.$$

Oznaczmy przez $\Gamma(E_c(y_0))$ brzeg elipsoidy $E_c(y_0)$, a przez $\text{Ext}(E(y_0))$ zbiór wszystkich punktów ekstremalnych elipsoidy $E(y_0)$. Oczywiście $\Gamma(E_c(y_0)) = \{x \in X : \|x + y_0\| + \|x - y_0\| = c\}$. Jeśli $c = 2$, to elipsoidę $E_2(y_0)$ będziemy oznaczać $E(y_0)$. Zauważmy, że gdyby y_0 było równe elementowi zerowemu przestrzeni X , to $E(y_0)$ byłoby domkniętą kulą jednostkową $B(X)$.

W pracy [R10] wprowadzono najpierw pojęcia elipsoidalnej ściślej wypukłości, elipsoidalnej jednostajnej wypukłości, elipsoidalnej niekwadratowości oraz elipsoidalnej jednostajnej niekwadratowości dla przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy elipsoidalnie ściśle wypukłą, gdy

$$\text{Ext}(E(y_0)) = \{x \in E(y_0) : \|x + y_0\| + \|x - y_0\| = 2\},$$

tzn. $\text{Ext}(E(y_0)) = \Gamma(E(y_0))$ dla wszystkich $y_0 \in X$ z $\|y_0\| \in (0, 1)$. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy elipsoidalnie jednostajnie wypukłą, gdy dla dowolnego $y_0 \in X$ z $\|y_0\| \in (0, 1)$ i dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ z $E(y_0)$ spełniających warunki $\|x_n + y_0\| + \|x_n - y_0\| \rightarrow 2$, $\|y_n + y_0\| + \|y_n - y_0\| \rightarrow 2$ i $\|\frac{x_n + y_n}{2} + y_0\| + \|\frac{x_n + y_n}{2} - y_0\| \rightarrow 2$, gdy $n \rightarrow \infty$, mamy, że $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy elipsoidalnie niekwadratową, gdy dla dowolnego $y_0 \in X$ takiego, że $\|y_0\| \in (0, 1)$ i dla dowolnych $x, y \in E(y_0)$

prawdziwa jest nierówność

$$\min \left\{ \left\| \frac{x+y}{2} + y_0 \right\| + \left\| \frac{x+y}{2} - y_0 \right\|, \left\| \frac{x-y}{2} + y_0 \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} - y_0 \right\| \right\} < 2.$$

Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy elipsoidalnie jednostajnie niekwadratową, gdy dla dowolnego $y_0 \in X$ takiego, że $\|y_0\| \in (0, 1)$ istnieje $\delta = \delta(\|y_0\|) \in (0, 2)$ taka, że dla każdego $x, y \in E(y_0)$ prawdziwa jest nierówność

$$\min \left\{ \left\| \frac{x+y}{2} + y_0 \right\| + \left\| \frac{x+y}{2} - y_0 \right\|, \left\| \frac{x-y}{2} + y_0 \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} - y_0 \right\| \right\} < 2 - \delta.$$

Następnie, w pracy [R10] pokazano, że każda z powyższych własności elipsoidalnych (tzn. elipsoidalna ściśła wypukłość, elipsoidalna jednostajna wypukłość, elipsoidalna niekwadratowość i elipsoidalna jednostajna niekwadratowość) w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest równoważna swojemu klasycznemu odpowiednikowi (tzn. ściślej wypukłości, jednostajnej wypukłości, niekwadratowości oraz jednostajnej niekwadratowości odpowiednio) dla rodziny norm równoważnych, będących funkcjonalem Minkowskiego elipsoid $\{x \in X : \|x + y_0\| + \|x - y_0\| \leq c\}$ z ustaloną normą $0 < \|y_0\| < \frac{c}{2}$ i przy dowolnym $c > 0$ lub z ustalonym $c > 0$ i dowolnym y_0 takim, że $0 < \|y_0\| < \frac{c}{2}$ ([R10], Twierdzenia: 3.12, 3.15, 3.16 i 3.17 oraz, dodatkowo, wcześniejsze Twierdzenia: 2.9, 2.17, 2.24 i 2.28 wraz z obserwacjami, że implikacje odwrotne są oczywiste). Udowodniono, że elipsoidalnie jednostajnie niekwadratowe (więc również i elipsoidalnie jednostajnie wypukłe) przestrzenie Banacha są refleksywne ([R10], Twierdzenie 3.11), że każda ściśle wypukła przestrzeń Banacha jest elipsoidalnie ściśle wypukła ([R10], Twierdzenie 2.11) oraz pokazano przykład skończonego wymiarowej przestrzeni Banacha, która jest elipsoidalnie niekwadratowa (tym samym również elipsoidalnie jednostajnie niekwadratowa), ale nie jest niekwadratowa w klasycznym sensie. W pewnych rozważaniach i dowodach istotną rolę odegrała obserwacja, iż elipsoidy $E_c(y_0)$ z dowolnym $c > 0$ i $\|y_0\| \in (0, \frac{c}{2})$ mogą być rozważane jako modułarna kula jednostkowa generowana przez wypukły moduł $\rho(x) = \frac{1}{c-2\|y_0\|} (\|x + y_0\| + \|x - y_0\| - 2\|y_0\|)$ spełniający odpowiedni warunek Δ_2 . W ostatnim rozdziale pracy [R10] udowodniono, że każda elipsoidalnie jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha ma własność Banacha-Saksa ([R10], Twierdzenie 4.1) oraz, że w dowolnej elipsoidalnie jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha X elipsoidy $E_c(y_0)$ z $\|y_0\| \in (0, \frac{c}{2})$ są aproksymatywnie zwartymi zbiorami Czebyszewa ([R10], Twierdzenie 4.4). Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X ma własność Banacha-Saksa, gdy każdy ciąg ograniczony $(x_n)_{n=1}^\infty$ posiada podciąg $(y_n)_{n=1}^\infty$ taki, że ciąg $\left(\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\right)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny normowo w X . Wypukły zbiór C w przestrzeni Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$ nazywamy aproksymatywnie zwartym, gdy dla każdego $y \in X$ i dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ w C , który jest minimalizujący dla y , tzn. $\|y - x_n\| \rightarrow d(y, C) := \inf\{\|y - x\| : x \in C\}$, gdy $n \rightarrow \infty$, mamy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ posiada podciąg Cauchy'ego. Przestrzeń Banacha X jest aproksymatywnie zwarta jeżeli każdy niepusty, domknięty i wypukły zbiór w tej przestrzeni jest aproksymatywnie zwarty (zob. [7]).

Warto dodać, że choć w założeniach Twierdzeń 4.1 i 4.4 z pracy [R10] rozważamy rodzinę norm równoważnych, będących funkcjonalem Minkowskiego elipsoid $E_c(y_0)$ z ustaloną normą $0 < \|y_0\| < \frac{c}{2}$ i dowolnym $c > 0$ lub z ustalonym $c > 0$ i dowolnym y_0 takim, że $0 < \|y_0\| < \frac{c}{2}$, to tezy tych twierdzeń dotyczą odpowiednio przestrzeni X z oryginalną normą $\|\cdot\|$ i elipsoid $E_c(y_0)$ generowanych przez normę $\|\cdot\|$.

Bibliografia

- [1] M. A. Akcoglu and L. Sucheston, *An ergodic theorem on Banach lattices*. Israel J. Math. 51(3) (1985), 208–222.
- [2] M. A. Akcoglu and L. Sucheston, *On uniform monotonicity of norms and ergodic theorems in function spaces*. Rend. Circ. Mat. 8(2) (1985), 325–335.
- [3] V. A. Akimovič, *The uniform convexity and uniform smoothness of Orlicz spaces*, Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen. no. 15 (1972), 114–121.
- [4] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., New York 1988.
- [5] A. Betiuk-Pilarska and S. Prus, *Banach lattices which are order uniformly noncreasy*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008), 1271–1279.
- [6] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [7] D. Braess, *Nonlinear Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.
- [8] M. S. Brodskii, D. P. Milman, *On the center of a convex set* (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 59, (1948). 837–840.
- [9] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965), 1041–1044.
- [10] B. Bru and H. Heinrich, *Monotonies des espaces d’Orlicz*, C.R. Acad. Sci Paris 301 (1985), 893–894.
- [11] J. Cerdà, H. Hudzik, M. Mastyló, *Geometric properties of Köthe-Bochner spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 120 (1996), no. 3, 521–533.
- [12] M. Ciesielski, A. Kamińska, P. Kolwicz and R. Pluciennik, *Monotonicity and rotundity of Lorentz spaces $\Gamma_{p,\omega}$* , Nonlinear Anal. 75(5) (2012), 2713–2723.
- [13] M. Ciesielski, P. Kolwicz and A. Panfil, *Local monotonicity structure of symmetric spaces with applications*, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 649–662.
- [14] M. Ciesielski, P. Kolwicz and R. Pluciennik, *Local approach to Kadec–Klee properties in symmetric function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 426 (2015), 700–726.
- [15] J. A. Clarkson, *The von Neumann–Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. 38 (1937), 114–115.
- [16] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), no. 3, 396–414.
- [17] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes Math. 356 (1996), 1–204.
- [18] L. Chen and Y. Cui, *Complex extreme points and complex rotundity in Orlicz function spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Nonlinear Anal. 73 (2010), no. 5, 1389–1393.
- [19] L. Chen and Y. Cui, *Complex rotundity of Orlicz sequence spaces equipped with the p -Amemiya norm*, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), no. 1, 151–158.
- [20] L. Chen, Y. Cui and Y. Zhao, *Complex convexity of Musielak–Orlicz function spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 190203, 6 pp..
- [21] L. L. Chen, Y. A. Cui, Y. F. Zhao and J. L. Niu, *Complex convexity of Musielak–Orlicz sequence spaces equipped with the p -Amemiya norm*, (Chinese) Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 58 (2015), no. 1, 169–176.

- [22] S. Chen, X. He and H. Hudzik, *Monotonicity and best approximation in Banach lattices*. Acta Mathematica Sinica, English Series, May, 2009, Vol. 25, no. 5, 785–794.
- [23] S. Chen, X. He, H. Hudzik and A. Kamińska, *Monotonicity and best approximation in Orlicz-Sobolev spaces with the Luxemburg norm*. J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), 687–698.
- [24] V. I. Chilin, P. G. Dodds, A. A. Sedaev, F. A. Sukochev, *Characterizations of Kadec-Klee properties in symmetric spaces of measurable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (12) (1996), 4895–4918.
- [25] Y. Cui, L. Duan, H. Hudzik and M. Wisła, *Basic theory of p -Amemiya norm in Orlicz spaces ($1 \leq p \leq \infty$): extreme points and rotundity in Orlicz spaces endowed with these norms*, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 5–6, 1796–816.
- [26] Y. Cui, H. Hudzik, J. Li and M. Wisła, *Strongly extreme points in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 6343–6364.
- [27] Y. Cui, H. Hudzik, L. Szymaszkiewicz and T. Wang, *Criteria for monotonicity properties of Musielak-Orlicz spaces equipped with the Amemiya norm*, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 376–390.
- [28] Y. Cui, H. Hudzik and M. Wisła, *M -Constants, Dominguez-Benavides coefficient and weak fixed point property in Orlicz sequence spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Fixed Point Theory Appl. 2016:89 (2016).
- [29] Y. Cui, H. Hudzik and M. Wisła, *Monotonicity properties and dominated best approximation problems in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya norm*, J. Math. Anal. Appl. 432 (2015), no. 2, 1095–1105.
- [30] Y. Cui, H. Hudzik, M. Wisła and K. Wlaźlak, *Non-squareness properties of Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 10, 3973–3993.
- [31] M. M. Day, R. C. James and S. Swaminathan, *Normed linear spaces that are uniform convexity in every direction*, Canad. J. Math. 23 (1971), 1051–1059.
- [32] T. Dominguez, H. Hudzik, G. López, M. Mastyło and B. Sims, *Complete characterizations of Kadec-Klee properties in Orlicz spaces*, Houston J. Math. 29 (2003), no. 4, 1027–1044.
- [33] L. F. Duan, J. Xu and Y. Cui, *Extreme points and rotundity in Orlicz sequence spaces equipped with p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) norm*, (in Chinese) J. Jilin Univ. Sci. 50 (2012), no. 5, 902–906.
- [34] P. Foralewski, *On some geometric properties of generalized Orlicz-Lorentz function spaces*, Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 17, 6217–6236.
- [35] P. Foralewski, *On some geometric properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces* Indag. Math. (N.S.) 24 (2013), no. 2, 346–372.
- [36] P. Foralewski, *Rotundity structure of local nature for generalized Orlicz-Lorentz function spaces*, Nonlinear Analysis 74 (2011), 3912–3925.
- [37] P. Foralewski, *Some fundamental geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz function spaces*, Math. Nachr. 284(8-9) (2011), 1003–1023.
- [38] P. Foralewski, H. Hudzik, *Some basic properties of generalized Calderón-Lozanovskiĭ spaces*, Fourth International Conference on Function Spaces (Zielona Góra, 1995). Collect. Math. 48 (1997), no. 4-6, 523–538.
- [39] P. Foralewski, P. Kolwicz, *Local uniform rotundity in Calderón-Lozanovskiĭ spaces*, J. Convex Anal. 14(2) (2007), 395–412.
- [40] P. Foralewski, H. Hudzik, W. Kowalewski, M. Wisła, *Monotonicity properties of Banach lattices and their applications - a survey*. (English summary) Ordered structures and applications, 203–232, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.
- [41] P. Foralewski, H. Hudzik and L. Szymaszkiewicz, *Local rotundity structure of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces*, Nonlinear Analysis 68 (2008), 2709–2718.
- [42] P. Foralewski, H. Hudzik and L. Szymaszkiewicz, *On some geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces*, Math. Nachr. 281(2) (2008), 181–198.

- [43] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, E.M. Mazcuñan-Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal. 233 (2006), no. 2, 494–514.
- [44] K. Goebel and W. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [45] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), 251–258.
- [46] X. He, Y. Cui and H. Hudzik, *The fixed point property of Orlicz sequence spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:340.
- [47] X. He, J. Yu, Y. Cui and X. Huo, *Packing constant in Orlicz sequence spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 626491, 7 pp., <http://dx.doi.org/10.1155/2014/626491>.
- [48] H. Hudzik, *Geometry of some classes of Banach function spaces*, Banach and Function Spaces, 17–57, Yokohama Publ., Yokohama, 2004.
- [49] H. Hudzik and A. Kamińska, *Monotonicity properties of Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 123(9) (1995), 2715–2721.
- [50] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *Geometric properties of some Calderón-Lozanovskii spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston Journal of Mathematics, 22(3) (1996), 639–663.
- [51] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices*, Rocky Mountain Journal of Math. 30(3) (2000), 933–950.
- [52] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *On geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces*, Canadian Math. Bull. 40(3) (1997), 316–329.
- [53] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *On the dual of Orlicz-Lorentz space*, Proc. Amer. Math. Soc. 130(6) (2002), 1645–1654.
- [54] H. Hudzik, A. Kamińska and J. Musielak, *On the convexity coefficient of Orlicz spaces*, Math. Zeit. 197 (1988), 291–295.
- [55] H. Hudzik and W. Kurc, *Monotonicity properties of Musielak-Orlicz spaces and dominated best approximation in Banach lattices*, J. Approx. Theory 95 (1998), 353–368.
- [56] H. Hudzik and L. Maligranda, *Amemiya norm equals Orlicz norm in general*, Indagationes Math. 11(4) (2000), 573–585.
- [57] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on s -convex functions*, Aequationes Mathematicae 48(1) (1994), 100–111.
- [58] H. Hudzik and M. Mastyło, *Strongly extreme points in Köthe-Bochner spaces*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 23 (3) (1993), 899–909.
- [59] H. Hudzik, J. Musielak and R. Urbński, *Interpolation of compact sublinear operators in generalized Orlicz space of nonsymmetric type*, Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978, Vol. I, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam, 23 (1980), 625–638.
- [60] H. Hudzik, A. Narloch, *Relationships between monotonicity and complex rotundity properties with some consequences*, Math. Scand. 96(2) (2005), 289–306.
- [61] H. Hudzik and D. Pallaschke, *On some convexity properties of Orlicz sequence spaces equipped with the Luxemburg norm*, Math. Nachr. 186 (1997), 167–185.
- [62] H. Hudzik, Y. W. Wang, W. J. Zheng, *Criteria for the metric generalized inverse and its selection in Banach spaces*, Set-Valued Anal. 16 (2008), 51–65.
- [63] T. Iwaniec and A. Verde, *On the operator $\mathcal{L}(f) = f \log |f|$* , J. Funct. Anal. 169 (1999), no. 2, 391–420.
- [64] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and S. Saejung, *The von Neumann-Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 134(2) (2005), 355–364.
- [65] N. J. Kalton, N. T. Peck and J. W. Roberts, *An F -Space Sampler*, Cambridge University Press, 1984.

- [66] A. Kamińska, *Extremal points in Orlicz-Lorentz spaces*, Arch. Math. 55 (1990), 173–180.
- [67] A. Kamińska, *On some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces*, Proceedings of the 12th winter school on abstract analysis (Srní, 1984). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1984, Suppl. no. 5, 63–72.
- [68] A. Kamińska, *On uniform convexity of Orlicz spaces*, Indag. Math. 44(1) (1982), 27–36.
- [69] A. Kamińska, *Some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces of Bochner type*, Proceedings of the 13th winter school on abstract analysis (Srní, 1985). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. no. 10 (1985), 63–73.
- [70] A. Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Nachr. 147 (1990), 29–38.
- [71] A. Kamińska, *Uniform convexity of generalized Lorentz spaces*, Arch. Math. 56 (1991), 181–188.
- [72] A. Kamińska, K. Leśnik and Y. Raynaud, *Dual spaces to Orlicz-Lorentz spaces*, Studia Mathematica 222 (2014), no. 3, 229–261.
- [73] A. Kamińska and Y. Raynaud, *Abstract Lorentz spaces and Köthe duality*, Indagat. Math. 2019, to appear.
- [74] A. Kamińska and Y. Raynaud, *Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, J. Funct. Anal. 257 (2009), 271–331.
- [75] M. Kato and L. Maligranda, *On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. 258(2) (2001), 457–465.
- [76] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. 144(3) (2001), 275–295.
- [77] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004–1006.
- [78] W. A. Kirk and B. Sims, (eds.), *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Academic, Dordrecht (2001).
- [79] P. Kolwicz, *Kadec-Klee properties of Calderón-Lozanovskii function spaces*, J. Funct. Spaces Appl. (2012), article ID 314068, 21 pages, doi:10.1155/2012/314068.
- [80] P. Kolwicz, *Kadec-Klee properties of Calderón-Lozanovskii sequence spaces*, Collect. Math. 63 (2012), 45–58.
- [81] P. Kolwicz, *Local structure of generalized Orlicz-Lorentz function spaces*, Comment. Math. 55 (2015), no. 2, 211–227.
- [82] P. Kolwicz, *Kadec-Klee properties of some quasi-Banach function spaces*, Positivity 22 (2018), no. 4, 983–1013; doi:10.1007/s11117-018-0555-8.
- [83] P. Kolwicz and R. Pluciennik, *On uniform rotundity in every direction in Calderón-Lozanovskii sequence spaces*, J. Convex Anal. 14 (2007), no. 3, 621–645.
- [84] M.A. Krasnoselskiĭ and Ya.B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Groningen, Nordhoff, 1961 (English translation); Original Russian edition: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., Moskva 1958.
- [85] M. Krbeć and H.J. Schmeisser, *On dimension-free Sobolev imbeddings II*, Rev Mat Complut 25 (2012), no. 1, 247–265.
- [86] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Transl. Math. Monogr. 54, Amer. Math. Soc., Providence, 1982.
- [87] W. Kurc, *A dual property to uniform monotonicity in Banach lattices*, Collect. Math. 44(1-3) (1993), 155–165.
- [88] W. Kurc, *Strictly and uniformly monotone Musielak-Orlicz spaces and applications to best approximation*, J. Approx. Theory 69(2) (1992), 173–187.
- [89] W. Kurc, *Strictly and uniformly monotone sequential Musielak-Orlicz spaces*, Collect. Math. 50(1) (1999), 1–17.
- [90] H. J. Lee, *Monotonicity and complex convexity in Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. 307(1) (2005), 86–101.

- [91] S. J. Lee, M. Z. Nashed, *Constrained least-square solutions of linear inclusions and singular control problems in Hilbert spaces*, Appl. Math. Optim. 19(3) (1989), 225–242.
- [92] F. E. Levis and H. H. Cuenya, *Gateaux differentiability in Orlicz-Lorentz spaces and applications*, Math. Nachr. 280(11) (2007), 1282–1296.
- [93] F. E. Levis, H. H. Cuenya and A. N. Priori, Best constant approximants in Orlicz-Lorentz spaces, Comment. Math. 48(1) (2008), 59–73.
- [94] J. Li, Y. Cui, H. Hudzik and M. Wisła, *Strongly extreme points in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya norm*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 12, 6343–6364.
- [95] Pei-Kee Lin, *Köthe-Bochner function spaces*. Birkhäuser, Boston, 2004.
- [96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II, Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).
- [97] P. Liu, Y. W. Wang, *The best generalized inverse of linear operator in normed linear spaces*, Linear Algebra Appl. 420 (2007), 9–19.
- [98] W. A. J. Luxemburg, *Banach Function Spaces*, Thesis Delft, 1955.
- [99] Y. M. Lü, J. M. Wang and T. F. Wang, *Monotone coefficients and monotonicity of Orlicz spaces*, Rev. Mat. Complut. 12 (1999), 105–114.
- [100] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, (Seminárias de Matemática: vol. 5), Campinas (Brazil) Univ. Estadual de Campinas, 1989.
- [101] E. M. Mazcuñán-Navarro, *A direct proof of the fixed point property for nonexpansive mappings in uniformly nonsquare Banach spaces*, Fixed Point Theory and its Applications, 115–121, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.
- [102] E. M. Mazcuñán-Navarro, *Geometry of Banach spaces in metric fixed point theory*, Ph. D. Thesis, Valencia University, Valencia, 2003.
- [103] S. Mazur and W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Stud. Math. 17 (1958), 97–119; reprinted in: W. Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 981–1003.
- [104] H. W. Milnes, *Convexity of Orlicz spaces*, Pacific J. Math. 7 (1957), 1451–1486.
- [105] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, in: *Lecture Notes Math.*, vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [106] W. Odyńec and G. Lewicki, *Minimal projections in Banach spaces. Problems of existence and uniqueness and their application*, *Lecture Notes in Mathematics* 1449, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [107] W. Orlicz, *A note on modular spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 9 (1961), 157–162.
- [108] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Intern. Pol. Ser. A Kraków (1932), 207–220.
- [109] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1991.
- [110] S. Reisner, *On two theorems of Lozanovskii concerning intermediate Banach lattices*, in: *Geometric aspects of functional analysis (Israel GAFA Seminar, 1986/87)*, in: *Lecture Notes in Math.* vol. 1317, Springer, Berlin, 1988, pp. 67–83.
- [111] B. Sims, *Banach spaces geometry and the fixed point theory*, in: *Recent advances on metric fixed point theory. Proceedings of the International Workshop held at the University of Seville, Seville, September 25-29, 1995*. Edited by Tomás Domínguez Benavides. Ciencias [Sciences], 48. Universidad de Sevilla, Seville, 1996. 178 pp..
- [112] I. Singer, *The Theory of Best Approximation and Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1974.
- [113] M. A. Smith and B. Turett, *Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces*, Trans. Am. Math. Soc. 251 (1980), no. 1, 105–118.
- [114] Y. Takahashi and M. Kato, *Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces*, Nihonkai Math. J. Vol. 9 (1998), 155–169.
- [115] Y. W. Wang, *Operator generalized inverses in Banach spaces and applications*, Science Press, Beijing, 2005.

- [116] Y. W. Wang, J. Liu, *Metric generalized inverse of linear manifold and extremal solution of linear inclusion in Banach Spaces*, Math. Anal. Appl. 302 (2005), 360–371.
- [117] T. F. Wang, Z. R. Shi and Y. Cui, *Orlicz spaces that are uniformly rotund in every direction*, Comment. Math. (Prace Mat.) 35 (1995), 245–262.
- [118] H. Wang and Y. W. Wang, *Metric generalized inverse of linear operator in Banach spaces*, Chin. Ann. Math. 24B(4) (2003), 509–520.
- [119] Z. Wang, B. Y. Wu, Y. W. Wang, *Constrained extremal solutions of multi-valued linear inclusions in Banach spaces*, Journal of Inequalities and Applications 2016 (2016), 138.
- [120] Z. Wang, B. Y. Wu, Y. W. Wang, *Perturbation analysis of Moore-Penrose quasi-linear projection generalized inverse of closed linear operators in Banach spaces*, Acta Mathematica Sinica, English Series 32(6) (2016), 699–714.
- [121] Y. W. Wang, H. Zhang, *Perturbation analysis for oblique projection generalized inverses of closed linear operators in Banach spaces*, Linear Algebra Appl. 426 (2007), 1–11.
- [122] M. Wiśła, *Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya norm*, J. Math. Anal. Appl. 461 (2018), no. 1, 378–400.
- [123] M. Wiśła, *Geometric properties of Orlicz spaces equipped with p -Amemiya norms-results and open questions*, Comment. Math. 55 (2015), no. 2, 183–209.
- [124] M. Wójtowicz, H. Wiśniewska, *Copies of the sequence space ω in F -lattices with applications to Musielak-Orlicz spaces*, Comment. Math. 56 (2016), no. 1, 103–117.
- [125] M. Wójtowicz, H. Wiśniewska, *Orthomorphisms on non-Banach F -lattices containing a copy of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ with applications to Musielak-Orlicz spaces*, J. Math. Anal. Appl. 458 (2018), no. 1, 812–820.
- [126] W. Wnuk, *On the order-topological properties of the quotient space L/L_A* , Studia Math. 79 (1984), 139–149.
- [127] W. Wnuk, *Representations of Orlicz lattices*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 235 (1984), 1–62.
- [128] C. Yang, *Jordan-von Neumann constant for Banaś-Frączek space*, Banach J. Math. Anal. 8(2) (2014), 185–192.
- [129] V. Zidler, *On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 87, (1971) 33 p.+ errata insert.

Radosław Kaczmarek