Kraków, 6 maja 2014

Dariusz Cichoń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

**Recenzja rozprawy doktorskiej Tomasza Ciasia pod tytułem**
***Algebra of smooth operators***

Praca poświęcona jest operatorom liniowym i ciągłym określonym na przestrzeni $s'$ ciągów wolno rosnących i prowadzących w przestrzeń do niej predualną $s$ ciągów szybko malejących. Przestrzeń $\mathcal{L}(s', s)$ wszystkich takich odwzorowań wyposażona w topologię zadaną przez naturalny układ norm jest jako przestrzeń Frécheta równoważna przestrzeni $s$, jak również wielu innym znanym przestrzeniom Frécheta. Okazuje się, że w przestrzeni $\mathcal{L}(s', s)$ można wprowadzić naturalne mnożenie operatorów, a nawet inwolucję. Udaje się to dzięki powiązaniu tych operatorów z przestrzenią operatorów liniowych i ciągłych $\mathcal{L}(\ell_2)$ z naturalnymi w tej przestrzeni działaniami składania jako mnożenia i sprzęgania jako inwolucji. Z tak określonymi działaniami algebrę tę można utożsamić z innymi znanymi algebrami, na przykład z algebrą $\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, stąd zapewne uzasadnione jest określenie „algebra operatorów gładkich", chociaż stosowniej byłoby powiedzieć: „wygładzających". To również między innymi pozwala stwierdzić, że tematyka badawcza podjęta w recenzowanej pracy może mieć szersze znaczenie, jako że wyniki uzyskane dla $\mathcal{L}(s', s)$ mają zastosowanie dla innych rozpatrywanych współcześnie algebr.

Przejdę teraz do omówienia zawartości pracy. Po obszernym i bogatym w komentarze wstępie następuje rozdział pierwszy zapoznający czytelnika z głównymi pojęciami i własnościami niezbędnymi przy lekturze pracy. Wśród nich występują: własność (DN) *dominującej normy* (Definition 1.2), algebry Köthego, konstrukcja mnożenia operatorów z $\mathcal{L}(s', s)$ oraz trójki Gelfanda prowadzące do paru przykładów $*$-algebr Frécheta izomorficznych z $\mathcal{L}(s', s)$. W rozdziale drugim autor skupia się na algebrze mnożników, czyli pewnej algebrze odwzorowań liniowych i ciągłych, w której – nieformalnie rzecz ujmując – algebra $\mathcal{L}(s', s)$ stanowi ideał. Zaskakujący jest prosty opis tej algebry, w którym nie występuje *explicite* założenie o ciągłości (Proposition 2.1). W drugiej części rozdziału pomieszczono twierdzenie o $*$-izomorfizmie pomiędzy algebrą mnożników a przestrzenią podwójnych centralizatorów (Theorem 2.7), co pokazuje, że znane wcześniej abstrakcyjne podejście do algebry mnożników nie daje nic istotnie nowego.

Tematem kolejnego rozdziału są reprezentacje spektralne operatorów normalnych i reprezentacje Schmidta. Ponieważ operatory ciągłe z $\mathcal{L}(s', s)$ odpowiadają operatorom zwartym z $\mathcal{L}(\ell_2)$, udaje się wykazać w przypadku normalnym reprezentację podobną do znanej w przestrzeni Hilberta przy pewnych dodatkowych, lecz naturalnych warunkach nałożonych na projekcje i wartości własne (Theorem 3.1). Podobny efekt ma miejsce w przypadku reprezentacji Schmidta operatorów zwartych (Theorem 3.8). Niebanalnym komponentem tych rozważań jest dowód istnienia normy dominującej dla przestrzeni $\mathcal{L}(s', s)$, w tym wypadku okazuje się nią norma operatorowa z $\mathcal{L}(\ell_2)$ (Proposition 3.1).

W kolejnym, czwartym rozdziale pracy mamy do czynienia z opisem przemiennych domkniętych $*$-podalgebr w $\mathcal{L}(s', s)$. Okazuje się, że takie podalgebry dopuszczają bazę Schaudera złożoną z projekcji, które są elementami minimalnymi względem naturalnego porządku w zbiorze projekcji (Proposition 4.3). To prowadzi do opisu przemiennych domkniętych $*$-podalgebr wymiaru nieskończonego jako algebr Köthego względem macierzy niekończonej, której elementy są $q$-tymi normami kolejnych projekcji (Theorem 4.9). Przy tej okazji podaje autor interesujące przykłady $*$-algebr Frécheta, których nie można izomorficznie utożsamić z podalgebrami $\mathcal{L}(s', s)$ (Corollary 4.6). W dalszym ciągu autor przechodzi do maksymalnych przemiennych $*$-podalgebr, które są generowane w powyższym sensie przez zupełne układy projekcji jednowymiarowych (Theorem 4.11, Corollary 4.16). Przy wykorzystaniu metod wypracowanych w tym rozdziale udaje się opisać domknięte $*$-podalgebry $s$ wymiaru nieskończonego jako specjalne algebry Köthego (Corollary 4.19). W kolejnej części rozdziału znajdujemy opis domkniętych $*$-podalgebr $\mathcal{L}(s', s)$ wymiaru nieskończonego, które dadzą się utożsamić z domkniętymi $*$-podalgebrami $s$, co odpowiada równoważnie tak zwanemu warunkowi $(\Omega)$ (Theorem 4.25). Jest to cenne z uwagi na to, że takie podalgebry $s$ mają komplement, czyli innymi słowy dopuszczają ciągłe rzutowanie w $s$, którego są obrazem. Dzięki opisowi z Twierdzenia 4.25 udaje się skonstruować przykład domkniętej przemiennej $*$-podalgebry $\mathcal{L}(s', s)$, która nie jest izomorficzna z żadną domkniętą $*$-podalgebrą $s$ (Theorem 4.32). Ostatnia część rozdziału poświęcona jest opisowi domkniętych przemiennych $*$-podalgebr $\mathcal{L}(s', s)$, które dopuszczają dopełnienie ortogonalne, czyli są obrazem operatora na $\mathcal{L}(s', s)$, będącego restrykcją projekcji ortogonalnej na $\mathcal{HS}(\ell_2)$ (Proposition 4.36). Towarzyszy temu opis podalgebr $\mathcal{L}(s', s)$ izomorficznych z $s$ i mających dopełnienie ortogonalne (Theorem 4.37), jak również przykład, że podalgebra izomorficzna z $s$ nie musi mieć takiego dopełnienia (Theorem 4.39).

W ostatnim, krótkim rozdziale pracy znajdujemy omówienie zagadnienia rachunku funkcyjnego dla operatorów normalnych z $\mathcal{L}(s', s)$. W Twierdzeniu 5.1 pokazano, że dla funkcji hölderowsko ciągłej w zerze można sensownie określić jej wartość dla dowolnego elementu normalnego. Z kolei przy ustalonym elemencie normalnym z $\mathcal{L}(s', s)$ udało się autorowi opisać algebrę funkcji, która zadaje rachunek funkcyjny przeprowadzający identyczność w ten element (Theorem 5.2). Okazuje się, że ta algebra funkcji jest w pewnym sensie optymalna jako podzbiór algebry funkcji ciągłych znikających w zerze (Corollary 5.3).

Pracę oceniam wysoko, zarówno pod względem merytorycznym, jak i redakcyjnym. Wyniki z najważniejszego, czwartego rozdziału pracy są interesujące poprzez nawiązanie do ogólnego problemu opisu podalgebr, czy ogólniej podstruktur danej struktury. Należy docenić wysiłek autora włożony w studiowanie zaawansowanej teorii algebr Frécheta, który zaowocował wynikami z tego rozdziału wypracowanymi w oparciu o wiadomości zaczerpnięte między innymi z monografii Meisego i Vogta. Niemałego talentu wymagało również skonstruowanie interesujących przykładów. W każdym z pozostałych rozdziałów można również wskazać wyniki niebanalne, które wzbogacają naszą wiedzę o strukturze algebry $\mathcal{L}(s', s)$, co – jak wspomniałem wcześniej – jest ciekawe, bowiem jest ona w naturalny sposób utożsamiona z innymi znanymi algebrami Frécheta. Sposób redagowania pracy jest w moim odczuciu bardzo kompetentny. Autor z dużym wyczuciem skupia się na tych elementach rozumowań, które tego wymagają, a omija te, które można pozostawić do sprawdzenia czytelnikowi. Uniknął w ten sposób zarzutu, który można by postawić wielu tekstom matematycznym, że dokładnie omawiają rzeczy banalne, a przechodzą do porządku dziennego nad prawdziwymi wyzwaniami. Autor nie poskąpił czytelnikowi komentarzy i omówienia prezentowanych zagadnień, co jest kolejnym atutem pracy.

Pozwolę sobie na przedstawienie pewnych uwag i pytań do pracy, które w żadnym wypadku nie podważają wysokiej oceny pracy wyrażonej powyżej, a mają raczej zaświadczyć, że autor niniejszej recenzji rzeczywiście pracę przeczytał.

(1) Nie jestem entuzjastą oznaczania seminorm symbolem $\|\cdot\|$ zarezerwowanym na ogół dla norm, jak np. w definicji 1.2, ale wiem, że to raczej nie jest pomysł autora.
(2) W Rozdziale 1, §3, w definicji algebr Köthego funkcje $|\cdot|_{p,q}$ niekoniecznie są normami (s. $3_{16}$, czytaj: strona 3, linia 16 od dołu).
(3) W Przykładzie 1.13(3) chodziło raczej o przedział $[-1,1]$?
(4) Pomyłka w indeksach w linii $19_5$.
(5) Nie zgłaszam zastrzeżeń do poprawności dowodu Lematu 4.1, ale zdaje się, że można by zaproponować nieco krótszy i bardziej naturalny dowód z użyciem macierzy Vandermonde'a.
(6) W Proposition 4.7 pojawia się symbol $\mathcal{N}$, który zapewne oznacza to samo co parę stron wcześniej, ale należałoby jednak to wyjaśnić.
(7) Zdaje się, że równoważność (i)$\Leftrightarrow$(iv) z Twierdzenia 4.11 zachodzi w dużo bardziej ogólnej sytuacji, co zostało zapewne przeoczone przez autora.
(8) Jedyna uwaga językowa: powinno być „is" lub „exists" zamiast „are" w linii $36^3$.
(9) W Rozdziale 5 brakuje mi analizy zbioru funkcji „dobrych" jednocześnie dla wszystkich elementów normalnych z $\mathcal{L}(s', s)$. Wiemy, że funkcje hölderowsko ciągłe w zerze są „dobre", ale czy są jeszcze jakiekolwiek inne?

**Konkluzja.** Jak powyżej uzasadniłem, rozprawa doktorska Tomasza Ciasia pt. *Algebra of smooth operators* spełnia wymagania określone w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym i może być podstawą dla nadaniu mu stopnia doktora nauk matematycznych. Do niniejszej recenzji dołączam osobny wniosek o wyróżnienie rozprawy.

Dariusz Cichoń

Dariusz Cichoń