

# Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Moniki Mokrzyckiej p.t.

## Aproksymacja macierzy kowariancji wybranymi strukturami w modelach podwójnie wielowymiarowych.

Podstawą wielu badań eksperymentalnych są niezależne obserwacje określonej liczby, powiedzmy  $n$ , obiektów. Jeśli obserwacje te dotyczą wielu cech (w liczbie  $q$ ) i są prowadzone w kolejnych okresach albo w wielu lokalizacjach (w liczbie  $p$ ), to mówi się, że dane są podwójnie wielowymiarowe. Takie zbiory danych zwykle są modelowane za pomocą wektorowych zmiennych losowych. Sparametryzowana struktura ich wartości oczekiwanych oraz postaci macierzy kowariancji tworzą model dający podstawę wnioskowania statystycznego. Aby wnioskowanie takie było możliwe liczba parametrów modelu nie może być zbyt duża w stosunku do liczby obserwowanych obiektów. To wymaganie jest szczególnie trudne do spełnienia w odniesieniu do macierzy kowariancji  $\Omega$ , łącznej dla  $q$  cech i  $p$  lokalizacji. Warto tu wspomnieć, że liczba jej swobodnych elementów szybko rośnie wraz z kwadratem jej stopnia  $pq$ . Stąd pojawia się konieczność rozpoznania jej struktury. To zadanie jest głównym celem przedstawionej rozprawy.

Praca, poza wstępem i końcowym podsumowaniem, zawiera cztery rozdziały, które zajmują łącznie 70 stron. W spisie prac cytowanych wymienionych jest 39 pozycji, z których prawie połowa ukazała się drukiem w ostatnich 10. latach. Rozdział pierwszy stanowi wprowadzenie, w którym opisano struktury danych eksperymentalnych, postaci macierzy kowariancji, scharakteryzowano miary rozbieżności, tj. entropijną i kwadratową funkcję straty, oraz przytoczono z literatury wybrane operatory i operacje na macierzach. W rozdziale drugim i trzecim zawarto główne wyniki rozprawy w postaci szeregu twierdzeń poświęconych problemowi rozpoznawania struktury macierzy kowariancji.

W realizacji tego zadania autorka rozważa trzy zbiory struktur. Zbiór pierwszy  $S$  obejmuje iloczyny Kroneckera dowolnych dwóch dodatnio określonych macierzy  $\Psi$  i  $\Sigma$ , odpowiednio stopnia  $p$  oraz  $q$ ,  $\Psi \otimes \Sigma$ . O strukturze takiej mówi się, że jest rozdzielna. Zbiór drugi,  $S_{CS}$ , jest podzbiorem  $S$  wyróżnionym przez dookreślenie postaci pierwszego czynnika,

$$\Psi_{CS} = (1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{1}\mathbf{1}',$$

gdzie  $-(p - 1)^{-1} < \rho < 1$ . Oznacza to, że korelacje pomiędzy różnymi parami obserwowanych zmiennych są takie same. W zbiorze trzecim,  $S_{AR}$ , macierz  $\Psi$  jest również jednoparametrowa, dodatnio określona i odpowiada procesowi auto-regresji rzędu pierwszego. Jej elementami są rosnące potęgi  $\rho$ , tzn.  $\Psi_{AR} = (\rho^{|i-j|})$ , gdzie tym razem  $\rho \in (-1, 1)$ . Taka struktura może być związana, na przykład, ze zjawiskiem malenia korelacji w kolejnych okresach obserwacji.

Zadanie rozpoznania struktury polega teraz na znalezieniu dla ustalonej macierzy  $\Omega$  najbliższego reprezentanta w obiorze  $S$ ,  $S_{CS}$  lub  $S_{AR}$ . Za miarę

odstępstwa rozważono dwa kryteria, zwane funkcjami rozbieżności. Są to entropijna funkcja starty,

$$f_E(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Gamma}) = \text{tr}(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Gamma}) - \ln|\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Gamma}| - pq,$$

oraz kwadratowa funkcja starty,

$$f_Q(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Gamma}) = \text{tr}[(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{I})^2],$$

gdzie  $\mathbf{\Gamma}$  należy do jednej z proponowanych struktur.

Minimalizacji pierwszej z tych funkcji poświęcony jest rozdział drugi rozprawy. Są tutaj przedstawione dowody trzech twierdzeń, z których dwa pierwsze T2.1 i T2.2 są już opublikowane i zostały przygotowane we współpracy kandydatki z innymi autorami. Podają one układy równań, których rozwiązanie prowadzi do minimalizacji entropijnej funkcji straty, odpowiednio na zbiorze  $S$  i  $S_{CS}$ . Natomiast twierdzenie trzecie T2.3 jest oryginalne i dotyczy minimalizacji, również entropijnej funkcji straty, ale na zbiorze  $S_{AR}$ . We wszystkich tych twierdzeniach podane są uwikłane układy równań, których rozwiązanie ze względu na  $\mathbf{\Psi}$  oraz  $\mathbf{\Sigma}$  nie jest bezpośrednio, ale iteracyjnie możliwe. W rozdziale trzecim podane są, wraz z dowodami, kolejne trzy oryginalne twierdzenia, T3.1 – T3.3, tym razem rozwiązujące zagadnienie minimalizacji kwadratowej funkcji straty na wcześniej wymienionych zbiorach.

Wszystkie dowody przedstawionych twierdzeń są poprawne. Opierają się na technice różniczkowania macierzowego, która jest intensywnie rozwijana od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Ponadto autorka wykorzystuje nowo wprowadzone (patrz bibliografia – pozycja [14] z roku 2018) operatory śladu częściowego i śladu blokowego, które istotnie upraszczają manipulacje macierzowe i w efekcie pozwalają wyrazić wynikowe układy równań w zwartej i eleganckiej postaci.

Przedstawione wyżej wyniki teoretyczne dopełnia rozdział czwarty, w którym, po wstępnych wyjaśnieniach (Sekcja 4.1), podano wyniki obszernych badań symulacyjnych. Proces ten polegał na generowaniu  $n = 100$  niezależnych wektorowych obserwacji z rozkładu normalnego z zerową wartością oczekiwaną i zadaną strukturą macierzy kowariancji  $\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{I}$  dla wybranych kombinacji  $p$ ,  $q$  i  $\rho$ . Obserwacje takie, sformowane w macierz  $\mathbf{X}$  typu  $n \times pq$ , pozwalały na wyznaczenia oceny  $\mathbf{S}$  największej wiarygodności macierzy kowariancji  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{S} = n^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathbf{X}$ . Następnie rozwiązywano stosowny układ równań w celu określenia minimum funkcji rozbieżności, a w szczególności wartości korelacji  $\rho$ , pozwalającej ocenić poprawność rozpoznania założonej struktury. Postępowanie to powtarzano 1000 - krotnie, a uśrednione wyniki zestawiono w serii trzynastu tabel zamieszczonych w sekcjach 4.2 i 4.3. Z tabel tych wynika w szczególności, że rozpoznanie prawidłowej struktury macierzy kowariancji z entropijną funkcją straty było nieco lepsze niż z kwadratową funkcją straty, oraz że dla większych  $p$  oraz większych  $\rho$  trafność rozpoznania była wysoka lub bardzo wysoka. Uśrednione oceny korelacji w obu podejściach były bliskie wartościom założonym w symulacji, a odchylenia standardowe tych ocen były nieco mniejsze dla entropijnej funkcji starty niż dla funkcji kwadratowej, co

świadczy o pewnej przewadze podejścia pierwszego. Oceny te są też zestawione z ocenami struktury wynikające z metody największej wiarygodności. Przeprowadzone symulacje sugerują niewielkie różnice z pewną przewagą metody największej wiarygodności, która, w przeciwieństwie do metod proponowanych, nie wymaga odwracania macierzy  $S$  stopnia  $pq$ .

Ostatnie dwie sekcje rozdziału czwartego poświęcone są rozważaniom nad przydatnością entropijnej i kwadratowej funkcji straty przy testowaniu hipotez o przynależności macierzy kowariancji  $\Omega$  do jednego z wcześniej wymienionych zbiorów  $S$ ,  $S_{CS}$  lub  $S_{AR}$  przeciwko hipotezie przeciwnej. Badania te miały również charakter symulacyjny i wymagały generowania macierzy  $\Omega$  o ustalonej rozbieżności od zadanej struktury. Ocenie poddano moc dwóch statystyk testowych, tj. testu ilorazowego największej wiarygodności (LRT) i testu wynikowego Rao (RST). Ale uzyskane wyniki, jak stwierdza sama autorka, nie przyniosły spodziewanych rezultatów, bowiem przebiegi funkcji mocy dla obu testów były prawie identyczne niezależnie od użytej funkcji rozbieżności.

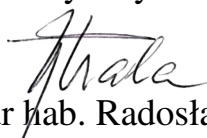
W sekcji końcowej porównano wyniki testowania testem LRT i RST z wartościami rozbieżności w oparciu o dane rzeczywiste zaczerpnięte z literatury. Okazało się, że w zależności od liczby uwzględnionych cech (3 lub 2) i poziomu istotności ( $\alpha = 0.01, 0.05$ ) wymienione testy nie prowadzą do identycznych konkluzji, chociaż na poziomie ( $\alpha = 0.01$ ) ani test LRT, ani test RST nie odrzuca hipotezy  $H_{03}: \Omega \in S_{AR}$ , co jednak przy testach istotności nie świadczy zdecydowanie na jej korzyść. Równocześnie wartości entropijnej i kwadratowej funkcji straty nie są na tyle zróżnicowane, aby wskazać za którąkolwiek z hipotez.

Przedstawiona rozprawa mieści się w nurcie aktualnie rozwijanych badań, ważnych dla wielowymiarowej analizy danych eksperymentalnych. Podejście jest oryginalne, dowody twierdzeń są poprawne, a wynikające z nich metody estymacyjne przydatne, choć przy ściśle określonych założeniach modelowych. Przeprowadzone obszerne badania symulacyjne wskazują, że metody te, z uwagi na dużą trafność rozpoznawania struktury macierzy kowariancji, mogą znaleźć zastosowanie w praktyce.

W pracy są drobne usterki, których spis załączam w dodatku do recenzji. Nie mają one jednak wpływu na poprawność dowodzonych twierdzeń, ale powinny być uwzględnione przed opublikowaniem pracy drukiem.

W podsumowaniu stwierdzam, że przedstawiona rozprawa mgr Moniki Mokrzyckiej pokazuje wiedzę kandydatki z zakresu analizy danych wielowymiarowych w ramach modelu liniowego oraz dużą biegłość w manipulacjach macierzowych. W mojej ocenie rozprawa ta spełnia wymagania ustawowe o stopniach naukowych (z roku 2003) i w pełni uzasadnia nadanie kandydatce stopnia doktora nauk matematycznych.

Poznań, 14 maj 2021

  
Prof. dr hab. Radosław Kala

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Moniki Mokrzyckiej  
Dodatek

1. (str. 13) Stwierdzenie, że *iloczyn Kroneckera nie jest jednoznaczny* należy zastąpić stwierdzeniem, że rozkład macierzy na iloczyn Kroneckera, nawet, jeśli możliwy, nie jest jednoznaczny. W szczególności mamy:

$$a\mathbf{M} = (a) \otimes \mathbf{M} = (ca) \otimes (c^{-1}\mathbf{M}) \quad \text{dla } c \neq 0.$$

2. (str. 15) Własność (ii) jest prawdziwa, jeśli  $S_{CS}$  jest zdefiniowane, jako zbiór macierzy dodatnio określonych będących kombinacjami liniowymi macierzy idempotentnych  $\mathbf{P} = p^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'$  i  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ . Jeśli jednak

$$S_{CS} = \{(1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{1}\mathbf{1}' : \rho \in (-(p - 1)^{-1}, 1)\},$$

to własność (ii) powinna być zapisana tak, jak własność (iii). Uwaga ta stosuje się również do własności (ii'), w której brakuje warunku  $\mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ .

3. (str. 20) Szkoda, że równości Lematu 1.8, zaczerpnięte z literatury, nie zostały zapisane w konwencji takiej jak w lemacie 1.9, tj. z użyciem operatorów  $\text{vec}'\mathbf{X}$ . Byłoby też lepiej, gdyby konwencje zapisu w pracy, nie były mieszane.
4. (str. 25) We wzorze (2.5) symbol  $ln$  winien być usunięty.
5. (str. 30) W połowie strony, odwołanie do wzoru (2.15), powinno być zastąpione przez odwołanie do (2.14).
6. (str. 36) Z uwagi na symetrię macierzy  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{\Psi}_{AR}$  równości: czwarta, piąta i szósta, mogą być pominięte. Ponadto w równości drugiej symbol transpozycji, przy operacji śladu, jest zbędny. Przydatne byłoby też wskazanie źródła wzoru, skądinąd znanego, na odwrotność  $\mathbf{\Psi}_{AR}$ .
7. (str. 47) Przy założeniu (Z1) stwierdzenie (w szczególności  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{CS}$ ) powinno być poprawione zgodnie uwagą 2.
8. (str. 85) Pozycja [36] z bibliografii nie jest wspomniana w pracy.

