

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko: Piotr Krasoń

2. Dyplomy:

a) dyplom magistra **matematyki** UAM - 1977

b) dyplom magistra inżyniera Politechnika Szczecińska -1977

c) dyplom doktora inżyniera specjalność elektrotechnika Politechnika Szczecińska - 1980 na podstawie rozprawy doktorskiej *"Metoda równań całkowych w statycznych i dynamicznych zagadnieniach teorii pola elektromagnetycznego"*

d) dyplom doktora habilitowanego inżyniera specjalność elektrotechnika Politechnika Gdańska -1989 na podstawie rozprawy habilitacyjnej *Metoda Elementu Globalnego w problemach analizy pól elektromagnetycznych i cieplnych*

e) dyplom doktora **matematyki** University of Virginia USA 1991 na podstawie rozprawy doktorskiej *On the Category of Unstable Modules Modulo Its Nilpotents* nostryfikowany uchwałą Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UAM

3. Zatrudnienie

a) 1977-1987 Instytut Elektroniki i Informatyki Politechniki Szczecińskiej

b) 1987-1991 Instytut Elektroniki i Informatyki Politechniki Szczecińskiej - urlop naukowy na odbycie studiów doktoranckich w University of Virginia USA

c) 1991-1992 C.C. Hsiung visiting professor Lehigh University Bethlehem P.A. USA.

1992 - Instytut Matematyki, Wydział Matematyczno-Fizyczny Uniwersytetu Szczecińskiego

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (DZ. U. nr 65 poz. 595 ze zm.):

a) title: *Zasada lokalno-globalna, odwzorowanie redukcji dla rozmaitości abelowych i K-teorii, reprezentacje l-adyczne*

b) W skład osiągnięcia naukowego wchodzi następujące prace:

1. G.Banaszak, **P.Krasoń**: *On a local to global principle in étale K-groups of curves*, Journal of K-theory and its Applications to Algebra Geometry and Topology, 12 (01) , August 2013, 183-201.
2. G.Banaszak, **P.Krasoń**: *On arithmetic in Mordell-Weil groups* Acta Arithmetica 150 (2011), 315-337.
3. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *On the image of l-adic representations for abelian varieties of type III* ,Tohoku Mathematical Journal. Volume 62, Number 2 (2010), 163-189.
4. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *On the image of l-adic representations for abelian varieties of type I and II* ,Documenta Mathematica Extra Volume: John H. Coates' Sixtieth Birthday (2006), pp.35-75.
5. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *On reduction map for étale K-theory of curves* ,Homology Homotopy Appl. 7, No. 3, Conf., 1-10 (2005).
6. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *Detecting linear dependence by reduction maps* , J. Number Theory 115, No. 2, 322-342 (2005).

7. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *On Galois representations for abelian varieties with real and complex multiplications* , Journal of Number Theory 100, No. 1, 117-132 (2003).

8. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *A support problem for the intermediate jacobians of l -adic representations*, J. Number Theory 100, No. 1, 133-168 (2003).

9. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *A support problem for K -theory of number fields*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.331, serie I, p.185-190 , (2000).

10. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń**: *On Galois cohomology of some p -adic representations and étale K -theory of curves* , Algebraic geometry:Hirzebruch 70 ,Proceedings of the algebraic geometry conference in honor of F.Hirzebruch 70's birthday, Contemp. Math. 241, pp. 23-44 (1999).

11. G.Banaszak, W.Gajda, **P.Krasoń** : *On the map between homology of henselization and completion of some local rings*. Journal of Pure and Applied Algebra 132, 1998 No. 1, pp.3-8

c) Omówienie osiągnięcia naukowego/artystycznego:

0 Wstęp i motywacja badań.

Przedstawiony dorobek można podzielić na trzy wiążące się ze sobą bloki tematyczne, które stanowią również rozdziały tego autoreferatu.

1. Zasada lokalno-globalna

2. Twierdzenie o otwartym obrazie. Hipotezy Mumforda-Tate'a, Hodge'a, Tate'a i Langa.

3. Algebraiczna K -teoria i K -teoria étalna

Jedną z ważnych zasad w arytmetyce jest zasada lokalno-globalna, która mówi, że jeżeli pewna własność arytmetyczna zachodzi lokalnie to zachodzi również globalnie. Typowym przykładem jest tutaj zasada Hassego dotycząca rozwiązywania równań zadanych przez formę kwadratową nad $\mathbb{Q}$. W moim badaniach zainteresowany byłem i jestem nadal jak dla bardziej skomplikowanych obiektów jakimi są rozmaitości abelowe, czy K -teoria Quillena bądź étalna można wykrywać własności globalne za pomocą - często łatwiejszych do opanowania - własności lokalnych. Problemowi temu poświęcone są prace 1,2,5,6,8,9. i omówione one będą w rozdziale 1. Poprzez lokalną sytuację rozumiem tutaj obiekt zdefiniowany nad ciałem skończonym a odwzorowaniem łączącym (z sytuacją globalną) jest odwzorowanie redukcji. Mówiąc bardziej precyzyjnie w sytuacji grup typu Mordella-Weila zdefiniowanych w pracy 8 istnieje dobrze zdefiniowane odwzorowanie redukcji. W przypadku rozmaitości abelowych mamy model Nerona $\mathcal{A}$ [BLR], który ma własność $\mathcal{A}(\mathcal{O}_F) = \mathcal{A}(F)$ gdzie F jest ciałem liczbowym, a $\mathcal{O}_F$ pierścieniem liczb całkowitych ciała F .

W rozdziale 2 omówimy wyniki zawarte w pracach 3, 4, a także 7, które dotyczą wyliczenia obrazu reprezentacji l -adycznej stowarzyszonej z jej modulem Tate'a. Rozpatrujemy tutaj reprezentacje absolutnej grupy Galois $G(\bar{F}/F)$. Otrzymujemy uogólnienia ważnego twierdzenia Serre'a o otwartym obrazie, jak również nowe przypadki klasycznych hipotez Mumforda-Tate'a, Hodge'a, Tate'a i Langa. Hipotezy te omówimy szczegółowo w rozdziale 2. Metody dowodu głównych twierdzeń są dość zaawansowane. Stosuje

się teorię p -adycznych algebr Liego, funktor restrykcji Weila, formy dwuliniowe zdefiniowane na module Tate'a i przede wszystkim "miniscule conjecture" udowodnioną przez R. Pinka [P] z której wynika, że typy (w sensie Dynkina) prostych czynników algebry Lie'ego obrazu reprezentacji l -adycznej są klasyczne.

Prace 10 i 11 omówione w rozdziale 3, dotyczą podobnych, chociaż o innym trochę charakterze pytań dotyczących odwzorowania redukcji w K -teorii ciał liczbowych i krzywych. W pracy 10 pokazaliśmy, że jądro odwzorowania redukcji dla parzystej K -teorii étalnej jest skończone. Przy założeniu słabej hipotezy Leopolda [PR] pokazaliśmy, że jądro odwzorowania brzegu w ciągu lokalizacyjnym składa się z nieskończenie podzielnych elementów w grupie kohomologii Galois $H^2(G_F; T_p(J)(n+1))$. J oznacza tutaj Jakobian krzywej X , $T_p(J)(n+1)$ jest $n+1$ -szym skręceniem modułu Tate'a odpowiadającego liczbie pierwszej p . Udowodniliśmy również, że p -torsyjna część tej grupy jest generowana przez specjalne elementy Deligne'a i Soulé.

W pracy 11 pokazaliśmy, że naturalne odwzorowanie w całkowito-liczbowej homologii specjalnej grupy liniowej indukowane przez odwzorowanie pomiędzy henselizacją i uzupełnieniem pewnych pierścieni lokalnych jest iniekcją. W dowodzie zastosowane było Twierdzenie Artina o aproksymacji [BLR]. Jako wniosek otrzymaliśmy wynik dotyczący K -teorii adeli.

Na końcu tego wstępu przypomnijmy pewne ogólne definicje twierdzenia z teorii rozmaitości abelowych, które występują w sformułowaniach twierdzeń w rozdziałach 1 i 2. Przy okazji ustalimy pewne oznaczenia.

Rozmaitość abelowa to projektywna rozmaitość algebraiczna, będąca jednocześnie grupą abelową, dla której odwzorowania strukturalne (mnożenie i branie odwrotności) są odwzorowaniami regularnymi. Inaczej mówiąc jest to obiekt grupowy w kategorii projektywnych rozmaitości algebraicznych (abelowość jest konsekwencją definicji). Rozpatrujemy rozmaitości abelowe zdefiniowane nad ciałem liczbowym, ale warto również przejść do ciała liczb zespolonych, żeby zobaczyć geometrię. Zbiór punktów zespolonych $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ jest torusem zespolonym. Λ jest tutaj kratą rangi maksymalnej w $\mathbb{R}^{2g}$. Tylko w przypadku $g = 1$ (krzywa eliptyczna) każda krata jest dopuszczalna. Dla $g > 1$ mamy następujące dobrze znane kryterium.

Twierdzenie 1. *Torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$ jest zbiorem punktów zespolonych $A(\mathbb{C})$ rozmaitości abelowej wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\mathbb{R}$ -dwuliniowa forma*

$$E : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{R}$$

taka, że

$$(1) \ E(iv, iw) = E(v, w)$$

$$(2) \ (v, w) \rightarrow E(v, iw) \text{ jest symetryczną dodatnio określoną formą}$$

$$(3) \ E(v, w) \in \mathbb{Z} \text{ dla } v, w \in \Lambda$$

Definicja 2. Izogenią pomiędzy rozmaitościami abelowymi nazywamy morfizm rozmaitości abelowych $f : A/F \rightarrow B/F$, który jest epimorfizmem o skończonym jądrze

Rozmaitość A/F nazywa się prosta jeżeli nie istnieje ciało $F' \supset F$ taka, że A/F' jest izogeniczna z produktem nietrywialnych rozmaitości abelowych. Mamy następujące twierdzenie H.Poincare'go.

Twierdzenie 3. Niech A/F będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F . Wtedy istnieje ciało $F' \supset F$ taki, że A jest izogeniczna z produktem $A_1^{e_1} \times \dots \times A_t^{e_t}$, gdzie A_i , $i = 1, \dots, t$ są prostymi rozmaitościami abelowymi.

Założmy, że A/F jest prostą rozmaitością abelową. Niech

$$End^0(A) = End(A) \otimes \mathbb{Q} \tag{1}$$

Na zbiorze $End^0(A)$ istnieje involucja Rosatiego R_{inv} [Mu]. Niech dalej $E = Z(End^0(A)) = Z(End(A) \otimes \mathbb{Q})$; $E_0 = E^{R_{inv}}$. Mamy następującą klasyfikację Alberta możliwych algebr endomorfizmów rozmaitości A/F [Mu].

- I $End^0(A) = E = E_0$ jest totalnie rzeczywistym ciałem liczbowym oraz $R_{inv} = id$.
- II $E = E_0$ jest totalnie rzeczywistym ciałem liczbowym; $End^0(A)$ jest algebrą z dzieleniem nad E taką, że każdy składnik prosty $End^0(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ jest izomorficzny z $M_2(\mathbb{R})$; $\beta \in End^0(A)$, ${}^t\beta = -\beta$; $R_{inv}(\alpha) = \beta^{-1}({}^t\alpha)\beta$
- III $E = E_0$ jest totalnie rzeczywiste $End^0(A)$ jest algebrą z dzieleniem nad E taką, że każdy składnik prosty $End^0(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ jest izomorficzny z algebrą kwaternionów Hamiltona $\mathbb{H}$; $R_{inv}(\alpha) = {}^t\alpha$
- IV E_0 jest totalnie rzeczywiste; E - totalnie urojone kwadratowe rozszerzenie E_0 ; $R_{inv}|_E = cc|_E$, (gdzie cc oznacza sprzężenie zespolone); $End^0(A)$ jest algebrą z dzieleniem nad E .

1 Zasada lokalno-globalna

Opiszemy teraz kontekst w jakim badamy tę zasadę a następnie wyniki uzyskane w poszczególnych pracach.

A.Schinzel [Sch] udowodnił następujące

Twierdzenie 4 (A.Schinzel 1973). *Niech K będzie ciałem liczbowym. Jeżeli $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$ są niezerowymi elementami K i kongruencja*

$$\alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_k^{x_k} \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}}$$

ma rozwiązanie dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $\mathfrak{p}$ z K wtedy odpowiadające równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych, tj. istnieją $n_1 \dots n_k \in \mathbb{Z}$ takie że $\beta = \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_k^{n_k}$.

Twierdzenie 4 udowodnione zostało ponownie przez C.Khare innymi metodami [Kh].

Twierdzenie A.Schinzla nie można rozszerzyć w pełnej ogólności do układu kongruencji. Zachodzi następujące

Twierdzenie 5 (A. Schinzel 1973). *Niech $\alpha_{i,j}, \beta_i$ ($i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, k$) będą niezerowymi elementami ciała liczbowego K , D dodatnią liczbą naturalną. Jeżeli układ kongruencji*

$$\prod_{j=1}^k \alpha_{i,j}^{x_j} \equiv \beta_i \pmod{\mathfrak{m}} \quad (i = 1, \dots, h)$$

jest rozwiązalny dla wszystkich modułów $\mathfrak{m}$ względnie pierwszych z D wtedy odpowiedni układ kongruencji ma rozwiązanie w liczbach całkowitych.

W tej samej pracy A.Schinzel [Sch] skonstruował kontrprzykład, w którym pokazał że Twierdzenie 5 jest fałszywe jeżeli ograniczymy się tylko do ideałów pierwszych.

W moich badaniach zajmowałem się uogólnieniami pytań podobnych do tych, którymi zajmował się A.Schinzel (cf. Twierdzenia 4 i 5). Bardzo istotnym wynikiem jest tutaj uzyskanie przeze mnie wspólnie z G.Banaszakiem kryterium dostatecznego dla obowiązywania zasady lokalno-globalnej. (cf. Twierdzenie 10). Podobne kryteria są - w innych kontekstach algebraicznych - przedmiotem prowadzonych przeze mnie intensywnych badań. Badania w tym kierunku prowadzę zarówno sam jak również we współpracy z G.Banaszakiem a ostatnio także z Y.Flickerem. W wysłanej ostatnio do

druku pracy z Y. Flicker, P.Krasoń *Linear relations in algebraic groups* stawiamy hipotezę podobną do Twierdzenia 5 w kontekście grup algebraicznych.

Niech A/F będzie rozmaitością abelową nad ciałem F . W 2002 roku W.Gajda zadał pytanie czy analogiczne do twierdzenia Schinza zachodzi dla rozmaitości abelowych. W przypadku cyklicznego Λ i abelowego schematu grupowego podobne pytanie zadał E. Kowalski [Ko]. Problem ten nazywa się w literaturze *problemem wykrywania liniowej niezależności*.

Question 6 (W.Gajda 2002). *Niech Λ będzie podgrupą grupy Mordella-Weila $A(F)$. Załóżmy, że x jest punktem w $A(F)$ takim, że $\text{red}_v x$ leży w $\text{red}_v \Lambda$ dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v ciała F . Czy z tego wynika, że $x \in \Lambda$?*

Pierwszym, który udzielił odpowiedzi na Pytanie 6 w przypadku przemennego pierścienia endomorfizmów był T. Weston [?].

Twierdzenie 7 (Weston 2003). *Niech A będzie rozmaitością abelową nad ciałem liczbowym F i założmy, że pierścień $\text{End}_F A$ jest przemienny. Niech Σ będzie podgrupą $A(F)$ i założmy że $x \in A(F)$ jest taki że $\text{red}_v x \in \text{red}_v \Sigma$ dla prawie wszystkich miejsc v ciała F . Wtedy $x \in \Sigma + A(F)_{\text{tors}}$.*

W pracy 6 udowodniono następujące twierdzenia

Twierdzenie 8 (G.Banaszak, W.Gajda, P.Krasoń 2005). *Niech A będzie rozmaitością abelową z polaryzacją główną wymiaru g zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F taką że $\text{End}_{\overline{F}}(A) = \mathbb{Z}$ or $\dim(A) = g$ i jest nieparzyste lub $g = 2$ or 6 . Niech P and $P_1 \dots P_r$ będą nietorsyjnymi elementami $A(F)$ takimi, że $P_1 \dots P_r$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Z}$. Oznaczmy przez Λ podgrupę $A(F)$ generowaną przez $P_1 \dots P_r$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (1) $P \in \Lambda$
- (2) $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$

oraz

Twierdzenie 9 (G.Banaszak, W.Gajda, P.Krasoń 2005). *Niech P oraz $P_1 \dots P_r$ będą nietorsyjnymi elementami $A(F)$ takimi, że $\mathcal{R}P$ jest wolnym $\mathcal{R}$ -modułem i $P_1 \dots P_r$ są liniowo niezależne nad $\mathcal{R}$. Oznaczmy przez Λ $\mathcal{R}$ -podmoduł $A(F)$ generowany przez $P_1 \dots P_r$. Załóżmy że $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v ciała F . Wtedy istnieje $a \in \mathbb{N}$ także $aP \in \Lambda$.*

$\mathcal{R}$ oznacza tutaj $\text{End}_{\overline{F}}(A)$.

W. Gajda and K.Górniewicz [GG] uzyskali $a = 1$. Należy tutaj wspomnieć pracę G.Banaszaka [B], który znalazł prostszy dowód rezultatu W.Gajdy i G.Górniewicza. A.Perucca [Pe2] analizowała problem wykrywania liniowej niezależności dla rozmaitości pólabeledowych.

Mając na uwadze kontrprzykład A.Schinzla do Twierdzenia 5 wspólnie z G.Banaszakiem rozpoczęliśmy pracę nad znalezieniem warunków dostatecznych dla obowiązywania zasady lokalno-globalnej.

W pracy 2 udowodniliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 10 (G.Banaszak, P.Krasoń). *Niech A/F będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F . Załóżmy że A jest izogeniczna z $A_1^{e_1} \times \dots \times A_t^{e_t}$ gdzie A_i są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaitościami abelowymi takimi, że $\dim_{\text{End}_{F'}(A_i)^0} H_1(A_i(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \geq e_i$ dla każdego $1 \leq i \leq t$, gdzie $\text{End}_{F'}(A_i)^0 := \text{End}_{F'}(A_i) \otimes \mathbb{Q}$ i F'/F jest skończonym rozszerzeniem takim, że izogenia zdefiniowana jest nad F' . Niech $P \in A(F)$ i niech Λ będzie podgrupą $A(F)$. Jeżeli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla prawie wszystkich $v \in \mathcal{O}_F$ wtedy $P \in \Lambda + A(F)_{\text{tor}}$. Co więcej jeżeli $A(F)_{\text{tor}} \subset \Lambda$, wtedy następujące warunki są równoważne:*

$$1 \ P \in \Lambda$$

$$2 \ r_v(P) \in r_v(\Lambda) \text{ dla prawie wszystkich } v \in \mathcal{O}_F.$$

Zanim omówię metody zastosowane w dowodzie Twierdzenia 10 kilka komentarzy i uwag.

- P. Jossen [Jo] odpowiedział pozytywnie na Pytanie 6 dla geometrycznie prostej rozmaitości abelowej. Wynik jest dokładny bez ewentualnej niedokładności w postaci torsji. Jego metody są inne niż użyte przeze mnie i G.Banaszaka.
- Twierdzenie 10 jest wynikiem bardzo ogólnym. zauważmy że już twierdzenie Poincarego o półprostocie kategorii rozmaitości abelowych z dokładnością do izogenii powoduje, że niedokładność torsyjna pojawia się niejako naturalnie. Usunięcie jej jest bardzo trudne chociaż nie a priori niemożliwe.

- Kryterium numeryczne w Twierdzeniu 10 jest sformułowane "kohomologicznie" jednak jest ono w praktyce łatwo sprawdzalne (rozmaitości abelowe mają prostą pierwszą kohomologię)
- Twierdzenie 4 A. Schinzla można otrzymać jako szczególny przypadek Twierdzenia 10 (dla przypadku $\mathbb{G}_m(F)$). Niedokładność torsyjna jest w tym przypadku łatwo usuwalna.
- Twierdzenie 7 jest oczywiście szczególnym przypadkiem Twierdzenia 10

Dowód Twierdzenia 10 jest subtelnym połączeniem metod teorii reprezentacji l -adycznych, metod redukcji mod v oraz metod transcendentnych. Zauważmy, że algebra endomorfizmów nie prostej rozmaitości abelowej A^e jest algebrą macierzową $M_{e \times e}(\text{End}_F(A))$. Zatem jesteśmy w sytuacji nieprzemiennej istotnie różnej od tej rozpatrywanej przez T. Westona. W dowodzie kluczowa jest teoria Kummera dla rozmaitości abelowych rozwinięta przez K. Ribeta [Ri] i znana jako metoda Ribeta-Bashmakova. Kluczowym twierdzeniem jest następujące twierdzenie o redukcji:

Twierdzenie 11 (G. Banaszak, P. Krasoń). *Niech $Q_{ij} \in A_i(L)$ dla $1 \leq j \leq r_i$ będą liniowo niezależne nad $\mathcal{R}_i = \text{End}_F(A_i)$ dla każdego $1 \leq i \leq t$. Istnieje rodzina ideałów pierwszych w w $\mathcal{O}_L$ o dodatniej gęstości taka, że $r_w(Q_{ij}) = 0$ w $A_{i,w}(k_w)_l$ dla każdego $1 \leq j \leq r_i$ oraz $1 \leq i \leq t$.*

Następnie badamy jak wyglądają proste moduły nad pewną blokowo macierzową algebrą $M_e(\mathbb{D})$ gdzie $\mathbb{D} = \prod D_i$ jest produktem algebr z dzieleniem. W szczególności otrzymujemy ciekawy lemat:

Lemma 12. *Homomorfizm śladu $M_e(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{Q}$ definiuje naturalny izomorfizm przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{Q}$*

$$tr : \text{Hom}_{M_e(\mathbb{D})}(W, M_e(\mathbb{D})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, \mathbb{Q}).$$

Lemat 12 jest kluczowy do ułożenia subtelnych kongruencji w pewnym module Ω pochodzącym od grupy Mordella-Weila rozmaitości abelowej. Następnie otrzymuje się wyrafinowaną sprzeczność z Twierdzeniem 11. Na bazie wspomnianego po Twierdzeniu 5 kontrprzykładu A. Schinzla skonstruowaliśmy następujący kontrprzykład pokazujący, że jeżeli warunek numeryczny z Twierdzenia 10 nie jest spełniony to teza tego twierdzenia nie zachodzi. Niech $E := E_d$ będzie zdefiniowaną nad $\mathbb{Q}$ krzywą eliptyczną

$y^2 = x^3 - d^2x$. Rozpatrzenie rodziny E_d zasugerował nam Karl Rubin. E_d ma mnożenie zespolone przez $\mathbb{Z}[i]$. Zgodnie z pracą K.Rubina i A.Silverberg [RS] ranga $\text{rank} E_d(\mathbb{Q})$ może osiągnąć 6.

Niech $A_d := E_d \times E_d$ będzie powierzchnią zdefiniowaną nad $\mathbb{Q}(i)$.

Fakt 13. *Istnieje nietorsyjny punkt $P \in A_d(\mathbb{Q}(i))$ oraz wolny $\mathbb{Z}[i]$ -moduł $\Lambda \subset A_d(\mathbb{Q}(i))$ taki, że $P \notin \Lambda$ i $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla wszystkich $v \nmid 2d$ w $\mathbb{Z}[i]$*

Ponieważ $\text{rank} E_d(\mathbb{Q}) \geq 2$ można znaleźć $Q_1, Q_2 \in E_d(\mathbb{Q}(i))$ takie, że są one liniowo niezależne nad $\mathbb{Z}[i]$.

Niech

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix}, \quad P_1 := \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{bmatrix}, \quad P_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

oraz $\Lambda := \mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3 \subset A(\mathbb{Q}(i))$

Pokazujemy stosując schemat rozumowania A. Schinzla, zaadoptowany nietrywialnie do przypadku A_d , że P i Λ spełniają tezę Faktu 13. Sądzymy, że nasz warunek jest nie tylko dostateczny, ale również konieczny.

Następnie rozważaliśmy następujący

Problem 14. *Niech A/F będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem F , niech $P \in A(F)$ oraz $\Lambda \subset A(F)$ będzie podgrupą. Czy istnieje efektywnie wyliczalny skończony zbiór S^{eff} ideałów pierwszych v pierścienia $\mathcal{O}_F$, zależny od A , P i Λ taki, że następujące warunki są równoważne?*

(1) $P \in \Lambda$

(2) $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla każdego $v \in S^{eff}$

W tym kierunku uzyskaliśmy następujący rezultat

Twierdzenie 15 (G.Banaszak, P.Krasoń). *Niech A/F spełnia założenia Twierdzenia 10. Niech $P \in A(F)$ i niech Λ będzie podgrupą $A(F)$. Istnieje skończony zbiór ideałów pierwszych v pierścienia $\mathcal{O}_F$, taki, że warunek: $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla każdego $v \in S^{fin}$ implikuje $P \in \Lambda + A(F)_{tor}$. Co więcej jeżeli $A(F)_{tor} \subset \Lambda$, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $P \in \Lambda$

(2) $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla $v \in S^{fin}$.

W dowodzie Twierdzenia 15 zastosowaliśmy dwuliniowe odwzorowanie związane z wysokością punktów rozmaitości abelowej [HS] oraz efektywną wersję twierdzenia Czebotariewa [LO].

Praca 1 dotyczy zasady lokalno-globalnej dla étalnej K-teorii krzywej. Przyjmijmy następującą definicję i oznaczenia:

Definicja 16. Skończone rozszerzenie F'/F nazywamy **ciałem rozszczepiającym Jakobian** krzywej X/F jeżeli J jest izogeniczny nad F' z $A_1^{e_1} \times \dots \times A_t^{e_t}$ gdzie $A_1, \dots, A_t$ są parami nieizogenicznymi geometrycznie prostymi rozmaitościami abelowymi.

Niech $\tilde{V}_{l,i}$ oznacza $T_l(A_i)(n) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$, gdzie $T_l(A_i)(n)$ jest n -twistem Tate'a rozmaitości abelowej A_i (cf. [?],[Se2]).

Głównym wynikiem pracy 1 jest następujące

Twierdzenie 17. *Niech X/F będzie gładką, właściwą i geometrycznie nieredukowalną krzywą genusu g . Niech F_0 będzie ciałem rozszczepiającym Jakobian J i załóżmy, że dla odpowiadającego rozbitcia Poincare $A^{e_1} \times \dots \times A^{e_t}$ mamy $\text{End}_{\bar{F}}(A_i) = \mathbb{Z}$ dla każdego $1 \leq i \leq t$. Niech $l > 2$ będzie liczbą pierwszą względnie pierwszą ze stopniem polaryzacji rozmaitości abelowych A_i . Niech S_l będzie zbiorem miejsc ciała F zawierającym miejsca złej redukcji, miejsca archimedesowe i liczby pierwsze nad l . Niech $\mathcal{X}$ będzie regularnym właściwym modelem nad $\mathcal{O}_{F,S_l}$. Załóżmy, że $\dim_{\mathbb{Q}_l} \tilde{V}_{l,i} \geq e_i$ dla każdego $1 \leq i \leq t$. Niech $\hat{P} \in K_{2n}^{et}(\mathcal{X})$ i niech $\hat{\Lambda}$ będzie skończeniem generowanym $\mathbb{Z}_l$ -podmodułem $K_{2n}^{et}(\mathcal{X})$. Jeżeli $r_v(\hat{P}) \in r_v(\hat{\Lambda})$ dla prawie wszystkich $v \in \mathcal{O}_{F,S_l}$ wtedy $\hat{P} \in \hat{\Lambda} + K_{2n}^{et}(\mathcal{X})_{tor}$.*

Metody zastosowane w dowodzie Twierdzenia 17 różnią się w sposób subtelny od tych użytych w dowodzie Twierdzenia 10. Przede wszystkim numeryczne niezmienniki z Twierdzenia 17 są zdefiniowane przy pomocy przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{Q}_l$ podczas gdy w Twierdzeniu 10 są one zdefiniowane nad $\mathbb{Q}$. Powoduje to rozliczne trudności techniczne, które można łatwo przeoczyć jak np. w recenzji pracy 1 w Zentralblatt.

W pracy 5 udowodniliśmy twierdzenie o redukcji dla krzywej X . Załóżmy, że X i jest gładką, właściwą i geometrycznie nierozkładalną krzywą wymiaru g , zdefiniowaną nad ciałem globalnym F .

Twierdzenie 18. *Niech J będzie rozmaitością Jakobiego krzywej X i założymy, że $\text{End}(J) = \mathbb{Z}$. Niech $P, P_1, \dots, P_r \in K_{2n}^{\text{et}}(\mathcal{X})$ będą nietorsyjnymi elementami, które są liniowo niezależne nad $\mathbb{Z}_l$. Ustalmy podział $\{1, 2, \dots, r\} = I \cup J$ i niech l^M będzie potęgą l . Istnieje nieskończenie wiele miejsc $v \notin S_l$ takich, że P_i , dla każdego $i \in I$, redukuje się w $K^{\text{et}}(\mathcal{X}_v)$ do elementu rzędu co najmniej l^M , oraz P_j dla każdego $j \in J$ redukuje się w $K^{\text{et}}(\mathcal{X}_v)$ do zera.*

Praca 8 poświęcona jest Problemowi Nośnika. Problem ten dla $\mathbb{G}_m$ został sformułowany przez Pála Erdösa, który w 1988 roku postawił następujące pytanie

Pytanie 19. *Niech $\text{Supp}(m)$ oznacza zbiór dzielników pierwszych liczby całkowitej m . Niech x i y będą dwoma liczbami naturalnymi. Czy następujące zdania są równoważne?*

1. $\text{Supp}(x^n - 1) = \text{Supp}(y^n - 1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
2. $x = y$.

Problem ten wraz z jego uogólnieniem dla wszystkich ciał liczbowych, jak również analogiczny problem dla krzywych eliptycznych został rozwiązany przez Corrales-Rodrigáñez i Schoofa w pracy [C-RS]. W pracy 8 badaliśmy problem nośnika w kontekście l -adycznych reprezentacji

$$\rho_l: G_F \rightarrow GL(T_l).$$

Dokładny opis rozpatrywanej klasy reprezentacji jest raczej techniczny, Są to reprezentacje spełniające Założenia 20 i 21. Ta klasa reprezentacji zawiera potęgi charakteru cyklotomicznego, moduły Tate’a rozmaitości abelowych z niezdegenerowanym CM-typem jak również moduły Tate’a pewnych rozmaitości abelowych z rzeczywistym mnożeniem.

Założenie 20. *Założymy, że dla każdego l , każdego skończonego rozszerzenia L/F i dla dowolnego elementu pierwszego w pierścieniu liczb całkowitych $\mathcal{O}_L$, takiego, że $w \notin S_l$, mamy*

$$T_l^{\text{Fr}_w} = 0,$$

(lub równoważnie $V_l^{\text{Fr}_w} = 0$), gdzie $\text{Fr}_w \in g_w$ jest arytmetycznym Frobeniusem odpowiadającym w .

Założenie 21. Niech $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ będzie nieskończonym zbiorem liczb pierwszych $l > 3$, które rozszczepiają się całkowicie w F i takich, że l -adyczna reprezentacja ρ_l spełnia następujące warunki:

1. Jeżeli $h > 1$, to dla każdego $1 \leq i \leq e$, istnieje podgrupa $H_i \trianglelefteq G(F(A[\lambda_i])/F) \subset GL_h(\mathbb{Z}/l) \cong GL(A_l[\lambda_i])$ taka, że:
 - (a) podgrupa $H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_e$ of the group $\prod_{i=1}^e GL_h(\mathbb{Z}/l)$ jest zawarta w $\text{Im } \overline{\rho}_l = G_l$ i $H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_e$ ma indeks względnie pierwszy z l w G_l
 - (b) H_i działa nierozkładalnie na $A_l[\lambda_i] \cong (\mathbb{Z}/l)^h$,
 - (c) $H_i/[H_i, H_i]$ ma indeks względnie pierwszy z l ,
 - (d) Istnieją macierze $\sigma_i, \beta_i \in H_i$ takie, że 1 jest wartością własną σ_i z przestrzeni własną wymiaru 1 i 1 nie jest wartością własną β_i ,
 - (e) centralizator H_i w $GL_h(\mathbb{Z}/l)$ równy jest $(\mathbb{Z}/l)^\times I_h$ tj. jeżeli $\sigma \in GL_h(\mathbb{Z}/l)$ i $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ dla każdego $\gamma \in H_i$, to σ jest macierzą skalarną,
 - (f) dla każdego $1 \leq i \leq e$ grupa H_i zawiera nietrywialną podgrupę D_i^0 grupy $\{aI_h; a \in (\mathbb{Z}/l)^\times\} \subset GL_h(\mathbb{Z}/l)$ skalarnych macierzy.
2. Jeżeli $h = 1$, to żądamy żeby $G_l = G(F_l/F)$ spełniała dwa warunki:
 - (a) dla każdego $1 \leq i \leq d$, istnieje diagonalna macierz $\sigma_i = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_d)$ w grupie G_l z $\mu_i = 1$ oraz $\mu_j \neq 1$, dla każdego $j \neq i$,
 - (b) istnieje izomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}/l[G_l] \cong \mathcal{O}_E/l$, gdzie $\mathbb{Z}/l[G_l]$ oznacza podpierścień $\mathcal{O}_E/l$ generowany przez $\mathbb{Z}/l$ i obraz G_l w $\mathcal{O}_E/l$ via naturalne zanurzenie $G_l \rightarrow (\mathcal{O}_E/l)^\times$.

Przypomnijmy pewne definicje. Niech F_v będzie uzupełnieniem F w v oraz k_v ciałem reszt $\mathcal{O}_F/v$. Niech dalej $G_v = G(\overline{F}_v/F_v)$, I_v będzie podgrupą inercji w G_v oraz $g_v = G(\overline{k}_v/k_v)$.

Definicja 22. Zdefiniujmy

$$H_f^1(G_F; T_l), \quad (\text{odp. } H_f^1(G_F; V_l))$$

jako jądro odwzorowania naturalnego:

$$H^1(G_F; T_l) \rightarrow \prod_v H^1(G_v; T_l) / H_f^1(G_v; T_l)$$

$$(\text{odp. } H^1(G_F; V_l) \rightarrow \prod_v H^1(G_v; V_l) / H_f^1(G_v; V_l))$$

gdzie $H_f^1(G_v; T_l) = i_v^{-1} H_f^1(G_v; V_l)$ via naturalne odwzorowanie:

$$i_v : H^1(G_v; T_l) \rightarrow H^1(G_v; V_l).$$

Grupa $H_f^1(G_v; V_l)$ jest zdefiniowana w [BK] str. 353 następująco:

$$H_f^1(G_v; V_l) = \begin{cases} \text{Ker} (H^1(G_v; V_l) \rightarrow H^1(I_v; V_l)) & \text{jeżeli } v \nmid l \\ \text{Ker} (H^1(G_v; V_l) \rightarrow H^1(G_v; V_l \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{\text{cris}})) & \text{jeżeli } v \mid l, \end{cases}$$

gdzie B_{cris} jest pierścieniem zdefiniowanym przez Fontaine'a (cf. [BK] p. 339).

Mamy naturalne odwzorowania:

$$H_f^1(G_F; T_l) \rightarrow \prod_v H_f^1(G_v; T_l),$$

$$H_f^1(G_F; V_l) \rightarrow \prod_v H_f^1(G_v; V_l).$$

Definicja 23. Zdefiniujmy

$$H_{f, S_l}^1(G_F; T_l) \quad (\text{odp. } H_{f, S_l}^1(G_F; V_l))$$

jako jądro naturalnego odwzorowania:

$$H^1(G_F; T_l) \rightarrow \prod_{v \notin S_l} H^1(G_v; T_l) / H_f^1(G_v; T_l)$$

$$(\text{odp. } H^1(G_F; V_l) \rightarrow \prod_{v \notin S_l} H^1(G_v; V_l) / H_f^1(G_v; V_l)).$$

Tutaj S_l oznacza ustalony skończony zbiór miejsc $\mathcal{O}_F$ zawierający elementy pierwsze nad l i taki, że reprezentacja ρ_l nie rozgałęzia się dla $l \notin S_l$.

Rozważmy odwzorowanie redukcji:

$$r_v: H_{f,S_l}^1(G_F; T_l) \rightarrow H^1(g_v; T_l),$$

dla każdego $v \notin S_l$, S_l oznacza skończony miejsc, który zawiera ideały pierwsze nad l w F . Niech $B(F)$ będzie skończenie generowaną grupą abelową taką, że dla każdego l istnieje iniektywny homomorfizm

$$\psi_{F,l}: B(F) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H_{f,S_l}^1(G_F; T_l).$$

Niech P i Q będą dwoma nietorsyjnymi elementami $B(F)$. Niech $\hat{P} = \psi_{F,l}(P \otimes 1)$ oraz $\hat{Q} = \psi_{F,l}(Q \otimes 1)$.

Problem Nośnika można sformułować w następującym kontekście

Pytanie 24 (Problem Nośnika). *Niech $\mathcal{P}^*$ będzie nieskończonym zbiorem liczb pierwszych. Załóżmy, że dla każdego $l \in \mathcal{P}^*$ następujący warunek zachodzi w grupie $H^1(g_v; T_l)$:*

dla każdego m i prawie wszystkich $v \notin S_l$

$$m r_v(\hat{P}) = 0 \quad \text{implikuje} \quad m r_v(\hat{Q}) = 0.$$

Jaka jest relacja pomiędzy elementami P i Q w grupie $B(F)$?

Udowodniliśmy następujące ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 25. *Załóżmy, że dla każdego $l \in \mathcal{P}^*$, dla każdego całkowitego m i prawie wszystkich $v \notin S_l$ następujący warunek zachodzi w grupie $H^1(g_v; T_l)$:*

$$m r_v(\hat{P}) = 0 \quad \text{implikuje} \quad m r_v(\hat{Q}) = 0.$$

Wtedy istnieją $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ i $f \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ takie, że $aP + fQ = 0$ w $B(F)$. Tutaj $\mathcal{O}_E$ oznacza pierścień liczb całkowitych ciała liczbowego E stowarzyszonego z reprezentacją ρ_l .

W celu dowodu Twierdzenia 25 badaliśmy reprezentacje o specjalnych własnościach sformułowanych w Założeniach 20 i 21. Udało się rozszerzyć metody z [C-RS] do takich l -adycznych reprezentacji. Głównym punktem w dowodzie jest kontrola relacji pomiędzy własnościami arytmetycznymi obrazów l -adycznych reprezentacji i odwzorowań redukcji. Kluczowe twierdzenia dotyczące obrazów reprezentacji zostały udowodnione w 7. Jako wnioski otrzymaliśmy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 26. Niech P, Q będą dwoma nietorsyjnymi elementami w grupie algebraicznej K -teorii $K_{2n+1}(F)$, gdzie n jest parzyste. Załóżmy, że dla prawie każdego ideału pierwszego $\mathfrak{p}$ pierścienia $\mathcal{O}_F$ i dla każdego m następujący warunek zachodzi w grupie $K_{2n+1}(k_{\mathfrak{p}})$:

$$m r_{\mathfrak{p}}(P) = 0 \quad \text{implikuje} \quad m r_{\mathfrak{p}}(Q) = 0,$$

gdzie, $r_{\mathfrak{p}}$ jest odwzorowaniem indukowanym na grupie K -teorii Quillena przez odwzorowanie redukcji na $\mathfrak{p}$. Wtedy elementy P i Q są liniowo niezależne nad $\mathbb{Z}$ w $K_{2n+1}(F)$.

Twierdzenie 26 było udowodnione innymi metodami, w krótkiej pracy 9.

Twierdzenie 25 ma następujący wniosek :

Twierdzenie 27. Niech A będzie rozmaitością abelową wymiaru $g \geq 1$, zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F i taką, że A spełnia jeden z następujących warunków:

1. A jest niezdegenerowanego CM typu oraz $\text{End}_F(A) \otimes \mathbb{Q}$ jest równe ciału mnożenia zespolonego E takiemu, że $E^H \subset F$
2. A jest prostą rozmaitością abelową z główną polaryzacją i mnożeniem rzeczywistym przez totalnie rzeczywiste ciało $E = \text{End}_F(A) \otimes \mathbb{Q}$ takie, że $E^H \subset F$ i ciało F jest dostatecznie duże. Zakładamy także, że $\dim A = he$, gdzie $e = [E : \mathbb{Q}]$ i h jest nieparzyste lub A jest prosta z polaryzacją główną taka że $\text{End}_F(A) = \mathbb{Z}$ oraz $\dim A$ jest równy 2 lub 6.

Niech P, Q będą dwoma nietorsyjnymi elementami $A(F)$ Załóżmy, że dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $\mathfrak{p}$ pierścienia $\mathcal{O}_F$ i dla każdej liczby całkowitej m następujący warunek jest spełniony w $A_{\mathfrak{p}}(k_{\mathfrak{p}})$

$$m r_{\mathfrak{p}}(P) = 0 \quad \text{implikuje} \quad m r_{\mathfrak{p}}(Q) = 0.$$

Wtedy istnieją $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ oraz $f \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ takie że $aP + fQ = 0$ in $A(F)$.

Istnieją dwa ważne szczególne przypadki rozmaitości abelowych spełniających warunek (2) Twierdzenia 27: rozmaitości abelowe A z $\text{End}_F(A) = \mathbb{Z}$ takie, że $\dim A$ jest nieparzystą liczbą całkowitą [Se3] oraz rozmaitości abelowe z rzeczywistym mnożeniem przez totalne rzeczywiste ciało liczbowe $E = \text{End}_F(A) \otimes \mathbb{Q}$, takie, że $e = g$. Dla takich rozmaitości abelowych analogon twierdzenia Serre's o otwartym obrazie jest udowodniony. Dodajmy również, że Problem Nośnika dla rozmaitości abelowych został później rozwiązany przez Larsena [Lar].

2 Twierdzenie o otwartym obrazie. Hipotezy Mumforda-Tate'a, Hodge'a, Tate'a i Langa.

W pracach 3 i 4, razem z G.Banaszakiem i W.Gajdą, badaliśmy l -adyczne reprezentacje stowarzyszone z rozmaitościami abelowymi typu III oraz typu I i II (zgodnie z klasyfikacją Alberta pierścieni endomorfizmów). Stosowane techniki zawierają teorię p -adycznych algebr Lie, funktor restrykcji Weila jak również "Miniscule Conjecture" udowodnioną przez R.Pinka [P1]. Twierdzenie R.Pinka zastosowaliśmy do otrzymania typów prostych algebr Lie pojawiających się w półprostym rozbiciu algebraicznego domknięcia (w topologii Zariskiego) obrazu l -adycznej reprezentacji (który jest grupą algebraiczną). Zdołaliśmy wyliczyć ten obraz i przez to sprawdzić klasyczne hipotezy Mumforda-Tate'a, Hodge'a, Langa i Tate'a dla dużej rodziny rozmaitości abelowych typu I i II oraz hipotezy Mumforda-Tate'a i Langa dla rodziny prostych rozmaitości typu III. Dodatkowo dla tych rozmaitości udowodniliśmy analogiczne twierdzenia do twierdzenia Serre'a o otwartym obrazie [Se2].

Zacniemy od opisanie rezultat'ow z pracy 4. Niech A/F będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem F , takim, że $\text{End}_{\bar{F}}(A) = \text{End}_F(A)$. Niech $A[l^i]$ będzie zbiorem punktów $A(\bar{F})$ anihilowanych przez l^i . Niech dalej $T_l(A) = \varprojlim A[l^i]$ będzie jej modułem Tate'a i $V_l(A) = T_l(A) \otimes \mathbb{Q}$. Wprowadźmy oznaczenia. Niech G_{l^∞} , G_l , $G_{l^\infty}^0$ oznaczają obrazy odpowiednich reprezentacji:

$$\begin{aligned}\rho_l &: G_F \rightarrow GL(T_l(A)) \cong GL_{2g}(\mathbb{Z}_l), \\ \bar{\rho}_l &: G_F \rightarrow GL(A[l]) \cong GL_{2g}(\mathbb{F}_l), \\ \rho_l \otimes \mathbb{Q}_l &: G_F \rightarrow GL(V_l(A)) \cong GL_{2g}(\mathbb{Q}_l).\end{aligned}$$

Niech $\mathcal{G}_l^{alg}$, ($G(l)^{alg}$, G_l^{alg} odpowiednio) oznacza domknięcie Zariskiego obrazu reprezentacji ρ_l , ($\bar{\rho}_l$, $\rho_l \otimes \mathbb{Q}_l$ odpowiednio) w $GL_{2g}/\mathbb{Z}_l$, ($GL_{2g}/\mathbb{F}_l$, $GL_{2g}/\mathbb{Q}_l$ odpowiednio).

Opiszemy teraz pewne klasyczne hipotezy dotyczące rozmaitości abelowych. Wybierzmy zanurzenie ciała F w $\mathbb{C}$. Niech $V = H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ będzie grupą kohomologii singularnych z wymiernymi współczynnikami. Rozważmy rozkład Hodge'a

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H^{1,0} \oplus H^{0,1},$$

gdzie $H^{p,q} = H^p(A; \Omega_{A/\mathbb{C}}^q)$ oraz $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$. Zauważmy że $H^{p,q}$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi ze względu na działanie $D = \text{End}_{\overline{F}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ na $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. W szczególności $H^{p,q}$ są E -przestrzeniami wektorowymi. Niech

$$\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$$

będzie $\mathbb{Q}$ -dwuliniową, niezdegenerowaną, formą alternującą pochodzącą od formy Riemanna rozmaitości A . Ponieważ będziemy rozpatrywać A z polaryzacją główną stowarzyszona forma dwuliniowa ψ ma wówczas następującą postać

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}$$

Zdefiniujmy kocharakter

$$\mu_{\infty} : \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) = GL_{2g}(\mathbb{C})$$

taki, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}^{\times}$, automorfizm $\mu_{\infty}(z)$ jest mnożeniem przez z na $H^{1,0}$ i identycznością na $H^{0,1}$.

Definicja 28. Grupa Mumforda-Tate'a rozmaitości abelowej A/F jest to najmniejsza podgrupa algwbraiczna $MT(A) \subset GL_{2g}$, zdefiniowana nad $\mathbb{Q}$, taka, że $MT(A)(\mathbb{C})$ zawiera obraz μ_{∞} . Grupa Hodge'a $H(A)$ jest z definicji składową spójną identyczności w $MT(A) \cap SL_V \cong MT(A) \cap SL_{2g}$.

Hipoteza 29. (*Mumford-Tate*) Jeżeli A/F jest rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F , to dla dowolnej liczby pierwszej l

$$(G_l^{alg})^{\circ} = MT(A)_{\mathbb{Q}_l},$$

gdzie $(G_l^{alg})^{\circ}$ oznacza spójną składową identyczności.

Hipoteza 30. (Hodge) Jeżeli A/F jest prostą rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F , to dla każdego $0 \leq p \leq g$ naturalne odwzorowanie cyklu indukuje izomorfizm

$$A^p(A) \cong H^{2p}(A(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \cap H^{p,p},$$

gdzie $A^p(A)$ jest $\mathbb{Q}$ -przestrzenią wektorową algebraicznych cykli kowymiaru p na A modulo równoważność homologiczna.

Hipoteza 31. (Tate) Jeżeli A/F jest prostą rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F i l jest liczbą pierwszą to dla każdego $0 \leq p \leq g$ odwzorowanie cyklu jest izomorfizmem:

$$A^p(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l \cong H_{et}^{2p}(\bar{A}; \mathbb{Q}_l(p))^{G_F}$$

gdzie $\bar{A} = A \otimes_F \bar{F}$.

Hipoteza 32. (Lang) Niech A będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem liczbowym F . Wtedy dla $l \gg 0$ grupa $\rho_l(G_F)$ zawiera grupę wszystkich homotetii w $GL_{T_l(A)}(\mathbb{Z}_l)$.

Definicja 33. Definicja klasy $\mathcal{A}$

Mówimy, że rozmaitość abelowa A/F , zdefiniowana nad ciałem liczbowym F jest klasy $\mathcal{A}$, jeżeli spełnione są następujące warunki

1. A jest prostą rozmaitością abelową wymiaru g z polaryzacją główną
2. $\mathcal{R} = \text{End}_{\bar{F}}(A) = \text{End}_F(A)$ i algebra endomorfizmów $D = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, jest typu I lub II w klasyfikacji Alberta algebr z dzieleniem i inwolucją (cf. [Mu], str. 210).
3. ciało F Jest takie, że dla każdego l domknięcie Zariskiego G_l^{alg} obrazu $\rho_l(G_F)$ w $GL_{2g}/\mathbb{Q}_l$ jest spójną grupą algebraiczną
4. $g = hed$, gdzie h jest nieparzystą liczbą naturalną, $e = [E : \mathbb{Q}]$ jest stopniem centrum E algebry D i $d^2 = [D : E]$.

Główne twierdzenia pracy 4 są następujące:

Twierdzenie 34. *Jeżeli A jest rozmaitością abelową klasy $\mathcal{A}$, to dla $l \gg 0$, mamy równość schematów grupowych :*

$$(G_l^{alg})' = \prod_{\lambda|l} R_{E_\lambda/\mathbb{Q}_l}(Sp_{2h})$$

$$(G(l)^{alg})' = \prod_{\lambda|l} R_{k_\lambda/\mathbb{F}_l}(Sp_{2h}),$$

gdzie G' oznacza komutator w grupie algebraicznej G , i $R_{L/K}(-)$ oznacza funktor restrykcji Weila.

Twierdzenie 35. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{A}$, wtedy dla $l \gg 0$, mamy:*

$$\overline{\rho_l}(G'_F) = \prod_{\lambda|l} Sp_{2h}(k_\lambda) = Sp_{2h}(\mathcal{O}_E/l\mathcal{O}_E)$$

$$\rho_l(\overline{G'_F}) = \prod_{\lambda|l} Sp_{2h}(\mathcal{O}_\lambda) = Sp_{2h}(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l),$$

gdzie $\overline{G'_F}$ jest domknięciem G'_F w G_F w topologii proskończonej.

Twierdzenie 36. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{A}$, wtedy*

$$G_l^{alg} = MT(A) \otimes \mathbb{Q}_l,$$

dla każdej liczby pierwszej l , gdzie $MT(A)$ oznacza grupę Mumforda-Tate'a rozmaitości A , tj., dla A zachodzi hipoteza Mumford - Tate'a.

Stosując podejście zapoczątkowane przez Tankeeva [Tan] i Ribeta [R1], rozwinięte przez V.K. Murty'ego [Mur] , pokazaliśmy:

Twierdzenie 37. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{A}$, wtedy hipoteza Hodge'a i hipoteza Tate'a o odwzorowaniach cykliów algebraicznych są prawdziwe dla rozmaitości abelowej A .*

W przeszłości hipotezy Mumforda-Tate’a, Tate’a i Hodge’a dla rozmaitości abelowych były przedmiotem intensywnych badań. Szczególne przypadki tych hipotez były udowodnione c.f. [Ab], [C2], [Mur], [P1], [Po], [R1], [Se3], [Se4], [Tan1], [Tan], [Tan2]. Dla rozmaitości abelowych typu I or II w/w prace zawierają przypadki, gdzie A jest taka, że $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ równa się $\mathbb{Q}$ lub ma centrum $\mathbb{Q}$. W pracach [?], [C1] i pracy 7 rozważane były przypadki z centrum większym niż $\mathbb{Q}$. Bardziej kompletna lista dotycząca rezultatów w kierunku hipotezy Hodge’a znajduje się w [G]. W pracy 4 dowodzimy te hipotezy dla przypadku gdy centrum $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ jest dowolnym totalnie rzeczywistym rozszerzeniem $\mathbb{Q}$. Aby udowodnić te hipotezy musieliśmy wykonać precyzyjne rachunki z wykorzystaniem funktora restrykcji Weila.

Co więcej stosując rezultat Wintenbergera (cf. [?], Cor. 1, p.5), dla A of class $\mathcal{A}$, byliśmy w stanie zweryfikować, że grupa $\rho_l(G_F)$ zawiera grupę wszystkich homotetii $GL_{T_l(A)}(\mathbb{Z}_l)$ for $l \gg 0$, tj. hipoteza Langa zachodzi dla A .

Ostatnim zastosowaniem metod rozwiniętych w pracy 4 był dowód analogonu twierdzenia Serre’a o otwartym obrazie [Se3] dla rozmaitości klasy $\mathcal{A}$.

Twierdzenie 38. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{A}$, wtedy dla każdej liczby pierwszej l , obraz $\rho_l(G_F)$ jest otwarty w grupie $C_{\mathcal{R}}(GSp_{(\Lambda, \psi)})(\mathbb{Z}_l)$ $\mathbb{Z}_l$ -punktów komutanta $\mathcal{R} = \text{End } A$ w grupie $GSp_{(\Lambda, \psi)}$ symplektycznych podobieństw formy dwuliniowej $\psi : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ stowarzyszonej z polaryzacją A . Dodatkowo dla $l \gg 0$ mamy:*

$$\rho_l(\overline{G'_F}) = C_{\mathcal{R}}(Sp_{(\Lambda, \psi)})(\mathbb{Z}_l).$$

Jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 38 otrzymujemy, że dla dowolnej rozmaitości A klasy $\mathcal{A}$ i dla każdego l grupa $\rho_l(G_F)$ jest otwarta w $\mathcal{G}_l^{alg}(\mathbb{Z}_l)$ (w topologii l -adycznej), gdzie $\mathcal{G}_l^{alg}$ jest domknięciem w topologii Zariskiego $\rho_l(G_F)$ w $GL_{2g}/\mathbb{Z}_l$.

W pracy 3 rozważaliśmy następującą klasę rozmaitości abelowych

Definicja 39. Abelowa rozmaitość A/F zdefiniowana nad ciałem liczbowym F jest klasy $\mathcal{B}$, jeżeli spełnione są następujące warunki

- (i) A jest prostą rozmaitością wymiaru g .
- (ii) $\mathcal{R} = \text{End}_{\bar{F}}(A) = \text{End}_F(A)$ i algebra endomorfizmów $D = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ jest typu III w klasyfikacji Alberta algebr z dzieleniem i involucją.
- (iii) Ciało F jest takie, że dla każdego l , domknięcie w topologii Zariskiego G_l^{alg} obrazu $\rho_l(G_F)$ w $\text{GL}_{V_l(A)}/\mathbb{Q}_l$ jest spójną grupą algebraiczną.
- (iv) $g = 2eh$, gdzie h jest nieparzystą liczbą całkowitą i $e = [E : \mathbb{Q}]$ jest stopniem centrum E algebry D .

Twierdzenie 40. *Jeżeli A jest rozmaitością abelową klasy $\mathcal{B}$, to*

$$G_l^{\text{alg}} = MT(A) \otimes \mathbb{Q}_l,$$

dla każdej liczby pierwszej l , gdzie $MT(A)$ oznacza grupę Mumforda-Tate'a rozmaitości A , tj. dla A zachodzi hipoteza Mumforda-Tate'a.

W trakcie dowodu hipotezy Mumforda-Tate'a wyliczyliśmy grupę Hodge'a i pokazaliśmy, że jest ona równa grupie Lefschetza. Nie wystarczy to jednak do otrzymania hipotezy Hodge'a dla rozmaitości abelowych typu III, klasy $\mathcal{B}$ (cf. [Mur]). Zauważmy, że dowód hipotezy Mumford-Tate'a i równość grup Hodge'a i Lefschetza dla rozmaitości abelowych typu I i II klasy $\mathcal{A}$ dały hipotezy Hodge'a i Tate'a dla tych rozmaitości abelowych. Szacujemy obrazy $\rho_l(G'_F)$ oraz $\bar{\rho}_l(G'_F)$ gdzie $G' := \overline{[G, G]}$ oznacza domknięcie podgrupy komutatora dla proskończonej grupy G . To szacowanie prowadzi do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 41. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{B}$, wtedy dla $l \gg 0$*

$$\begin{aligned} \rho_l(G''_F) &= \prod_{\lambda|l} \text{SO}_{(T_\lambda, \psi_\lambda)}(\mathcal{O}_\lambda)', \\ \bar{\rho}_l(G''_F) &= \prod_{\lambda|l} \text{SO}_{(A_\lambda[\lambda], \bar{\psi}_\lambda)}(k_\lambda)'. \end{aligned}$$

Jako wniosek otrzymujemy analogiczne do twierdzenia Serre'a twierdzenie

Twierdzenie 42. *Niech A będzie rozmaitością abelową klasy $\mathcal{B}$ i niech $r(l)$ będzie liczbą miejsc nad l w $\mathcal{O}_E$. Wtedy:*

- (i) $\rho_l(G_F)$ jest otwarty w $C_{\mathcal{R}}(\mathrm{GSp}_{(\Lambda, \kappa)})(\mathbb{Z}_l)$ dla każdej liczby pierwszej l ,
- (ii) $\rho_l(G'_F)$ ma indeks dzielący $2^{r(l)}$ w $C_{\mathcal{R}}(\mathrm{Sp}_{(\Lambda, \kappa)})(\mathbb{Z}_l)$ dla $l \gg 0$,
- (iii) $\rho_l(G''_F) = C_{\mathcal{R}}(\mathrm{Sp}_{(\Lambda, \kappa)})(\mathbb{Z}_l)'$ dla $l \gg 0$.

Uwaga 43. W [Lom] Remark 22.7 Davide Lombardo zauważył, że w naszym Lemacie 4.13 w pracy 3 brakuje jednego przypadku i poprawia twierdzenie dotyczące hipotezy Mumforda-Tate’a.

W pracy 7 otrzymaliśmy następujące rezultaty .

Twierdzenie 44. Niech A/F będzie prostą rozmaitością abelową o niezdegenerowanym CM -typie z $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q} = E$ i taką, że $E \subset F$. Rozważmy residualną reprezentację $\bar{\rho}_l: G_F \rightarrow \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_l)$ indukowaną przez działanie na l -torsyjnych punktach A . Wtedy dla wszystkich liczb pierwszych l dla których A ma dobrą redukcję i które rozszczepiają się całkowicie w F , obraz reprezentacji $\bar{\rho}_l$ składa się z reprezentacji diagonalnych postaci

$$\{\mathrm{diag}(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_l) : x_1 y_1 = \dots = x_g y_g\}.$$

Twierdzenie 45. Niech A/F będzie prostą rozmaitością abelową z polaryzacją główną, z mnożeniem rzeczywistym przez totalnie rzeczywiste ciało $E = \mathrm{End}_F(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ stopnia $e = [E : \mathbb{Q}]$ takiego że $g = eh$ przy czym h jest nieparzyste. Załóżmy dodatkowo, że F jest takie, że G_l^{alg} jest spójna i $\bar{\rho}_l(G_F) \subset G(l)^{\mathrm{alg}}(\mathbb{F}_l)$ dla prawie wszystkich l . Mamy następującą równość dla podgrupy komutatora obrazu $\bar{\rho}_l(G_F)$:

$$[\bar{\rho}_l(G_F), \bar{\rho}_l(G_F)] = \prod_{\lambda|l} \mathrm{Sp}_{2h}(\mathbb{F}_l),$$

dla wszystkich $l \gg 0$ takich, że l rozszczepia się całkowicie w E i A ma dobrą redukcję w l .

Dla rozmaitości abelowych rozważanych w Twierdzeniu 45 udowodniliśmy hipotezę Mumforda-Tate’a

Twierdzenie 46. Niech A będzie rozmaitością abelową z mnożeniem rzeczywistym przez totalnie rzeczywiste ciało $E = \mathrm{End}_F(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ stopnia $e = [E : \mathbb{Q}]$ takiego że $g = eh$ przy czym h jest nieparzyste. Wtedy hipoteza Mumforda-Tate’a jest prawdziwa dla A .

3 Algebraiczna K -teoria i K -teoria étalna.

W pracy 10 rozważaliśmy sytuację opisaną w założeniach Twierdzenia 47.

Twierdzenie 47. *Założmy, że X jest gładką, właściwą i geometrycznie nierozkładalną krzywą nad ciałem globalnym F . Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, $p \neq \text{char}(F)$. Niech $n > 0$ i niech S_0 będzie zbiorem ideałów pierwszych z F zawierającym miejsca złej redukcji dla X i miejsca leżące nad p . Niech $S \supseteq S_0$ będzie skończonym zbiorem miejsc. Założmy, że $\mathcal{X}$ jest gładkim właściwym modelem X nad pierścieniem liczb S -całkowitych ciała F . Założmy, że $x \in K_{2n}^{\text{et}}(\mathcal{X})$ jest nietorsyjnym elementem. Niech $M_1 = p^{m_1}$ będzie ustaloną potęgą p , istnieje nieskończenie wiele miejsc $v \notin S$ takich że x redukuje się w $K_{2n}^{\text{et}}(\mathcal{X}_v)$ do elementu rzędu przynajmniej M_1 .*

Twierdzenie 47 ma następujące konsekwencje

Twierdzenie 48. *Dla X , p i A takich, jak w Twierdzeniu 47 jądro odwzorowania redukcji:*

$$K_{2n+2}^{\text{et}}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}/p^m) \rightarrow K_{2n+1}^{\text{et}}(\mathcal{X}_v; \mathbb{Z}/p^m)$$

jest grupą skończoną.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$w_j(F) = |H^0(G_F; \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))|$$

oraz

$$v_j(F, J) = |H^0(G_F; J_\infty(j))|$$

Niech C_m oznacza kojądro odwzorowania brzegu

$$\delta_m : K_{2n+2}^{\text{et}}(X : \mathbb{Z}/p^m) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} K_{2n+1}^{\text{et}}(\mathcal{X}_v; \mathbb{Z}/p^m).$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 49. *Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \nmid w_n(F)w_{n+1}(F)v_{n+1}(F, J)$. Założmy, że grupa $H^2(G_{S_0}; T_p(J)(n+1))$ jest skończona. Wtedy dla m dostatecznie dużego, mamy naturalny izomorfizm:*

$$C_m \cong \text{div} H^2(G_F; T_p(J)(n+1))_p$$

W szczególności grupa C_m zanurza się w grupę $H^2(G_F; T_p(J)(n+1))$.

Twierdzenie 50. *Niech T spełnia następujące warunki:*

1. *Reprezentacja $\rho : G_F \rightarrow GL(T)$ nie rozgałęzia się poza skończonym zbiorem miejsc S_0 , który zawiera miejsca nad p .*
2. *Dla modulo p reprezentacji $\bar{\rho}_1 : G_F \rightarrow GL(T/p)$, niech $E = (\bar{F})^{\ker \bar{\rho}_1}$ będzie ciałem stałym, ze względu na działanie jądra reprezentacji $\bar{\rho}_1$. Zakładamy, że $\mu_p \subset E$ i że stopień $[E : F]$ jest względnie pierwszy z p .*
3. *Dla p^m reprezentacji $\bar{\rho}_m : G_F \rightarrow GL(T/p^m)$, niech $E' = (\bar{F})^{\ker \bar{\rho}_m}$ będzie ciałem stałym jądra $\bar{\rho}_m$. Zakładamy, że $\mu_{p^m} \subset E'$.*
4. *Zakładamy, że mod p^m reprezentacja $\bar{\rho}_m : G_F \rightarrow GL(T/p^m)$ ma rozwiązalny obraz.*
5. *dla każdego p^m odpowiadające rozszerzenie E'/E ma następującą własność: Istnieje rozwiązalna wieża*

$$E' \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_{r-1} \supseteq F_r \supseteq E$$

taka że dla każdego i stopień $[F_{i-1} : F_i]$ jest liczbą pierwszą i że w F_{i-1}/F_i only tylko jedno miejsce powyżej miejsc z S_0 ma nietrywialną grupę dekompozycji.

Istnieje skończony zbiór miejsc $S \supseteq S_0$ taki że każdy element grupy $H^2(G_{S_0}; T(n+1))_p$ może być zapisany w postaci:

$$\mathfrak{b}[Tr(\alpha'_m(u \otimes \beta^n \otimes v))],$$

dla S -jedności $u \in \mathcal{O}_{E',SA}^\times$ i pewnego $v \in T/p^m$. Odwzorowania $\mathfrak{b}$ i Tr są odpowiednio homomorfizmem Bocksteina:

$$\mathfrak{b} : H^1(G_S; T/p^m(n+1)) \rightarrow H^2(G_S; T(n+1))[p^m]$$

i odwzorowanie transferu:

$$Tr : H^1(G'; T/p^m(n+1)) \rightarrow H^1(G_S; T/p^m(n+1)),$$

W pracy 11 pokazaliśmy

Twierdzenie 51. *Niech R_0 będzie ciałem lub doskonałym pierścieniem z dyskretną waluacją. Niech R będzie dziedziną, która jest lokalną R_0 -algebrą istotnie skończonego typu nad R_0 . Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem maksymalnym R . Wtedy odwzorowanie naturalne*

$$H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}^h); \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}); \mathbb{Z})$$

jest iniekcją.

Wniosek 52. *Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 51. Niech l będzie liczbą pierwszą różną od charakterystyki ciała reszt $\kappa_{\mathfrak{p}}$. Wtedy naturalne odwzorowania*

$$H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}^h); \mathbb{Z})[l^k] \rightarrow H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}); \mathbb{Z})[l^k]$$

$$H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}^h); \mathbb{Z})/l^k \rightarrow H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}); \mathbb{Z})/l^k$$

są izomorfizmami. W szczególności podgrupy l -torsyjne grup $H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}^h); \mathbb{Z})$ oraz $H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}); \mathbb{Z})$ są izomorficzne i jądro odwzorowania

$$H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}^h); \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(SL(R_{\mathfrak{p}}); \mathbb{Z})$$

są jednoznacznie l -podzielne.

Przyjmijmy następującą naturalną definicję

Definicja 53. Zdefiniujmy pierścień adeli henselowskich

$$\mathbb{A}_f^h = \{(a_v) \in \prod_v F_v^h : a_v \in \mathcal{O}_v^h \text{ for almost all } v\}.$$

Wtedy udowodniliśmy następujący fakt

Fakt 54. *Odwzorowanie naturalne*

$$H_n(SL(\mathbb{A}_f^h); \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(SL(\mathbb{A}_f); \mathbb{Z})$$

jest iniekcją.

Wniosek 55. *Jądro odwzorowania naturalnego*

$$K_n(\mathbb{A}_f^h) \rightarrow K_n(\mathbb{A}_f)$$

jest torsyjne. Jego eksponent jest liczbą R_{n-1} zależną tylko od n .

Literatura

- [Ab] S. Abdulali *Hodge structures on abelian varieties of type III*, Annals of Math., 155, 2002, 915-928.
- [B] G. Banaszak, *On a Hasse principle for Mordell-Weil groups*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Ser. I, 347 (2009), 709-714.
- [BGK1] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń. *Support problem for the intermediate Jacobians of l -adic representations*, Journal of Number Theory 100 (2003), no. 1, 133-168.
- [BGK2] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *Detecting linear dependence by reduction maps*, Journal of Number Theory 115 (2) (2005), 322-342.
- [BGK3] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *On reduction map for étale K -theory of curves*, Homology, Homotopy and Applications 7 (3), Proceedings of Victor's Snaithe 60th Birthday Conference (2005), 1-10.
- [Bar] S. Barańczuk, *On reduction maps and support problem in K -theory and abelian varieties*, Journal of Number Theory 119 (2006), 1-17.
- [BK] S. Bloch, K. Kato *L -functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, I, 1990, 333 - 400.
- [Bo] F. A. Bogomolov, *Sur l'algébricité des représentations l -adiques*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 290 (1980), A701-A703.
- [BLR] S. Bosh, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [C1] W. Chi *l -adic and λ -adic representations associated to abelian varieties defined over a number field*, American Jour. of Math., 1992, 114, No. 3, 315-353.
- [C2] W. Chi *On the Tate modules of absolutely simple abelian varieties of Type II*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 1990, 18, No. 2, 85-95.
- [C-RS] C. Corrales-Rodríguez, R. Schoof, *Support problem and its elliptic analogue*, Journal of Number Theory 64 (1997), 276-290.

- [De] M. Deuring, *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionen* körper, Abh. Math. Sem. Hamburg 14 (1941), 197–272.
- [Fa] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern* Inv. Math. 73 (1983), 349–366.
- [GG] W. Gajda, K. Górniewicz, *Linear dependence in Mordell-Weil groups*, Journal für die reine und angew. Math. 630 (2009), 219–233.
- [G] B. Gordon *A survey of the Hodge Conjecture for abelian varieties* Appendix B in *A survey of the Hodge conjecture*, by J. Lewis, AMS, 1999, 297–356.
- [HS] Hindry, M., Silverman, J.H. *Diophantine Geometry an introduction*, Springer GTM vol 201, 2000.
- [Jo] P. Jossen, *Detecting linear dependence on a simple abelian variety*, Commentarii Mathematici Helvetici, 88, No.2, 323–352, 2013.
- [JP] P. Jossen, A. Perucca, *A counterexample to the local-global principle of linear dependence for abelian varieties*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 348 (2010), 9–10.
- [K] N. M. Katz, *Galois properties of torsion points on abelian varieties*, Invent. Math. 62 (1981) 481–502
- [Kh] C. Khare, *Compatible systems of mod p Galois representations and Hecke characters*, Math. Res. Letters 10 (2003), 71–83.
- [Kh-P] C. Khare, D. Prasad, *Reduction of homomorphisms mod p and algebraicity*, Journal of Number Theory 105 (2004), 322–332.
- [Ko] E. Kowalski, *Some local-global applications of Kummer theory* Manuscripta Math. 111 (2003), 105–139.
- [La] S. Lang, *Complex multiplication*, Grundlehren der mathematischen wissenschaften 255, Springer-Verlag, 1983.
- [Lar] M. Larsen, *The support problem for abelian varieties*. J. Number Th. **101** (2003), 398–403.

- [Lom] D.Lombardo *On the l -adic Galois representations attached to nonsimple abelian varieties* Ann. Inst. Fourier 66, No. 3, 1217-1245 (2016).
- [LS] M. Larsen, R. Schoof, *Whitehead's Lemmas and Galois cohomology of abelian varieties* preprint
- [LO] J. C. Lagarias, A. M. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem* Proc. Sympos. Univ. Durham, Academic Press London (1975), 409–464.
- [Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies In Mathematics 5, Oxford University Press, 1970.
- [Mur] V.K. Murty *Exceptional Hodge classes on certain abelian varieties*, Math. Ann., vol 268, 1984, 197-206.
- [PR] B.Perrin-Riou, *Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques*, Asterisque 222 (1995).
- [Pe1] A. Perucca, *Prescribing valuations of the order of a point in the reductions of abelian varieties and tori*, Journal of Number Theory 129 (2009), 469–476.
- [Pe2] A. Perucca, *On the problem of detecting linear dependence for products of abelian varieties and tori*, Acta Arithmetica 142 (2010), no. 2, 119–128.
- [P] R. Pink, *On the order of the reduction of a point on an abelian variety*, Mathematische Annalen 330 (2004), 275–291.
- [P1] R. Pink *l -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture*, J. reine angew. Math. 495, 1998, 187–237.
- [Po] H. Pohlmann *Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type* Annals of Math., 88, 1968, 161-180.
- [Re] I. Reiner, *Maximal orders*, Academic Press, London, New York, San Francisco 1975.
- [Ri] K. A. Ribet, *Kummer theory on extensions of abelian varieties by tori*, Duke Mathematical Journal 46 (1979), no. 4, 745–761.

- [R1] K. A. Ribet *Hodge classes on certain types of abelian varieties*, American Jour. of Math., 1983, 105, No. 2, 523–538.
- [RS] K. Rubin, A. Silverberg, *Ranks of elliptic curves*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 39 (2002), no. 4, 455–474.
- [Sch] A. Schinzel, *On power residues and exponential congruences*, Acta Arithmetica 27 (1975), 397–420.
- [Se] J.-P. Serre, *Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes. II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35 (1971), 731–737.
- [Se1] J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. I.H.E.S., n° 54 (1981), 123–201.
- [Se2] J.P. Serre *Abelian l -adic representations and elliptic curves* McGill University Lecture Notes, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1968.
- [Se3] J.P. Serre *Résumés des cours au Collège de France*, Annuaire du Collège de France, 1985-1986, 95-100,
- [Se4] J.P. Serre *Représentations l -adiques*, in *Algebraic Number Theory*" (ed. S.Iyanaga), Japan Society for the promotion of Science, 1977, 177-193.
- [ST] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Annals of Math. 68 (1968), 492–517.
- [Sil1] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag, 1986.
- [Sil2] J. H. Silverman, *The theory of height functions*, Arithmetic Geometry (edited by G. Cornell, J.H. Silverman) 151–166, Springer-Verlag, 1986.
- [Tan] S.G. Tankeev *Cycles on simple abelian varieties of prime dimension*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol 46 no. 1, 1982, 155–170.
- [Tan1] S.G. Tankeev *On algebraic cycles on surfaces and abelian varieties*, Mathematics of the USSR, Izvestiya (Translation of Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 45, 1981), 18, 1982, 349-380.
- [Tan2] S.G. Tankeev *On the Mumford-Tate conjecture for abelian varieties*, Algebraic Geometry 4, J. Math. Sci., 81 no. 3, 1996, 2719-2737.

- [Tan3] S.G. Tankeev *Abelian varieties and the general Hodge conjecture*, Mathematics of the USSR, Izvestiya (Translation of Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 57, 1993), 43, 1994, 79-191.
- [Ta] J. Tate *p-divisible groups, proceedings of the Conference on local Fields* Springer-Verlag, 1968.
- [We] T. Weston, *Kummer theory of abelian varieties and reductions of Mordell-Weil groups*, Acta Arithmetica 110 (2003), 77-88.
- [Wi] J. P. Wintenberger *Démonstration d'une conjecture de Lang dans des cas particuliers*, J. Reine Angew. Math., 2002, 553, 1-16.

P. Kneen