Autoreferat

I. Imię i Nazwisko: Andrzej Żak

II. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

a) doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, 2006, AGH w Krakowie

rozprawa: *Podział trójkąta na trójkąty podobne*, 2006,
promotor: prof. dr hab. Zdzisław Skupień

b) magister matematyki (specjalność matematyka finansowa), 2000,
Uniwersytet Jagielloński

praca: *Twierdzenie Waringa*,
promotor: prof. dr hab. Kamil Rusek

III. Historia zatrudnienia

a) 1.10.2001 do 28.02.2007 – asystent na Wydziale Matematyki Stosowanej AGH w Krakowie

b) od 1.03.2007 – adiunkt na Wydziale Matematyki Stosowanej AGH w Krakowie

IV. Osiągnięcie naukowe o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595, z późn. zm.):

a) Powiązany tematycznie cykl publikacji zatytułowany *Pakowanie grafów*

b) Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

[H1] A. Görlich, A. Żak, A note on packing graphs without cycles of length up to five, Electronic Journal of Combinatorics 16(1) (2009) #N30

[H2] A. Görlich, A. Żak, On packable digraphs, SIAM Journal on Discrete Mathematics 24 (2010) 552-557.

[H3] A. Żak, A note on k-placeable graphs, Discrete Mathematics 311 (2011) 2634-2636.

[H4] A. Görlich, A. Żak, Sparse graphs of girth at least five are packable, Discrete Mathematics 312 (2012) 3606-3613.

[H5] A. Żak, Near Packings of Graphs, Electronic Journal of Combinatorics 20(2) (2013) P36.

[H6] A. Żak, Packing graphs with bounded sum of size and maximum degree, Discrete Mathematics 329 (2014) 12-18.

[H7] A. Żak, On packing two graphs with bounded sum of sizes and maximum degree , SIAM Journal on Discrete Mathematics 28 (2014) 1686-1698.

c) opis celu naukowego wyżej wymienionego cyklu prac i osiągniętych wyników

1 Pakowanie grafów

1.1 Wstęp

Moja rozprawa habilitacyjna, na którą składają się prace [H1]-[H7], poświęcona jest zagadnieniu pakowania grafów. Niech $G_1, \ldots, G_k$ będą grafami rzędu co najwyżej n. Mówimy, że $G_1, \ldots, G_k$ *pakują się* w graf pełny K_n (krótko, pakują się), jeśli K_n zawiera krawędziowo rozłączne podgrafy $H_1, \ldots, H_k$ takie, że H_i jest izomorficzny z G_i dla każdego $i = 1, \ldots, k$. Problem pakowania grafów jest nie tylko interesujący sam w sobie, ale też ma wiele powiązań z innymi problemami teorii grafów. Przykładowo, graf G zawiera podgraf H jeśli dopełnienie $\bar{G}$ grafu G pakuje się z H. Słynna hipoteza Erdősa i Sós [42] mówi, że każdy graf o średnim stopniu większym niż $k-1$ zawiera wszystkie drzewa rozmiaru k. Hipoteza ta została przeformułowana na "język pakowania" przez Woźniaka [97] i od tej pory jest rozważana w obu równoważnych wersjach.

Graf G jest k-kolorowalny jeśli G pakuje się z grafem rzędu n, który jest rozłączną sumą k klik. Hajnal i Szemerédi [58] wykazali, że jeśli minimalny stopień grafu spełnia $\delta(G) \geq (1 - 1/r)n$ oraz n jest podzielne przez r, to G zawiera podgraf będący sumą klik K_r. Kierstead i Kostochka [67] podali krótki dowód nieco ogólniejszego faktu. Wykazali oni mianowicie, że każdy graf G o maksymalnym stopniu $\Delta \leq q$ ma tzw. sprawiedliwe kolorowanie $q+1$ kolorami (kolorowanie jest sprawiedliwe jeśli liczebności klas kolorów różnią się co najwyżej o jeden). Daleko idącym uogólnieniem tych faktów jest hipoteza BCE (Bollobás i Eldridge [14], Catlin [31]) mówiąca o tym, że jeśli grafy G_1 i G_2 o maksymalnych stopniach równych odpowiednio Δ_1 i Δ_2 spełniają

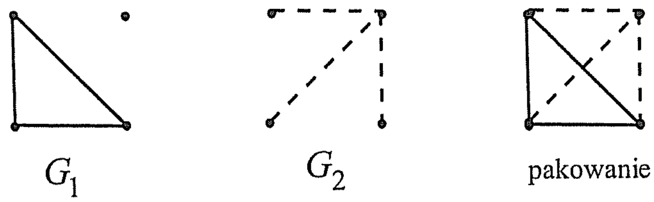
$$(\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1) \leq n + 1,$$

to G_1 i G_2 pakują się.

Liczba Turána $\mathrm{ex}(n, H)$ to największe m dla którego istnieje graf rzędu n i rozmiaru m, który nie zawiera H jako podgrafu. Liczbę $\mathrm{ex}(n, H)$ można też zdefiniować jako najmniejsze m takie, że każdy graf rzędu n i rozmiaru mniejszego niż $\binom{n}{2} - m$ pakuje się z H. Niedawno, Alon i Yuster [6] obliczyli liczbę Turána dla podgrafów rozpinających H spełniających $\Delta(H) \leq \sqrt{n}/40$:

$$ex(n, H) = \binom{n-1}{2} + \delta(H) - 1.$$

Co istotne, dowód prowadzony jest w "języku pakowania".



Rysunek 1: Pakowanie G_1 i G_2

Powyższe przykłady mogłyby sugerować, że również problem pakowania można sprowadzić do problemu istnienia podgrafu. Jednak, jak zauważa Bollobás [13], natury obu problemów różnią się istotnie. W większości wyników dotyczących pakowania, oba grafy pochodzą z dużych rodzin grafów (tutaj przez *duże* rozumie się co najmniej takie w których liczba nieizomorficznych grafów rzędu n z rodziny, rośnie szybciej niż każdy wielomian zmiennej n). Ponadto, istotnie różnią się również metody dowodowe – przykładowo, w problemach pakowania właściwie nie stosuje się lematu Szemerédiego.

Problem pakowania po raz pierwszy pojawił się, chociaż jeszcze nie jako odrębne zagadnienie, w teorii złożoności obliczeniowej pewnych własności. Dla własności grafowej $\mathcal{P}$ złożoność $c(\mathcal{P})$ to liczba informacji pobieranych kolejno z macierzy sąsiedztw nieznanego grafu G (każda informacja to odpowiedź "tak" lub "nie" na pytanie czy dana para wierzchołków jest krawędzią G) potrzebna do rozstrzygnięcia (dla każdego G) czy $G \in \mathcal{P}$. Milner i Welsch [74] zauważyli, że każdy warunek typu

$$|E(G_1)| + |E(G_2)| \leq f(n) \tag{1}$$

zapewniający pakowanie dwóch dowolnych n-wierzchołkowych grafów G_1 i G_2, implikuje ograniczenie dolne $c(\mathcal{P}) \geq f(n)$. Przypuszczali oni, że za $f(n)$ można przyjąć $f(n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ (więcej nie można, gdyż gwiazda $G_1 = K_{1,n-1}$ i skojarzenie doskonałe $G_2 = \frac{n}{2}K_2$ nie pakują się). Ich hipotezę udowodnili Sauer i Spencer [80], uzyskując przy okazji ograniczenie $c(\mathcal{P}) \geq \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ (wcześniej wiadomo było tylko, że $c(\mathcal{P}) \geq \sqrt{2n} - 2$). Oprócz tego, Sauer i Spencer podali szereg innych warunków wystarczających do pakowania dwóch grafów. Jednocześnie, mniej więcej w tym samym czasie ukazały się dwie inne prace dotyczące pakowania: Bollobása i Eldridge'a [14] oraz Burnsa i Schustera [28].

Od tej pory teoria pakowania rozwijała się w wielu kierunkach, z których chyba najważniejsze są następujące trzy. Pierwszy dotyczy pakowania drzew. Tutaj bada się między innymi wspomnianą hipotezę Erdősa i Sós, patrz przykładowo [3, 36, 79], oraz hipotezę o pakowaniu drzew sformułowaną przez Gyárfása i Lehela [55] i mówiącą o tym, że dowolna rodzina n drzew rzędów kolejno $1, 2, \ldots, n$ pakuje się, patrz na przykład [7, 17]. Druga seria ciekawych i silnych wyników dotyczy hipotezy BCE [1, 16, 35, 65, 68]. Trzecim z kolei kierunkiem jest pakowanie grafów rzadkich.

W mojej pracy badawczej, zajmowałem się głównie właśnie trzecim z wymienionych nurtów teorii pakowania, czyli pakowaniem grafów rzadkich. W pracach [14, 28, 80] uzyskano między innymi następujące trzy twierdzenia, które są punktem odniesienia dla moich rozważań.

Twierdzenie 1 **([28])** *Niech G będzie grafem rzędu n i rozmiaru co najwyżej $n-2$. Wówczas dwie kopie G pakują się.*

Twierdzenie 2 **([80])** *Niech G_1 i G_2 będą grafami rzędu n i rozmiaru co najwyżej $n-2$ każdy. Wówczas G_1 i G_2 pakują się.*

Twierdzenie 3 **([14])** *Niech G_1 i G_2 będą grafami rzędu $n > 10$ spełniającymi warunki: $\Delta(G_1) < n-1$, $\Delta(G_2) < n-1$ oraz $|E(G_1)|+|E(G_2)| \leq 2n-3$. Wówczas G_1 i G_2 pakują się.*

(W istocie twierdzenie 3 jest pewnym uproszczeniem nieco silniejszego twierdzenia Bollobása i Eldridge'a [14].) Ograniczeń na rozmiar w powyższych twierdzeniach nie da się już poprawić, co pokazuje przykład $G = G_1 = G_2 = K_3 \cup K_{1,n-4}$ (suma gwiazdy i trójkąta). Ewentualnie, dla twierdzenia 1 prostszym przykładem jest gwiazda $K_{1,n-1}$, zaś dla twierdzenia 2 gwiazda i dowolny graf bez izolowanego wierzchołka. Zasadnym jest w związku z tym poszukiwanie dodatkowych warunków dla grafów, które pozwolą na podwyższenie rozmiaru przy jednoczesnym zapewnieniu pakowania. W mojej rozprawie habilitacyjnej rozważam odpowiedniki twierdzeń 1-3 dla pakowania grafów z ograniczeniami uwzględniającymi zarówno rozmiar jak i maksymalny stopień, pakowania grafów bez krótkich cykli, pakowania digrafów oraz niemal-pakowań czyli uogólnień pakowania.

1.2 Pakowanie grafów z warunkami na rozmiar i/lub maksymalny stopień [H3], [H6] i [H7]

W podrozdziale zakładamy bez straty ogólności, że pakowane grafy mają wspólny rząd n (w przeciwnym razie możemy dodać odpowiednią ilość wierzchołków izolowanych do jednego z grafów nie zmieniając ani rozmiaru ani maksymalnego stopnia). Wiele wyników dotyczących pakowania uwzględnia warunki dotyczące maksymalnego stopnia lub rozmiaru. Przykładowo pierwszymi wynikami były wymienione we wstępie twierdzenia 1-3. W pracy [80] oprócz twierdzenia 2, Sauer i Spencer wykazali również, że jeśli $2\Delta(G_1)\Delta(G_2) < n$ to G_1 i G_2 pakują się. Wynik ten następnie został na różne sposoby wzmocniony przez Kiersteada i Kostochkę [68], Bollobása, Kostochkę i Nakprasita [16], Kaula, Kostochkę i Yu [65] i innych. Innym warunkiem wystarczającym pakowania jest warunek na iloczyn rozmiarów

$|E(G_1)||E(G_2)| < \binom{n}{2}$, sformułowany również w [80]. Z kolei ten wynik został istotnie wzmocniony przez Kostochkę i Yu [70], którzy wykazali, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ oraz $n \geq n_0(\epsilon)$ o wiele słabszy warunek $|E(G_1)||E(G_2)| < (1-\epsilon)n^2$ wystarcza do pakowania G_1 i G_2 o ile żaden z grafów nie należy do jednej z trzech dokładnie określonych rodzin. Ponadto Brandt [21] wykazał, że dla dowolnego $0 < \alpha < 1/2$ i dostatecznie dużych n, warunkiem wystarczającym do pakowania G_1 i G_2 jest $|E(G_1)| \leq \alpha n$ oraz $|E(G_2)| \leq \frac{1}{3\sqrt{\alpha}} n^{3/2}$. Wynik ten został następnie rozszerzony na wartości $1/2 \leq \alpha < 1$ z dodatkowym warunkiem $\Delta(G_2) < n - 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)}}$ (oraz trochę gorszym współczynnikiem przy ograniczeniu na rozmiar G_2) przez Bollobása, Kostochkę i Nakprasita [15]. Niedawno, Alon i Yuster [6] badając liczby Turána dla grafów rozpinających znaleźli warunek łączący ograniczenia na rozmiar i ograniczenia na maksymalny stopień. Wykazali oni, że dla dostatecznie dużych n, jeśli jeden graf ma minimalny stopień δ oraz maksymalny stopień co najwyżej $\sqrt{n}/200$, zaś drugi graf ma co najwyżej $n - \delta - 1$ krawędzi, to oba grafy pakują się.

Kończąc ten krótki przegląd wybranych wyników, cofnijmy się ponownie do pionierskiej pracy Sauera i Spencera [80]. Jak zaznaczono we wstępie, w [80] udowodniono również, że jeśli

$$|E(G_1)| + |E(G_2)| < \left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor, \tag{2}$$

to G_1 i G_2 pakują się. Z przykładu $G_1 = K_{1,n-1}$ oraz $G_2 = \frac{n}{2}K_2$ (gwiazda i skojarzenie doskonałe) wynika, że sumarycznego rozmiaru obu grafów nie da się już podnieść bez dodatkowych założeń. Niemniej, przez obniżenie maksymalnego stopnia w obu grafach do $n-2$, ograniczenie na sumę rozmiarów grafów można znacząco poprawić (patrz twierdzenie 3). W pracy [H7] wykazałem następujące analogony wymienionych właśnie rezultatów uwzględniające oprócz rozmiarów grafów, także ich maksymalne stopnie.

Twierdzenie 4 ([H7]) *Niech G_1 i G_2 będą grafami rzędu $n > 10^{10}$. Jeśli*

$$|E(G_1)| + |E(G_2)| + \max\{\Delta(G_1), \Delta(G_2)\} < \frac{5}{2}n - 2,$$

to G_1 i G_2 pakują się.

Twierdzenie 5 ([H7]) *Niech G_1 i G_2 będą grafami rzędu n spełniającymi $\Delta(G_1) < n-1$, $\Delta(G_2) < n-1$. Jeśli*

$$|E(G_1)| + |E(G_2)| + \max\{\Delta(G_1), \Delta(G_2)\} < 3n - 96n^{3/4} - 65,$$

to G_1 i G_2 pakują się.

Warunek w twierdzeniu 4 jest najlepszy z możliwych co pokazuje (ponownie) przykład $G_1 = K_{1,n-1}$ oraz $G_2 = \frac{n}{2}K_2$. Ponadto, warunek w twierdzeniu 5 jest asymptotycznie ostry, co pokazuje przykład $G_1 = K_1 \cup K_{1,n-2}$ oraz $G_2 = C_n$. Natomiast (dla dostatecznie dużych n) przykład $G_1 = G_2 = tK_{t-2} \cup K_{1,n-t(t-2)-1}$ (suma t kopii grafów pełnych K_{t-2} oraz gwiazdy) pokazuje, że współczynnika 3 w twierdzeniu 5 nie można poprawić nawet przy dalszym obniżaniu maksymalnego stopnia. Niedawno Györi, Kostochka, McConvey i Yager [56] wykazali, że jeśli $\Delta(G_1), \Delta(G_2) < n-1$, to warunek $|E(G_1)| + |E(G_2)| + \Delta(G_1) + \Delta(G_2) < 3n - C$ (dla pewnej uniwersalnej stałej C) zapewnia pakowanie G_1 i G_2. W [H6] wykazałem również następujące wzmocnienie twierdzenia 5 dla przypadku izomorficznych grafów.

Twierdzenie 6 ([H6]) *Niech G będzie grafem rzędu n. Jeśli*

$$|E(G)| + \Delta(G) \leq 2n - 14n^{2/3} - 20,$$

to dwie kopie G pakują się.

Na zakończenie tego rozdziału, chciałbym zaznaczyć iż rozpatrywano również warunki na rozmiar zapewniające pakowalność większej liczby grafów, chociaż dla tego zagadnienia liczba prac jest znacząco mniejsza. Część z nich dotyczy pakowania wielu drzew i jest związana ze wspomnianą we wstępie hipotezą o pakowaniu drzew. Poza tym, Woźniak i Wojda [93] wykazali, że dla $n \geq 9$ warunek $|E(G)| \leq n-2$ wystarcza do pakowania nie tylko dwóch ale trzech kopii grafu G. Następnie, Kheddouci, Marshall, Saclé i Woźniak [66] wykazali, że trzy dowolne grafy pakują się o ile rozmiar żadnego z nich nie przekracza $n-3$. Rozstrzygnęli w ten sposób dla przypadku $k = 3$ hipotezę Bollobása i Eldridge'a [14] mówiącą o tym, że k dowolnych grafów pakuje się o ile rozmiar żadnego z nich nie przekracza $n-k$. W [66] postawiono też nieco inną hipotezę, mówiącą o tym, że, poza pewnymi wyjątkami, warunek $|E(G)| \leq n-k+1$ wystarcza do pakowania k kopii każdego grafu G. W pracy [H3], udało mi się uzyskać następujący ogólny wynik.

Twierdzenie 7 ([H3]) *Niech G będzie grafem spełniającym $|E(G)| \leq n-2(k-1)^3$. Wówczas k kopii G pakuje się.*

1.3 Pakowanie grafów bez krótkich cykli [H1] i [H4]

W tym podrozdziale rozważam tylko pakowanie dwóch kopii tego samego grafu. Niedługo po ukazaniu się pracy [28], zaczęto badać możliwości rozszerzenia twierdzenia 1. W 1978 roku Burns i Schuster [27] scharakteryzowali grafy rzędu n i rozmiaru $n-1$, które nie pakują się. W roku 1981 Faudree, Rousseau, Schelp i Schuster [46] zrobili to samo dla grafów rzędu n i rozmiaru n, i doszli do wniosku, że oprócz obecności wierzchołka bardzo wysokiego stopnia, istotną przeszkodą w pakowaniu jest istnienie w grafie krótkich cykli. Rozważmy następujące zdanie

$\mathbf{T}_m$: *Dwie kopie każdego grafu, który nie jest gwiazdą i nie ma cykli $C_3, \ldots, C_m$, pakują się.*

Zauważmy najpierw, że powyższe zdanie ma sens tylko w przypadku pakowania dwóch kopii tego samego grafu. Istotnie, w przeciwnym razie za G_1 moglibyśmy wziąć $\bar{K}_{r-1} \cup K_{1,n-r}$ a za G_2 graf r-regularny o dowolnie dużej talii (ang. girth, czyli długości najkrótszego cyklu). W [46] zaproponowano następującą hipotezę.

Hipoteza 1 *Zachodzi* T_4.

W tej samej pracy Faudree, Rousseau, Schelp i Schuster wykazali, że T_4 zachodzi dla grafów mających co najwyżej $\frac{6}{5}n-2$ krawędzi. Razem z Görlich [H4] osłabiliśmy znacząco wymaganie na liczbę krawędzi, dowodząc następującego twierdzenia

Twierdzenie 8 ([H4]) *Niech k będzie dowolną liczbą naturalną oraz G będzie grafem różnym od gwiazdy i nie mającym cykli C_3, C_4. Jeśli*

$$|E(G)| \leq \frac{2k-1}{k}n - 4\frac{k-1}{k}(2\sqrt{n}+1) - 2k(4k-5),$$

to dwie kopie G pakują się.

W szczególności z twierdzenia 8 wynika, że T_4 zachodzi dla odpowiednio dużych grafów planarnych (graf planarny bez cykli C_3 i C_4 ma co najwyżej $\frac{5}{3}(n-2)$ krawędzi).

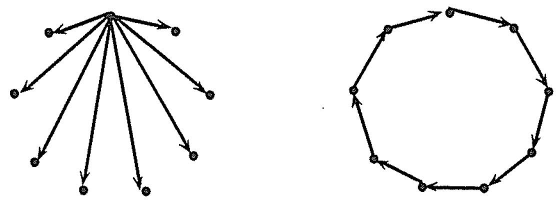
Innym sposobem zbliżania się do dowodu hipotezy 1 jest dowodzenie T_m dla możliwie małych wartości m. I tak Woźniak [96] udowodnił T_7, Brandt [22] T_6, Görlich, Pilśniak, Woźniak i Zioło [53] podali alternatywny dowód T_6 przy dodatkowym warunku braku punktów stałych dla permutacji pakującej. Razem z Görlich [H1] wykazaliśmy T_5.

Twierdzenie 9 ([H1]) *Dwie kopie grafu, który nie jest gwiazdą i nie ma cykli $C_3, \ldots, C_5$, pakują się.*

W szczególności twierdzenie 9 implikuje, że hipoteza 1 jest prawdziwa dla grafów dwudzielnych (grafy takie nie mają cykli nieparzystych).

1.4 Pakowanie digrafów [H2] i [H6]

Pakowanie digrafów definiujemy w sposób analogiczny do pakowania grafów. Mówimy więc, że dwa digrafy D_1 i D_2 *pakują się* (w digraf pełny rzędu n) jeśli $\vec{K}_n$ (czyli digraf pełny) zawiera łukowo rozłączne kopie D_1 i D_2. Ponieważ $\vec{K}_n$ ma dwa razy więcej łuków niż K_n krawędzi wydaje się, że twierdzenia 1-3 mogą zostać istotnie wzmocnione w przypadku digrafów. Okazuje się to jednak nieprawdą. Rozważmy następujący przykład: D_1 jest gwiazdą ze źródłem w wierzchołku centralnym, a D_2 cyklem skierowanym, patrz rysunek 2. W oczywisty sposób D_1 i D_2 nie pakują się, a ich rozmiary tylko znikomo przekraczają ograniczenia w twierdzeniach 2–3. Zatem, aby zapewnić możliwość pakowania dwóch digrafów musimy sumę ich rozmiarów ograniczyć przynajmniej do $2n-2$ (i jest to warunek wystarczający, patrz [11]), ewentualnie rozmiar każdego z nich ograniczyć do $n-1$.



Rysunek 2. Przykład digrafów nie pakujących się.

Zgoła inaczej sprawa wygląda w przypadku pakowania dwóch kopii tego samego digrafu. Zdefiniujmy liczbę $f(n)$ jako maksymalne m takie, że dwie kopie każdego digrafu D rzędu n i rozmiaru nie większego niż m pakują się. Zatem, aby udowodnić ograniczenie dolne $f(n) \geq m_d$ należy wykazać, że dwie kopie każdego digrafu rzędu n i rozmiaru nie większego niż m_d pakują się. Z kolei, aby udowodnić ograniczenie górne $f(n) < m_g$ należy wskazać digraf rozmiaru m_g, który nie pakuje się sam ze sobą. Takim przykładowym digrafem może być "dwu-gwiazda" tj. digraf w którym centralny wierzchołek jest połączony z każdym innym dwoma łukami i są to wszystkie łuki digrafu. Wynika stąd, że

$$f(n) \leq 2n - 3.$$

W 1985 roku Benhocine i Wojda [12] znaleźli przykład z mniejszą liczbą łuków i postawili następującą hipotezę

Hipoteza 2 $f(n) = 2n - 4$.

W tej samej pracy Benhocine i Wojda udowodnili, że każdy digraf rzędu n i rozmiaru co najwyżej n jest poddigrafem pewnego digrafu samodopełniającego. Implikuje to, że

$$f(n) \geq n.$$

Dalsze wzmocnienia ograniczenia dolnego otrzymywane były kolejno przez Wojdę i Zioło [94]

$$f(n) \geq \frac{3}{2}(n-2)$$

oraz przez Görlich, Pilśniak, Woźniaka i Zioło [54]

$$f(n) \geq \frac{7}{4}n - 81.$$

Razem z Görlich [H2] wykazaliśmy, że

$$f(n) = 2n - o(n)$$

dowodząc następującego twierdzenia

Twierdzenie 10 ([H2]) *Niech D będzie digrafem rzędu n. Jeśli*

$$|A(D)| \leq 2n - 10n^{2/3} - 7,$$

to dwie kopie D pakują się.

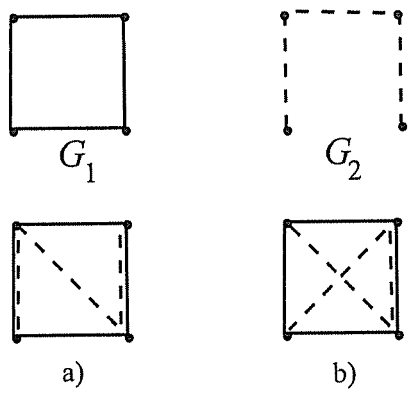
Na hipotezę 2 można spojrzeć także z innej strony. Twierdzenie 1 natychmiast implikuje, że jest ona prawdziwa dla digrafów, których wszystkie łuki są symetryczne (pakowanie takich digrafów jest równoważne pakowaniu odpowiednich grafów). W pracy [H6], jako wniosek z głównego twierdzenia, otrzymałem, że hipoteza 2 jest prawdziwa dla digrafów mających odpowiednio dużo par łuków symetrycznych. Niech $\deg^*(x) = |N_D^-(x) \cup N_D^+(x)|$ oraz $\Delta^* = \max\{\deg^*(x) : x \in V(D)\}$. Wówczas zachodzi

Twierdzenie 11 ([H6]) *Niech D będzie digrafem rzędu n spełniającym $|A(D)| \leq 2n - 4$. Jeśli D ma co najmniej $\Delta^* + 14n^{2/3} + 16$ par łuków symetrycznych, to dwie kopie D pakują się.*

1.5 Niemal-pakowania [H5]

Niemal-pakowanie jest uogólnieniem pakowania. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną grafów. Mówimy, że grafy G_1 i G_2 mają *niemal-pakowanie dopuszczające $\mathcal{F}$* jeśli K_n zawiera podgrafy H_1 i H_2 izomorficzne odpowiednio z G_1 i G_2 oraz takie, że graf zdefiniowany przez wspólne krawędzie H_1 i H_2 jest elementem $\mathcal{F}$. W pracy [H5] badałem następujące trzy rodziny grafów:

- $\mathcal{E}_k$ – rodzina grafów mających co najwyżej k krawędzi,
- $\mathcal{D}_k$ – rodzina grafów o maksymalnym stopniu nie większym niż k,
- $\mathcal{C}_k$ – rodzina grafów nie zawierających żadnego podgrafu o wierzchołkowej spójności co najmniej $k+1$ (przykładowo $\mathcal{C}_1$ jest rodziną grafów acyklicznych).



Rysunek 3: Niemal-pakowania G_1 i G_2.

Rysunek 3 a) przedstawia niemal-pakowanie G_1 i G_2 dopuszczające $\mathcal{E}_2$ (ale też $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{C}_1$), zaś rysunek 3 b) niemal-pakowanie G_1 i G_2 dopuszczające $\mathcal{E}_1$.

Pojęcie niemal-pakowania zostało po raz pierwszy poruszone, choć nie pod ta nazwą, przez Bollobása i Erdősa. Pytali oni o wyznaczenie, dla danych n i k, największej wartość m takiej, że każde dwa n-wierzchołkowe grafy G_1 i G_2 spełniające $|E(G_1)| + E(G_2)| \leq m$ mają niemal-pakowanie dopuszczające $\mathcal{E}_k$ (patrz [13] str. 436, Problem 24). Z drugiej strony, Eaton [41] rozważała niemal-pakowania dopuszczające $\mathcal{D}_k$. W szczególności wykazała ona, że dla grafów G_1 i G_2 spełniających $(\Delta(G_1)+1)\cdot(\Delta(G_2)+1) \leq n+1$ (gdzie n jest wspólnym rzędem obu grafów) istnieje niemal-pakowanie dopuszczające $\mathcal{D}_1$ (przypomnijmy, że kwestia istnienia pakowania takich grafów to hipoteza BCE).

Nawiązując do problemu Bollobása i Erdősa, zdefiniujmy liczbę $m(n, \mathcal{F})$ jako maksymalne m takie, że dwie kopie każdego grafu G rzędu n i rozmiaru nie większego niż m mają niemal-pakowanie dopuszczające $\mathcal{F}$. Zauważmy, że twierdzenie 1 implikuje

$$m(n, \mathcal{C}_0) = m(n, \mathcal{D}_0) = m(n, \mathcal{E}_0) = n - 2,$$

ponieważ niemal-pakowanie dopuszczające $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{D}_0$ lub $\mathcal{E}_0$, to po prostu pakowanie. Poniższe twierdzenie stanowi (z pewnymi nieistotnymi uproszczeniami) zebranie wyników osiągniętych przeze mnie w [H5]:

Twierdzenie 12 ([H5])

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}n - 10 \leq & m(n, \mathcal{D}_1) \leq \frac{3}{2}n - 2 \\
2n - 10n^{2/3} - 7 \leq & m(n, \mathcal{D}_2) \leq 2n - 3 \\
(k+1)n - 4k(k+1)^2 - 2 \leq & m(n, \mathcal{C}_k) \leq (k+1)n - (k+1)\frac{k+2}{2} - 1 \\
\sqrt{\frac{k}{2}n(n-1)} \leq & m(n, \mathcal{E}_k) \leq (n-1)\frac{\lceil k/2 \rceil + 2}{2}.
\end{aligned}$$

Na szczególną uwagę zasługuje wynik dla $m(n, \mathcal{C}_k)$, który dla dowolnego k wyznacza niemal dokładnie wartość tego parametru (różnica między oszacowaniem dolnym i górnym zależy wyłącznie od k).

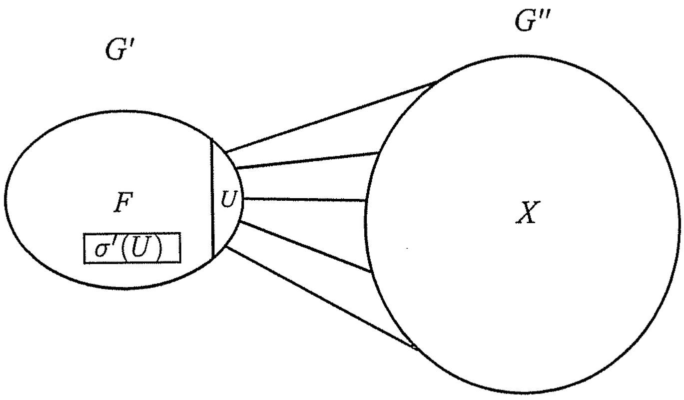
1.6 Metodologia

Na koniec całego rozdziału chciałbym krótko omówić metody użyte w dowodach najważniejszych rezultatów. Rozważmy najpierw pakowanie dwóch kopii tego samego grafu bądź digrafu G. Wspólnym punktem wyjścia wszystkich dowodów jest pewien standardowy sposób rozszerzania pakowania, który w jednej z najprostszych wersji ma następującą postać: jeśli w G istnieje zbiór S liczności $2k$ spełniający dodatkowo warunki

- S jest zbiorem niezależnym w G,

- różne wierzchołki z S mają rozłączne zbiory sąsiadów,
- każdy wierzchołek z S ma stopień co najwyżej k w G,

to pakowanie dwóch kopii $G - S$ (o ile istnieje) można rozszerzyć do pakowania dwóch kopii G. Powyższa metoda rozszerzania pakowania została po raz pierwszy wykorzystana w [31] w trochę bardziej złożonej formie, a w przedstawionej postaci pojawiła się w [54]. Struktury, które ona opisuje w naturalny sposób pojawiają się w grafach bez cykli C_3 i C_4 – za S można wziąć sąsiadów dowolnego wierzchołka. Jednak liczebność takiego S może być za mała nawet jeśli weźmiemy sąsiadów wierzchołka maksymalnego stopnia. Rozwiązaniem zastosowanym w [H1] jest zabronienie cykli $C_3, \ldots, C_5$, wzięcie za S wierzchołków sąsiadujących z końcami krawędzi mającej maksymalny stopień oraz pewna modyfikacja powyżej opisanego sposobu rozszerzania pakowania.



Rysunek 4: Podział $V(G)$

W pozostałych dowodach powyżej opisana sytuacja jest tylko jedną (najłatwiejszą) z możliwości. Główna metoda jest wypracowana w przypadku gdy odpowiednio duży taki zbiór S nie istnieje. Bezpośrednią konsekwencją tego faktu jest istnienie w G stosunkowo małego (liczebności $o(n)$) zbioru U pokrywającego niemal n krawędzi. To z kolei skutkuje tym, że $G - U$ rozpada się na wiele składowych (liczba krawędzi w $G - U$ jest mniejsza od liczby wierzchołków), z których odpowiednio duża część to drzewa. Podsumowując, można podzielić $V(G)$ na trzy zbiory U, F i X takie, że F indukuje w G las o wielu składowych a X indukuje odpowiednio rzadki podgraf w G. Kluczowym faktem jest to, że nie ma krawędzi pomiędzy F i X, patrz rysunek. Dosyć ograniczona struktura podgrafu G' indukowanego przez $U \cup F$ umożliwia znalezienie permutacji pakującej dla drugiej kopii G' przeprowadzającej U w F (na rysunku $\sigma'(U)$). Z drugiej strony twierdzenie 1 implikuje istnienie permutacji pakującej dla drugiej kopii $G'' := G[X]$. Ponieważ nie ma krawędzi pomiędzy F i X, zestawienie powyższych permutacji jest pakowaniem dwóch kopii G.

Metodę tę po raz pierwszy zastosowaliśmy z Görlich w [H2]. Następnie była ona rozwijana w [H4], [H6] i [H7]. Przykładowo w [H4] natrafiliśmy na dodatkową (jak się okazało, dużą) trudność polegającą na radzeniu sobie z wierzchołkami stopnia 1 (w przypadku digrafów prosta zamiana miejscami wierzchołka stopnia 1 i jego sąsiada pozwala na rozszerzenie pakowania, nie jest to możliwe dla grafów nieskierowanych). Natomiast w [H7], dodatkową trudność stanowiło między innymi pojawienie się sytuacji niesymetrycznej tj. takiej, w której w jednym z grafów istniał odpowiednio duży zbiór S o żądanych własnościach, a w drugim nie.

2 Pozostały dorobek naukowy

2.1 Wykaz pozostałych publikacji

Na pozostały dorobek składają się następujące publikacje i preprinty (w porządku chronologicznym)

[P1] A. Żak, Dissection of a triangle into similar triangles, Discrete & Computational Geometry 34 (2005) 295–312.

[P2] Z. Skupień and A. Żak, Rainbow regular order of graphs , Australasian Journal of Combinatorics 42 (2008), 115—127.

[P3] A. Fortuna, Z. Skupień and A. Żak, Maximizing hamiltonian pairs and k-sets via numerous leaves in a tree, Discrete Mathematics 309 (2009) 1788–1792.

[P4] A. Żak, A note on perfect dissections of an equilateral triangle , Australasian Journal of Combinatorics 44 (2009) 87—93.

[P5] A. Żak, Harmonious order of graphs , Discrete Mathematics 309 (2009) 6055–6064.

[P6] A. Dudek, G. Y. Katona and A. Żak, Hamilton-chain saturated hypergraphs. Discrete Mathematics 310 (2010) 1172–1176.

[P7] A. Dudek, A. Żak, On vertex stability with regard to complete bipartite subgraphs, Discussiones Mathematicae Graph Theory 30 (2010) 663-–669.

[P8] A. Żak, Dissections of Polygons into Convex Polygons , International Journal on Computational Geometry and Applications 20(2) (2010) 223–244.

[P9] S. Cichacz, A. Görlich, M. Zwonek and A. Żak, On $(C_n; k)$ stable graphs, Electronic Journal of Combinatorics 18(1) (2011) #P205.

[P10] S. Cichacz, A. Görlich, M. Nikodem and A. Żak, A lower bound on the size of $(H; 1)$-vertex stable graphs, Discrete Mathematics 312 (2012) 3026–3029.

[P11] A. Dudek, A. Żak, On Hamilton-chain saturated uniform hypergraphs, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 14 (2012) 21–28.

[P12] A. Ruciński and A. Żak, Hamilton Saturated Hypergraphs of Essentially Minimum Size , Electronic Journal of Combinatorics 20(2) (2013) P25.

[P13] A. Żak, Growth order for the size of smallest hamiltonian chain saturated

uniform hypergraphs, European Journal of Combinatorics 34 (2013) 724–735.

[P14] A. Żak, On $(K_q; k)$ stable graphs, Journal of Graph Theory 74 (2013) 216–221.

[P15] A. Żak, A generalization of an independent set with application to (Kq;k)-stable graphs, Discrete Applied Mathematics 162 (2014) 421–427.

[P16] Z. Skupień and A. Żak, Pair-sums packing and rainbow cliques, in Topics in graph theory (ed. Regina Tyshkevich), University of Illinois, USA, 2013. — Tryb dostępu:
http://www.math.uiuc.edu/~kostochk/Zykov90-Topics_in_Graph_Theory.pdf 131—144.

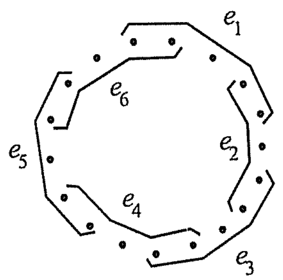
[P17] A. Żak, General lower bound on the size of $(H; k)$-stable graphs, Journal of Combinatorial Optimization doi:10.1007/s10878-013-9595-y

[P18] S. Cichacz, A. Görlich, M. Nikodem and A. Żak, Generalized vertex stability, preprint.

[P19] A. Ruciński and A. Żak, Upper bounds on the minimum size of Hamilton saturated hypergraphs, preprint.

2.2 Maksymalne niehamiltonowskie hipergrafy [P6], [P11], [P12], [P13], [P19].

Ta część mojego dorobku dotyczy pewnych aspektów ekstremalnych dla istnienia cykli w hipergrafach k-jednolitych czyli takich, w których każda krawędź ma dokładnie k elementów. Pojęcie cyklu w grafie można uogólnić na przypadek hipergrafów na różne sposoby. Jednak od pojawienia się publikacji Katony i Kiersteada [63] największą popularność zdobywa następująca definicja: dla liczb naturalnych k i ℓ, $1 \leq \ell < k$, *ℓ-cyklem* nazywamy k jednolity hipergraf w którym dla pewnego cyklicznego uporządkowania wierzchołków, każda krawędź składa się z k kolejnych wierzchołków oraz każde dwie kolejne krawędzie (w porządku wyznaczonym w sposób naturalny przez uporządkowanie wierzchołków) mają dokładnie ℓ wierzchołków wspólnych, patrz rys. 5. *ℓ-cykl Hamiltona* to ℓ-cykl zawierający wszystkie wierzchołki hipergrafu. Hipergraf, który zawiera taki cykl nazywamy *ℓ-hamiltonowskim.*



Rysunek 5. 2-cykl w hipergrafie 5-jednolitym

Pojęcie hamiltonowskości jest jednym z głównych zagadnień teorii grafów. W celu lepszego zrozumienia tego fenomenu zasadne jest badanie tzw. maksymalnie niehamiltonowskich (hiper)grafów znanych też pod nazwą (hiper)grafów niehamiltonowskich nasyconych. Mianowicie, dla ustalonych k i ℓ, mówimy że hipergraf H jest *niehamiltonowski nasycony* jeśli H nie zawiera ℓ-cyklu Hamiltona oraz po dodaniu dowolnej nowej krawędzi (czyli dodaniu do zbioru krawędzi dowolnego k-elementowego podzbioru wierzchołków nie będącego krawędzią H) w powiększonym hipergrafie powstaje ℓ-cykl Hamiltona. Największa możliwa liczba krawędzi w niehamiltonowskim nasyconym hipergrafie rzędu n to liczbą Turána dla cyklu $C_n^{(k,\ell)}$ oznaczana przez $\mathrm{ex}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right)$. Niedawno liczba ta została wyznaczona przez Glebova, Persona i Wepsa [51], przy czym wzór wykorzystuje liczbę Turána dla ℓ-ścieżek (ℓ-ścieżki są definiowane podobnie jak ℓ-cykle, z tym że porządek wierzchołków jest liniowy, a nie cykliczny):

$$\mathrm{ex}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right) = \binom{n-1}{k} + \mathrm{ex}(n-1, P),$$

gdzie $P = P(k,l)$ jest $(k-1)$-jednolitą, $(\ell-1)$-ścieżką o $\lfloor \frac{k}{k-\ell} \rfloor$ krawędziach.

Drugą możliwością jest badanie niehamiltonowskich nasyconych hipergrafów z możliwie małą liczbą krawędzi. Najmniejsza taka liczba, dla danego n, jest oznaczana przez $\mathrm{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right)$. Zatem $\mathrm{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right)$ to najmniejsze m dla którego istnieje k-jednolity hipergraf rzędu n i rozmiaru m, który jest niehamiltonowski nasycony (ze względu na ℓ-cykl hamiltona). W serii artykułów [18, 33, 34, 73] wyznaczono dokładną wartość tego parametru dla grafów (2-jednolitych hipergrafów). Za wyjątkiem kilku małych wartości n, wynosi ona

$$\mathrm{sat}\left(n, C_n\right) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil .$$

W przypadku hipergrafów, problem wyznaczenia $\mathrm{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right)$ dla $k \geq 3$ po raz pierwszy został zasygnalizowany przez Katonę i Kierstead'a [63, 62], ale wyłącznie dla tzw. cykli "ciasnych", czyli dla $\ell = k-1$. Jednak w przypadku hipergrafów dokładne wyznaczenie parametru wydaje się trudne. W związku z tym nacisk kładzie się na rząd wielkości. Katona [62] przypuszczał, że $\mathrm{sat}\left(n, C_n^{(k,k-1)}\right) =$

$\Theta(n^{k-1})$. Razem z Dudek i Katoną [P6] wykazaliśmy najpierw (dla przypadku $k = 3$), że

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(3,2)}\right) = O(n^{5/2})$$

co było pierwszym wynikiem poniżej trywialnego ograniczenia $O(n^3)$. Następnie z Dudek [P11] wynik ten uogólniliśmy na wszystkie wartości k, $k \geq 3$:

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,k-1)}\right) = O(n^{k-1/2}).$$

Wreszcie w pracy [P13], wykazałem że

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,k-1)}\right) = \Theta(n^{k-1}).$$

Wynik ten, wspólnie z Rucińskim [P12], uogólniliśmy na szereg innych wartości ℓ dowodząc następującego twierdzenia:

Twierdzenie 13 ([P12]) *Dla dowolnego $k \geq 3$ oraz $\ell = 1$, a także dowolnego ℓ spełniającego $\frac{4}{5}k \leq \ell \leq k-1$ zachodzi*

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right) = \Theta(n^{\ell}).$$

Ponadto również w [P12] udowodniliśmy ograniczenie dolne

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right) = \Omega(n^{\ell}). \tag{3}$$

W nieopublikowanym jeszcze manuskrypcie [P19] uzyskaliśmy również pierwsze nietrywialne ograniczenie górne dla wszystkich par (k, ℓ)

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right) = O\left(n^{\frac{k+\ell}{2}}\right),$$

które w najmniejszym nierozstrzygniętym przypadku poprawiliśmy do

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(4,2)}\right) = O\left(n^{\frac{14}{5}}\right).$$

Oprócz tego również w [P19], dla zawężonego zbioru wartości ℓ tj. dla $\ell \geq \frac{k+1}{2}$ uzyskaliśmy ograniczenie górne

$$\text{sat}\left(n, C_n^{(k,\ell)}\right) = O\left(n^{\ell+2g+1}\right),$$

gdzie $g = \left\lceil \frac{k}{k-\ell} \right\rceil (k-\ell) - k$. Ostatnie ograniczenie jest stosunkowo bliskie ograniczeniu dolnemu (3) dla pewnych par (k, ℓ) – np. w przypadku gdy k jest podzielne przez $(k-\ell)$ gdyż wtedy $g = 0$.

Na koniec zaznaczmy, że tematyka niehamiltonowskich (hiper)grafów nasyconych wpisuje się w szeroko badaną dziedzinę (hiper)grafów nasyconych. Dla danej rodziny (hiper)grafów $\mathcal{F}$, (hiper)graf G nazywamy *$\mathcal{F}$-nasyconym* jeśli G nie zawiera jako pod(hiper)grafu żadnego (hiper)grafu z rodziny $\mathcal{F}$, natomiast po dodaniu dowolnej dodatkowej krawędzi powiększony w ten sposób (hiper)graf zawiera co najmniej jeden (hiper)graf z $\mathcal{F}$. Tematyka (hiper)grafów nasyconych obejmuje bardzo obszerną literaturę, w tym przeglądowy artykuł Faudree, Faudree i Schmitta [45].

2.3 Grafy wierzchołkowo stabilne [P7], [P9], [P10], [P14], [P15], [P17] i [P18]

Niech Π będzie własnością, która jest zachowywana przy dodawaniu krawędzi do grafu. W wielu zagadnieniach teorii grafów bada się grafy stabilne lub odporne na błędy ze względu na daną własność Π. Grafy takie charakteryzują się tym iż nawet po usunięciu pewnej liczby wierzchołków lub krawędzi nadal mają tę własność. Najbardziej znanym przykładem jest prawdopodobnie k-spójność wierzchołkowa lub krawędziowa. Innym, również szeroko znanym i badanym przykładem są grafy wierzchołkowo k-hamiltonowskie [32], lub krawędziowo k-hamiltonowskie [77, 95]. Grafy te są hamiltonowskie po usunięciu, odpowiednio, dowolnych k wierzchołków lub dowolnych k krawędzi.

Ogólnie, mając daną rodzinę grafów $\mathcal{H}$ i liczbę naturalną k, graf G nazywamy $(\mathcal{H}, k)$-*stabilnym* (albo *odpornym na k-błędów*), jeśli $G - S$ zawiera pewien $H \in \mathcal{H}$ jako podgraf, dla dowolnego zbioru $S \subset V(G) \cup E(G)$ spełniającego $|S| \leq k$. Jeśli $S \subset V(G)$, to graf G nazywamy $(\mathcal{H}, k)$-*wierzchołkowo stabilnym*, zaś w przypadku gdy $S \subset E(G)$, $(\mathcal{H}, k)$-*krawędziowo stabilnym*. Dla rodzin jednoelementowych piszemy krótko o (H, k)-stabilności, gdzie $\mathcal{H} = \{H\}$. W mojej dotychczasowej pracy naukowej zajmowałem się wyłącznie wersją wierzchołkową stabilności. Wydaje się, że najlepiej zbadana jest wersja krawędziowa.

Pojęcie grafów $(\mathcal{H}, k)$-wierzchołkowo stabilnych zostało wprowadzone przez Hayesa [61] w 1976 r. jako grafowy model sieci odpornych na k błędów. W modelu tym wierzchołki reprezentują procesory a krawędzie połączenia pomiędzy procesorami. Wymagane jest aby sieć posiadała żądaną architekturę, nawet po wystąpieniu k błędów procesorowych. Jak łatwo zauważyć, K_{n+k} jest grafem (H, k)-wierzchołkowo stabilnym dla każdego n-wierzchołkowego grafu H. Istnieje zatem potrzeba miary efektywności grafów stabilnych.

Jedną z możliwości jest rozpatrywanie (H, k)-wierzchołkowo stabilnych grafów mających zarówno małą liczbę dodanych wierzchołków jak i relatywnie niski maksymalny stopień (warunek na maksymalny stopień jest uzasadniony z punktu widzenia obliczeniowych właściwości sieci). Wiele prac dotyczy przypadku gdy H jest ścieżką. Między innymi, Bruck, Cypher i Ho [25] skonstruowali (P_n, k)-wierzchołkowo stabilne grafy rzędu $n + k^2$ mające maksymalny stopień 4. Zhang [98, 99] obniżył liczbę wierzchołków kolejno do $n + O(k \log^2 k)$ oraz $n + O(k \log k)$ kosztem maksymalnego stopnia odpowiednio $O(1)$ i $O(\log k)$. Alon i Chung [4] podali, dla przypadku gdy $k = \Omega(n)$, konstrukcję mającą $n + O(k)$ wierzchołków i maksymalny stopień $O(1)$. Wreszcie Yamada i Ueno [89], podali konstrukcję mającą $n + O(k)$ wierzchołków i maksymalny stopień 3.

Nieco inną miarę efektywności zaproponował Hayes [61]: (H, k)-wierzchołkowo stabilny graf G jest *optymalny* jeśli rząd G jest równy $n + k$ (gdzie $n = |V(H)|$), a rozmiar G jest najmniejszy spośród rozmiarów wszystkich (H, k)-wierzchołkowo stabilnych grafów rzędu $n + k$. Problem konstrukcji tak rozumianych optymalnych (H, k)-wierzchołkowo stabilnych grafów został następnie rozwiązany przez Hayes'a [61] w przypadku gdy H jest ścieżką, cyklem lub drzewem specjalnego typu, oraz

Farraga i Dawsona [44] w przypadku gdy H jest gwiazdą. Dutt i Hayes [40] oraz Bruck, Cypher i Ho [26] podali prostą ogólną metodę konstrukcji wierzchołkowo stabilnych grafów dla dowolnego H. Ich konstrukcja ma optymalną liczbę $n + k$ wierzchołków i maksymalny stopień $O(k^2\Delta(H))$. Lepszą konstrukcję, mającą $n + k$ wierzchołków i maksymalny stopień $O(k\Delta(H))$ podali Ajtai, Alon, Bruck, Cypher, Ho, Naor i Szemerédi [2].

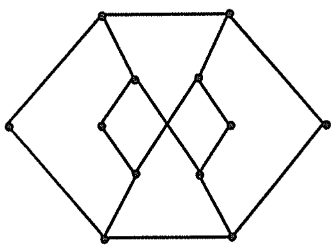
Z kolei Dudek, Szymański i Zwonek [37] zaproponowali badanie (H, k)-wierzchołkowo stabilnych grafów o minimalnym rozmiarze, niezależnie od liczby wierzchołków – taka potrzeba może zaistnieć w sieciach sensorowych, gdzie koszty sensorów-wierzchołków są pomijalnie małe. (Inna motywacja pochodzi z pracy Frankla i Katony [49], w której badano minimalne 3-jednolite hipergrafy k-krawędziowo hamiltonowskie. W pracy tej autorzy otrzymali ograniczenie dolne na liczbę krawędzi takiego hipergrafu, które zależy tylko od minimalnej liczby krawędzi w grafie (P_4, k)-krawędziowo stabilnym.)

Zdefiniujmy zatem $\mathrm{stab}(\mathcal{H}, k)$ jako najmniejszą możliwą liczbę krawędzi w grafie $(\mathcal{H}, k)$-stabilnym, czyli

$$\mathrm{stab}(\mathcal{H}, k) = \min\{|E(G)| : G \text{ jest}(\mathcal{H}, k)\text{-wierzchołkowo stabilny}\}.$$

A więc minimum w powyższej definicji jest brane po rozmiarach wszystkich grafów, a nie tylko tych ustalonego rzędu (przypomnijmy, że Hayes badał minimum po grafach rzędu $|V(H)| + k$). Faktycznie, dla skończonej rodziny $\mathcal{H}$, ustalenie rzędu grafów $(\mathcal{H}, k)$-wierzchołkowo stabilnych miałoby istotne znaczenie tylko dla niewielkich wartości tego parametru. Dla odpowiednio dużych wartości, minimalne grafy $(\mathcal{H}, k)$-stabilne miałyby niemal identyczne struktury – różniłyby się tylko liczbą izolowanych wierzchołków.

W pracy [37] wykazano, że $\mathrm{stab}(C_3, k) = 3(k + 1)$, $\mathrm{stab}(C_4, k) = 4(k + 1)$, $\mathrm{stab}(K_4, k) = 5(k+1)$ oraz $\mathrm{stab}(K_{1,s}, k) = s(k+1)$. Z kolei w [38], Dudek i Zwonek wykazały, że $\mathrm{stab}(K_{n,n}, 1) = n^2+2n$, $\mathrm{stab}(K_{n,n+1}) = (n+1)^2$ oraz scharakteryzowały grafy ekstremalne. Razem z Dudek wykazaliśmy w [P7], że dla $m \geq 2, n \geq m+1$ zachodzi $\mathrm{stab}(K_{m,n}, 1) = mn+m+n$ kompletując w ten sposób wyniki dla przypadku 1-stabilności ze względu na pełne grafy dwudzielne. Dodatkowo scharakteryzowaliśmy grafy ekstremalne. Nikodem [76] uogólnił ten wynik na dowolne grafy pełne wielodzielne.



Rysunek 6. Graf $(C_{10}, 1)$-wierzchołkowo stabilny z minimalną liczbą krawędzi

W przypadku cykli C_n razem z Cichacz, Görlich i Zwonek [P9] uzyskaliśmy niemal dokładny wynik dla $k = 1$ i dowolnego n

$$n + \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil \leq \mathrm{stab}(C_n; 1) \leq n + \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil + 1,$$

przy czym ograniczenie dolne jest przyjmowane dla nieskończenie wielu n (nie wiemy za to czy ograniczenie górne jest przyjmowane choćby dla jednej wartości parametru n – między innymi napisany przeze mnie program komputerowy sprawdził wszystkie przypadki $3 \leq n \leq 14$). Dla większych wartości k osiągnęliśmy tylko ograniczenia, które w [P17] udało mi się poprawić następująco

$$n + \left\lceil 2\sqrt{kn} - k/2 \right\rceil \leq \mathrm{stab}(C_n; k) \leq n + \lceil 2k\sqrt{n} \rceil + k^2,$$

dla odpowiednio dużego n, $n \geq n_0(k)$. Jednym z lepiej zbadanych przypadków jest pytanie o $\mathrm{stab}(H, k)$ gdy H jest grafem pełnym. Przypomnijmy, że w [37] wartość tego parametru wyznaczono dla $H = K_3$ jak i dla $H = K_4$, oraz postawiono hipotezę, że

$$\mathrm{stab}(K_n, k) = (2n-3)(k+1) \text{ dla } k \geq k_0(n).$$

Fouquet, Thuillier, Vanherpe i Wojda [47] wykazali, że hipoteza ta jest prawdziwa dla $n = 5$ przy czym $k_0(5) = 5$ (oprócz tego znaleźli oni wartość $\mathrm{stab}(K_5, k)$ dla pozostałych k oraz scharakteryzowali grafy ekstremalne dla $n = 3, 4, 5$ i wszystkich k). W pracy [P14] udowodniłem powyższą hipotezę dla wszystkich n, przy czym $k_0(n) = (n-3)(n-2) - 1$, oraz scharakteryzowałem grafy ekstremalne (grafy te to sumy odpowiedniej liczby rozłącznych klik K_{2n-3} i K_{2n-2}). Jako część dowodu wykazałem ogranicznie dolne na rząd największego d-zdegenerowanego indukowanego podgrafu (graf nazywamy d-zdegenerowanym jeśli każdy jego podgraf posiada wierzchołek stopnia mniejszego niż d). Wykazałem że każdy graf G zawiera taki podgraf rzędu co najmniej

$$\sum_{v \in V(G)} \min\left\{1, \frac{d}{d_G(v)+1}\right\}.$$

Niezależnie to samo ograniczenie zostało znalezione przez Alona, Kahna i Seymoura [5], przy czym dowody są inne – w [5] dowód jest algorytmiczny, mój dowód jest probabilistyczny. Ograniczenie to jest uogólnieniem wyniku Caro [29] i Wei [91] dla liczby niezależności grafu (przypadek $d = 1$).

W [P17] uzyskałem bardziej ogólne wyniki uwzględniające rząd n, minimalny stopień δ oraz liczbę spójności wierzchołkowej $\kappa \geq 1$ grafu H

$$\mathrm{stab}(H, k) \geq \frac{\delta}{2}n + \sqrt{k\delta\kappa n} - \frac{k(\delta\kappa - \delta - 1)}{2},$$

dla $n \geq n_0(k)$. Ponadto, dla dowolnych δ i κ, pokazałem konstrukcję grafów H o odpowiednich wartościach wyżej wymienionych parametrów, dla których

$$\mathrm{stab}(H, k) \leq \frac{\delta}{2}n + k\sqrt{\delta\kappa n} + k^2\frac{\kappa}{2}.$$

(Wcześniej takie wyniki uzyskałem z Cichacz, Görlich i Nikodemem [P10] dla przypadku $k = 1$.) Jak widać, dla $k = 1$ uzyskane ograniczenie dolne jest bliskie optymalnemu.

Ostatnio, z Cichacz, Görlich i Nikodemem [P18] rozszerzyliśmy badania na niejednoelementowe rodziny grafów. Badaliśmy rodzinę $\mathcal{C}on_n$ będącą rodziną grafów posiadających składową spójną rzędu co najmniej n (a więc pewne poluźnienie wierzchołkowej k-spójności, zamiast wymagania żeby graf po usunięciu k wierzchołków nadal był spójny, wymagamy "tylko", żeby miał dostatecznie dużą składową). W niepublikowanej jeszcze pracy [P18] udowodniliśmy , że

$$\operatorname{stab}(\mathcal{C}on_n, k) \geq n + 2\sqrt{(k-1)\frac{(3n+k+2)}{9}} + \frac{2k+1}{3}k.$$

Dla $k = 1, 2$ powyższe ograniczenie jest ostre (dla $k = 1$ grafem stabilnym jest cykl C_{n+1}). Dla wyższych wartości k skonstruowaliśmy przykłady grafów $(\mathcal{C}on_n, k)$-stabilnych rozmiaru około $n + 2(k-1)\sqrt{(n+k)/(k+1)}$.

Na koniec, w pracy [P15], zaproponowałem kolejną miarę efektywności grafów $(\mathcal{H}, k)$-wierzchołkowo stabilnych, uwzględniające zarówno rząd jak i rozmiar grafu docelowego. Mianowicie rozważałem grafy $(\mathcal{H}, k)$-wierzchołkowo stabilne o minimalnym koszcie. Mając dany koszt α jednego wierzchołka oraz koszt β jednej krawędzi przez $\operatorname{stab}_{(\alpha,\beta)}(\mathcal{H}, k)$ rozumiemy minimalny koszt grafu $(\mathcal{H}, k)$-stabilnego, czyli

$$\operatorname{stab}_{(\alpha,\beta)}(\mathcal{H}, k) = \min\{\alpha|V(G)| + \beta|E(G)| : G \text{ jest } (\mathcal{H}, k)\text{-wierzchołkowo stabilny}\}.$$

Dla $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ problem redukuje się do poprzedniego. W [P15], dla dowolnej czwórki (α, β, n, k) udowodniłem ograniczenie dolne dla $\operatorname{stab}_{(\alpha,\beta)}(K_n, k)$, które przy ustalonych α, β, n jest osiągane dla nieskończenie wielu k. W szczególności udowodniłem, że

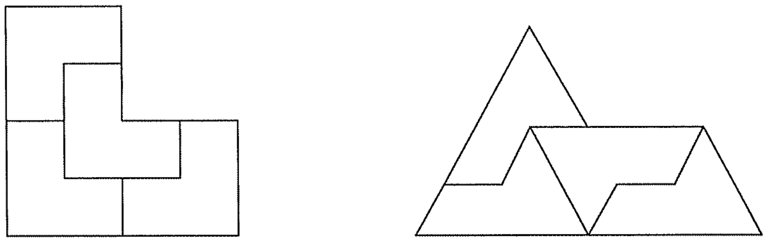
$$\operatorname{stab}_{(1,1)}(K_n, k) = (2n-1)(k+1),$$

dla $k \geq (n-1)(n-2) - 1$.

2.4 Podziały wielokątów na trójkąty [P1], [P4] i [P8]

Ta część mojego dorobku w większości została uzyskana przed doktoratem i stanowi treść mojej pracy doktorskiej. Niech W oraz $W_1', \ldots, W_n'$ będą dowolnymi wielokątami w przestrzeni euklidesowej. Mówimy, że wielokąt W ma podział na wielokąty $W_1', \ldots, W_n'$, jeśli $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i'$ przy czym W_i' są parami wewnętrznie rozłączne. Nazwijmy W *wielokątem dzielonym*, zaś W_i' *częściami podziału.*
Podziały są oczywiście badane od samych początków matematyki. W mojej pracy naukowej skupiłem się na podziałach, w których wszystkie części podziału są podobne. Przez *W'-podział W* rozumiemy podział wielokąta W na skończoną liczbę wewnętrznie rozłącznych wielokątów W_1', ..., W_n', taki że wszystkie wielokąty W_i' są podobne do W'.

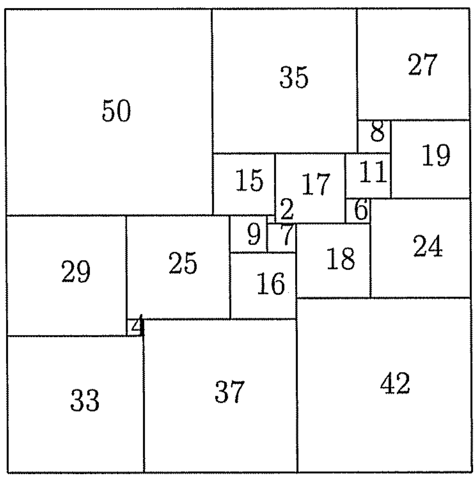
Spośród takich podziałów dużym zainteresowaniem matematyków cieszą się tzw. podziały regularne czyli podziały w których wszystkie wielokąty W_i' są przystające, patrz rysunek 7. Między innymi, Soifer [87] twierdzi iż Erdős oferował 25$ za charakteryzację tych wartości n, dla których istnieją trójkąty T i Δ, takie że T posiada regularny Δ-podział na n trójkątów. Częściowe wyniki uzyskali Golomb [52] oraz Snover, Waiveris i Williams [86], którzy rozwiązali przypadek gdy Δ jest podobny do T. Ostatnio Beeson [8, 9, 10] zaanonsował pełne rozwiązanie w cyklu trzech nieopublikowanych jeszcze artykułów.



a) b)

Rys. 7. Podział regularny na części podobne do oryginału

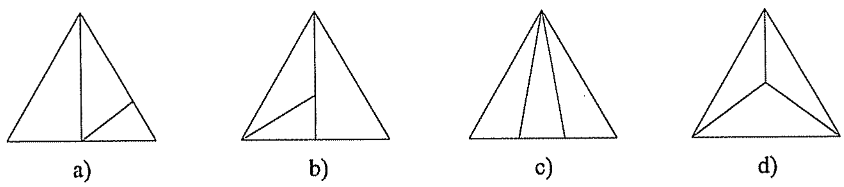
Równie dużym zainteresowaniem cieszył się swego czasu, słynny problem doskonałych podziałów prostokątów na kwadraty, czyli podziałów prostokąta na kwadraty z których żadne dwa nie są przystające. Jego rozwiązanie jest efektownym przykładem zastosowania teorii grafów. Pierwsze takie podziały zostały podane przez Moronia [75] w 1925 roku. Do ostatecznego sukcesu zaś, w głównej mierze, przyczynili się Brooks, Smith, Stone i Tutte [24], którzy opracowali wspomaganą komputerowo metodę konstrukcji takich podziałów za pomocą analizy sieci spełniających prawa Kirchofa. Szczególnym przypadkiem problemu są doskonałe podziały kwadratu na kwadraty. Elegancki przykład (rys. 8), znaleziony przez Duijvestijna [39], zdobi okładkę jednego z najważniejszych czasopism kombinatorycznych Journal of Combinatorial Theory (obie serie).



Rys. 8. Podział doskonały kwadratu.

W przypadku podziałów wielokątów na trójkąty najważniejsze wyniki uzyskał Laczkovich [71, 72]. Drobnym przykładem ilustrującym niezwykle bogaty i oryginalny wkład Laczkovicha w tę teorię niech będą następujące dwa rezultaty. Lachkovich wykazał między innymi, że nie istnieje podział kwadratu na trójkąty o kątach $(30°, 60°, 90°)$. Ponadto, udowodnił że jeśli istnieje Δ-podział kwadratu na trójkąty nieprostokątne, to Δ ma kąty $(\pi/8, \pi/4, 5\pi/8)$, $(\pi/4, \pi/3, 5\pi/12)$ lub $(\pi/12, \pi/4, 2\pi/3)$. Dowody Laczkovicha są algebraiczne, w szczególności wykorzystują rozszerzenia ciał.

W moich badaniach zająłem się także podziałami wielokątów na trójkąty podobne. W [P8] opracowałem wspomaganą komputerowo metodę konstrukcji takich podziałów dla ograniczonej liczby części. Podałem między innymi kombinatoryczne warunki, które charakteryzują topologicznie równoważne podziały. (Dwa podziały są topologicznie równoważne jeśli istnieje ciągłe przekształcenie płaszczyzny w siebie, które przeprowadza wierzchołki, boki i ściany wielokątów jednego podziału odpowiednio na wierzchołki, boki i ściany wielokątów drugiego podziału lub jego "lustrzanego odbicia". Przykładowo rys. 9. pokazuje wszystkie topologicznie nierównoważne (innymi słowy istotnie różne) podziały trójkąta na trzy trójkąty.)



Rys. 9. Różne podziały trójkąta na trzy trójkąty

Z każdym podziałem $\mathcal{P}$ możemy związać w sposób naturalny pewien graf planarny $G = G_{\mathcal{P}}$, który nazywam *grafem podziału*. Jeśli przez R_0 oznaczymy zbiór rogów wielokąta dzielonego zaś przez R_i, $i = 1, \ldots, n$, zbiory rogów trójkątów podziału to $\mathcal{P}$ wyznacza trójkę

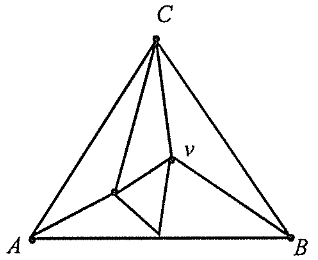
$$(G, R_0, \{R_1, \ldots, R_n\}).$$

Niech trójka $(G', R'_0, \{R'_1, \ldots, R'_n\})$ będzie wyznaczona przez podział $\mathcal{P}'$. W [P8] wykazałem, że podziały $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ (niekoniecznie na trójkąty podobne) są topologicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $\iota : V(G) \to V(G')$ przeprowadzająca trójkę $(G, R_0, \{R_1, \ldots, R_n\})$ w trójkę $(G', R'_0, \{R'_1, \ldots, R'_n\})$ (w szczególności ι jest izomorfizmem grafów).

Dzięki znaleziony kombinatorycznym warunkom możliwe było napisanie programu komputerowego generującego zbiór, który zawiera wszystkie topologicznie nierównoważne podziały trójkąta na n trójkątów. Okazuje się, że analiza tylko topologicznie nierównoważnych podziałów prowadzi do znalezienia, z dokładnością do podobieństwa, wszystkich żądanych podziałów (we wszystkich topologicznie równoważnych podziałach występuje ta sama odpowiedniość odcinków i stosunków tych odcinków). Niemniej liczba podziałów jest ogromna, przykładowo liczba topologicznie nierównoważnych podziałów trójkąta na n trójkątów wynosi 4, 23, 180, 1806, 20198 dla $n = 3, \ldots, 7$ [85]. Analiza wszystkich możliwości byłaby zbyt pracochłonna. Celowe jest zatem podanie dodatkowych kombinatorycznych warunków umożliwiających odrzucenie tych podziałów, które nie dają szans na znalezienie podziału o zadanych własnościach. W [P8] znalazłem między innymi następujący ciekawy warunek. Rozważmy Δ-podział T, gdzie Δ i T są trójkątami nieprostokątnymi. Wyróżnijmy pewien typ wierzchołków w grafie podziału. Otóż wierzchołek wewnętrzny jest klasy I, jeśli należy on do wnętrza T i jest rogiem każdego trójkąta, do którego należy (przykładowo na rys. 9 d) wierzchołek wewnętrzny jest klasy I, zaś na rys. 9 b) nie). Wykazałem, że jeśli $\deg A + \deg B + \deg C \geq 7$ to graf podziału zawiera wierzchołek klasy I oraz dla każdego takiego wierzchołka v spełniona jest zależność

$$\deg A + \deg B + \deg C + \deg v = 12.$$

Przykładowo nie istnieje podział trójkąta nieprostokątnego na nieprostokątne podobne trójkąty, który byłby topologicznie równoważny z podziałem z rysunku 10.



Rys. 10. $\deg A + \deg B + \deg C + \deg v \neq 12$

Zastosowanie powyższej metody i samodzielnie napisanego programu komputerowego pozwoliło na znalezienie wielu przykładów podziałów, w tym na pełną charakteryzację szczególnie interesującego przypadku podziału trójkątów na pięć podobnych nieprostokątnych trójkątów. Wcześniej ten problem został przeze mnie rozwiązany w [P1] innymi metodami. Kolejnym zastosowaniem w [P8] było znalezienie wszystkich nieprostokątnych trójkątów T mających doskonały T-podział na 7 części. W [P4] rozważałem doskonałe podziały trójkąta równobocznego.

2.5 Harmonijne etykietowanie grafów - zbiory typu Sidona na grafach [P2], [P5] i [P16]

Ta część dorobku obejmuje wybrane etykietowanie (pseudo)grafów. Pod pojęciem pseudografu rozumiem graf, w którym do zbioru krawędzi dopuszczone są pętle, czyli pary (v, v). Niedopuszczalne są natomiast krawędzie wielokrotne. Inspiracją do podjęcia tego tematu był problem istnienia dużych podgrafów tęczowych w specjalnie krawędziowo pokolorowanych grafach pełnych K_n, który razem ze Skupniem rozważaliśmy w [P2] i [P16]. Okazało się, że badany przez nas problem ma wiele powiązań z etykietowaniem harmonijnym grafów oraz z addytywnymi zbiorami Sidona.

Otóż podzbiór $A = \{a_1, ..., a_n\}$ addytywnej grupy abelowej Γ jest zbiorem Sidona, jeśli wszystkie sumy $a_i + a_j$, $i \leq j$, są parami różne. Ponadto A jest słabym zbiorem Sidona jeśli sumy $a_i + a_j$, $i < j$, są parami różne (a więc w słabym zbiorze Sidona nie rozważamy sum tych samych elementów).

Aby wyjaśnić pojęcie etykietowania harmonijnego, omówię jego uogólnienie, które wprowadziłem w [P5]. Niech G będzie dowolnym pseudografem a t liczbą naturalną nie mniejszą niż rozmiar G, $t \geq |E(G)|$. Funkcję $h : V(G) \to \mathbb{Z}_t$ nazywamy *t-harmonijnym etykietowaniem* grafu G jeśli h jest injekcją oraz $h(u) + h(w) \neq h(x) + h(y)$ dla dowolnych dwóch krawędzi $uw, xy \in E(G)$ (w przypadku gdy $|V(G)| > t \geq |E(G)|$ potrzebna jest pewna modyfikacja definicji). Najmniejsze możliwe t takie, że G ma t-harmonijne etykietowanie nazywamy *harmonijnym rzędem* grafu G i oznaczamy $\text{har}(G)$. W przypadku, gdy $t = |E(G)|$, t-harmonijne etykietowanie jest nazywane etykietowaniem *harmonijnym* (ang. harmonious). Graf mający takie etykietowanie jest też nazywany *harmonijnym*. Grafy harmonijne zostały wprowadzone przez Grahama i Sloane'a [57] w 1980 roku.

Dla grafu prostego G niech G^+ oznacza pseudograf powstały z G poprzez dodanie pętli w każdym wierzchołku. Zauważmy, że zbiór etykiet wierzchołków w t-harmonijnym etykietowaniu grafu pełnego K_n, jest słabym zbiorem Sidona w $\mathbb{Z}_t$. Podobnie zbiór etykiet wierzchołków w t-harmonijnym etykietowaniu pseudografu K_n^+, jest zbiorem Sidona w $\mathbb{Z}_t$. A więc zbiory etykiet wierzchołków w t-harmonijnym etykietowaniu grafów stanowią pewne uogólnienia zbiorów Sidona. Znanych jest wiele konstrukcji zbiorów Sidona np. Erdős i Túran [43], Singer [82], Bose [20], Ruzsa [78].

Przykładowo, z konstrukcji Singera modularnych zbiorów Sidona wynika, że jeśli $n - 1$ jest potęgą liczby pierwszej to

$$\text{har}(K_n^+) = n^2 - n + 1.$$

Dla pozostałych wartości mamy następujące ograniczenia:

$$n^2 - 3n \leq \text{har}(K_n) \leq n^2 + O(n^{36/23}), \tag{4}$$

$$n^2 - n + 1 \leq \text{har}(K_n^+) \leq n^2 + O(n^{36/23}). \tag{5}$$

Dolne ograniczenie w (4) otrzymałem ze Skupniem w [P16]. Ograniczenie to zostało niezależnie uzyskane przez Haanpää i innych w [60]. Natomiast ograniczenia górne wynikają z przytoczonych konstrukcji oraz wzmocnień postulatu Bertranda o występowaniu liczb pierwszych w pewnych przedziałach.

W [P5] uzyskałem wiele wyników na temat rzędu harmonijnego różnych klas grafów, w tym potęg cykli,

$$kn \leq \text{har}\left(C_n^k\right) \leq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1\right)\left(k^2 + O\left(k^{36/23}\right)\right),$$

produktów kartezjańskich

$$\mathrm{har}(G_1 \Box G_2) \leq \mathrm{har}(G_1^+)\mathrm{har}(G_2^+),$$

drzew

$$n - 1 \leq \mathrm{har}(T_n) \leq 2n + 2 - d - l,$$

gdzie d oznacza średnicę drzewa a l liczbę liści, i inne.

Na koniec zaznaczmy, że niemodularny odpowiednik rzędu harmonijnego był też badany przez Brandta, Miškufa, Rautenbacha, Regena i Ruzsę [23].

2.6 Dekompozycje multigrafów na cykle Hamiltona [P3]

W pracy [P3] razem ze Skupniem i Fortuną rozważaliśmy dekompozycje multigrafów na cykle Hamiltona. Przez multigraf rozumiem graf z wielokrotnymi krawędziami, bez pętli. Natomiast stopniem wierzchołka w multigrafie nazywam liczbę krawędzi incydentnych z nim. *Dekompozycją* multigrafu G nazywamy rodzinę krawędziowo rozłącznych podmultigrafów, których suma daje G. Zatem, aby multigraf G miał przynajmniej jedną dekompozycję na k cykli Hamiltona każdy wierzchołek G musi mieć stopień równy $2k$.

Niech $h_k(G)$ oznacza liczbę dekompozycji multigrafu G na k cykli Hamiltona. Ponadto, niech $H_k(n)$ oznacza maximum spośród $h_k(G)$ zaś $h_k(n)$ minimum spośród $h_k(G)$, gdzie oba ekstrema są brane po wszystkich multigrafach G rzędu n mających co najmniej jedną dekompozycję.

Funkcja $h_2(n)$ była badana przez kilku autorów [13, 84, 88]. Z prac Westa [92], Skupnia [83] i, przede wszystkim Thomasona [88] wynika, że

$$h_2(n) = 4. \tag{6}$$

Problem wyznaczenia $H_2(n)$ został postawiony przez Skupnia w [83]. W [P3] wykazaliśmy, że

$$H_k(n) = (k!)^{n-1}$$

przy czym jedyny multigraf ekstremalny ${}^kC_n$ to multigraf otrzymany z cyklu C_n poprzez zastąpienie każdej krawędzi cyklu przez k krawędzi wielokrotnych. Wykazaliśmy również, że jeśli $|V(G)| = n$ i $G \neq {}^kC_n$, to

$$h_k(G) \leq (k!)^{n-1}/k, \tag{7}$$

przy czym równość zachodzi dla dokładnie $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ nieizomorficznych multigrafów rzędu n.

Opisany problem jest o wiele trudniejszy dla przypadku grafów prostych i jest mocno związany z liczbą cykli Hamiltona w danym grafie G. Nasze wyniki (7) pokazują w szczególności $h_2(G) < 2^{n-2}$ dla grafów prostych. O wiele lepsze ograniczenie zostało znalezione przez Gebauer [50]. Z jej pracy wynika, że dla grafów prostych zachodzi

$$H_2(n) = O(18^{n/5}) \leq O(1.783^n).$$

References

[1] M. Aigner and S. Brandt, Embedding arbitrary graphs of maximum degree two, J. London Math. Soc. (2) 28 (1993), 39–51.

[2] M. Ajtai, N. Alon, J. Bruck, R. Cypher, C.T. Ho, M. Naor and E. Szemerédi, Fault tolerant graphs, perfect hash functions and disjoint paths, in Proc. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (1992) 693–702.

[3] M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits and E. Szemeédi, unpublished.

[4] N. Alon and F. Chung, Explicite construction of linear sized tolerant networks, Discrete Math. 72 (1988) 15–19.

[5] N. Alon, J. Kahn and P. Seymour, Large Induced Degenerate Subgraphs, Graphs Combin. 3 (1987) 203–211.

[6] N. Alon and R. Yuster, The Turán number of sparse spanning graphs, J. Combin. Theory Ser. B 103 (2013) 337–343.

[7] J. Balogh and C. Palmer, On the Tree Packing Conjecture, SIAM J. Discrete Math. 27 (2013) 1995–2006.

[8] M. Beeson, Triangle tiling I: the tile is similar to ABC or has a right angle, arXiv:1206.2221v1.

[9] M. Beeson, Triangle tiling II: Some non-existence theorems, arXiv:1206.2230v1.

[10] M. Beeson, Triangle tiling III: the triquadratic tilings, arXiv:1206.2229v1.

[11] A. Benhocine, H.J. Veldman and A.P. Wojda, Packing of Digraphs, Ars Combin. 22 (1986) 43-49.

[12] A. Benhocine, A.P. Wojda, On-self complementation, J. Graph Theory 8 (1985) 335–341.

[13] B. Bollobás: Extremal Graph Theory, Academic Press, London-New York, (1978).

[14] B. Bollobás, S.E. Eldridge, Packing of graphs and applications to computational complexity, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978) 105–124.

[15] B. Bollobás, A. Kostochka and K. Nakprasit, On two conjectures on packing of graphs, Combin. Probab. Comput. 14 (2005), 723-736.

[16] B. Bollobás, A. Kostochka and K. Nakprasit, Packing d-degenerate graphs, J. Comb. Theory Ser. B 98(1) (2008), 85–94.

[17] B. Bollobás, Some remarks on packing trees, Discrete Math. 46 (1983) 203–204.

[18] J. A. Bondy, Variations on the hamiltonian theme, Canad. Math. Bull. 15 (1972) 57–62.

[19] J. Bosák, Decompositions of Graphs (Dordrecht, Kluwer; Bratislava, Veda, 1990). ([Slovak:] Bratislava, Veda, 1986).

[20] R.C. Bose, An affine analogue of Singer's theorem, J. Indian Math. Soc. 6 (1942), 1—15.

[21] S. Brandt, An extremal result for subgraphs with few edges, J. Combin. Theory Ser. B 64 (1995) 288-299.

[22] S. Brandt, Embedding graphs without short cycles in their complements, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.), Graph Theory, Combinatorics, and Application of Graphs, 1 (1995) 115–121

[23] S. Brandt, J. Miškuf, D. Rautenbach, F. Regen and I.Z. Ruzsa, Edge-injective and edge-surjective vertex labellings, SIAM J. Discrete Math. 24 (2010) 666–683.

[24] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J. 7 (1940) 312-340.

[25] J. Bruck, R. Cypher and C. Ho, Fault-tolerant meshes with small degree, SIAM Journal on Computing 26 (1997) 1764–1784.

[26] J. Bruck, R. Cypher and C.T. Ho, Fault-tolerant parallel architectures with minimal numbers of spares, IBM Research Report, RJ 8029, March 1991.

[27] D. Burns and S. Schuster, Embedding $(p, p-1)$ graphs in their complements, Israel J. Math. 30 (1978) 313–320.

[28] D. Burns and S. Schuster, Every $(p, p-2)$ graph is contained in its complement, J. Graph Theory 1 (1977) 277–279.

[29] Y. Caro, New Results on the Independence Number, Technical Report, Tel-Aviv University, 1979.

[30] P. A. Catlin, Subgraphs of graphs I., Disc. Math. 10 (1974), 225–233.

[31] P. A. Catlin, Embedding subgraphs under extremal degree conditions, Proc. 8th Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing (1977) 139–145.

[32] G. Chartrand, S.F. Kapoor and D.R. Lick, n-Hamiltonian graphs, J. Comb. Theory 9 (1970) 308–312.

[33] L. H. Clark, R. C. Entringer, Smallest maximally nonhamiltonian graphs, Period. Math. Hung. 14 (1983), 57–68.

[34] L. H. Clark, R. C. Entringer, H. D. Shapiro, Smallest maximally nonhamiltonian graphs II, Graphs and Combin. 8 (1992) 225–231.

[35] B. Csaba, A. Shokoufandeh and E. Szemerédi: Proof of a conjecture of Bollobás and Eldridge for graphs of maximum degree three, Combinatorica 23(1) (2003), 35–72.

[36] E. Dobson, Constructing trees in graphs whose complement has no $K_{2,s}$, Combin. Probab. Comput. 11 (2002) 343-347.

[37] A. Dudek, A. Szymański, M. Zwonek, (H, k) stable graphs with minimum size, Discuss. Math. Graph Theory 28(1) (2008) 137–149.

[38] A. Dudek, M. Zwonek, (H, k) stable bipartite graphs with minimum size, Discuss. Math. Graph Theory, 29 (2009) 573–581.

[39] A. J. W. Duijvestijn, Simple perfect squared square of lowest order, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978) 260-263.

[40] S. Dutt and J. P. Hayes, Designing Fault-Tolerant Systems Using Automorphisms, Journal of Parallel and Distributed Computing, 12 (1991) 249–268.

[41] N. Eaton, A near packing of two graphs, J. Comb. Theory Ser. B 80 (2000), 98–103.

[42] P. Erdős, Extremal problems in graph theory, in: M. Fiedler (Ed.), Theory of Graphs and its Applications, Academic Press (1965) 29–36.

[43] P. Erdős, P. Turán, On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems, J. London Math. Soc. 16 (1941) 212–215.

[44] A.A. Farrag and R.J. Dawson, Designing optimal fault-tolerant star networks, Networks 19 (1989) 707–716.

[45] J. Faudrre, R. Faudree, J. Schmitt, A Survey of Minimum Saturated Graphs, Electronic J. Combin. 18 (2011) #DS19.

[46] R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, S. Schuster, Embedding graphs in their complements, Czechoslovak Math. J. 31 (106) (1981) 53–62

[47] J-L. Fouquet, H. Thuillier, J-M. Vanherpe and A.P. Wojda, On $(K_q; k)$ vertex stable graphs with minimum size, Discrete Math. 312 (2012) 2109–2118.

[48] J-L. Fouquet, H. Thuillier, J-M. Vanherpe and A.P. Wojda, On $(K_q; k)$ stable graphs with small k, Electronic J. Combin. 19 (2012) #P50.

[49] P. Frankl and G.Y. Katona, Extremal k-edge Hamiltonian hypergraphs, Discrete Math. 308 (2008) 1415—1424.

[50] H. Gebauer, Finding and enumerating Hamilton cycles in 4-regular graphs, Theoretical Computers Science 412 (2011) 4579–4591.

[51] R. Glebov, Y. Person, W. Weps, On extremal hypergraphs for Hamiltonian cycles, European J. Combin., 33 (2012) 544–555.

[52] S. W. Golomb, Replicating figures in the plane, Math. Gaz. 48 (1964) 403-412.

[53] A. Görlich, M. Pilśniak, M. Woźniak, I. A. Ziolo, A note on embedding graphs without short cycles, Discrete Math. 286 (2004) 75–77.

[54] A. Görlich, M. Pilśniak, M. Woźniak, I. A. Ziolo, Fixed-point-free embeddings of digraphs with small size, Discrete Math. 307 (2007) 1332–1340.

[55] A. Gyárfás and J. Lehel, Packing trees of different order into K_n, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, 463–469.

[56] E. Györi, A. Kostochka, A. McConvey i D. Yager, personal communication.

[57] R.L. Graham, N.J.A. Sloane, On additive bases and harmonious graphs, SIAM J. Alg. Discrete Meth. 1 (1980) 382–404.

[58] A. Hajnal and E. Szemerédi, Proof of a Conjecture of Erdős, in Combinatorial Theory and Its Applications II (P. Erdős and V.T. Sós, Eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North Holland, Amsterdam/London 1970.

[59] S. P. Haler i H. Wang, Packing four copies of a tree into a complete graph, Australas. J. Combin. 59(2) (2014) 323–332.

[60] H. Haanpää, A. Huima, P. Östergård, Sets in Z_n with distinct sums of pairs, in Optimal discrete structures and algorithms (ODSA 2000), Discrete Appl. Math. 138 (2004) 99–106.

[61] J. Hayes, A graph model for fault-tolerant computing systems, IEEE Trans. on Comput. C-25 (1976) 875–883.

[62] G.Y. Katona. Hamiltonian chains in hypergraphs, A survey. Graphs, Combinatorics, Algorithms and its Applications, (ed. S. Arumugam, B. D. Acharya, S. B. Rao), Narosa Publishing House 2004.

[63] G.Y. Katona and H. Kierstead. Hamiltonian chains in hypergraphs. J. Graph Theory 30 (1999) 205–212.

[64] H. Kaul and A. Kostochka, Extremal graphs for a graph packing theorem of Sauer and Spencer, Combin. Probab. Comput. 16 (2007), 409–416.

[65] H. Kaul and A. Kostochka and G. Yu, On a graph packing conjecture by Bollobás, Eldridge and Catlin, Combinatorica 28 (2008) 469–485.

[66] H. Kheddouci, S. Marshall, J.S. Sacle and M. Woźniak, On the packing of three graphs, Discrete Math. 236 (2001) 197–225.

[67] H.A. Kierstead and A. Kostochka, A Short Proof of the Hajnal-Szemerédi Theorem on Equitable Coloring, Combin. Probab. Comput. 17 (2008), 265–270.

[68] H. A. Kierstead and A. Kostochka, Efficient Graph Packing via Game Colouring, Combin. Prob. Comput. 18 (2009) 765-774.

[69] A. Kostochka, G. Yu, Packing of graphs with small product of sizes, J. Combin. Theory Ser. B 98 (2008) 1411-1415.

[70] A. Kostochka, G. Yu, Ore-type graph packing problems, Combin. Prob. Comput. 16 (2007) 167-169.

[71] M. Laczkovich, Tilings of triangles, Discrete Math. 140 (1995) 79-94.

[72] M. Laczkovich, Tilings of polygons with similar triangles, Combinatorica 10 (1990) 281-306.

[73] X. Lin, W. Jiang, C. Zhang and Y.Yang, On smallest maximally nonhamiltonian graphs, Ars Combin. 45 (1997) 263—270.

[74] E.C. Milner, D.J.A. Welsch, On the computational complexity of graph theoretical properties, Univ. of Calgary, Res. Paper No. 232, June, 1974.

[75] Z. Moroń, O rozkładzie prostokątów na kwadraty, Wiadom. Mat. I, 1 (1925), 75-94.

[76] M. Nikodem, On vertex stability with regard to complete k-partite graphs, manuskrypt.

[77] M. Paoli, W. Wong and C. Wong, Minimum k-hamiltonian graphs II, J. Graph Theory 10 (1986) 79–95.

[78] I. Z. Ruzsa, Solving a linear equation in a set of integers. I, Acta Arith. 65 (1993) 259–282.

[79] J.F. Saclé and M. Woźniak, The Erdős-Sós conjecture for graphs without C_4, J. Combin. Theory B 70 (1997) 367-372.

[80] N. Sauer, J. Spencer, Edge disjoint placement of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978) 295–302.

[81] S. Schuster, Fixed-point-free embeddings of graphs in their complements, Internat. J. Math. Sci. 1 (1978) 335-338.

[82] J. Singer, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 377–385.

[83] Z. Skupień, Decompositions into two paths, Discuss. Math. Graph Theory 25 (2005) 325–329.

[84] Z. Skupień, Sparse hamiltonian 2-decompositions together with numerous Hamilton cycles, Discrete Math. 309 (2009) 6382–6390.

[85] N. J. A. Sloane, Sequences A053740 i A056814
http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A053740
http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A056814
„The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."
http://www.research.att.com/ njas/sequences/.

[86] S. L. Snover, C. Waiveris and J. K. Williams, Rep-tiling for triangles, Discrete Math. 91 (1991) 193-200.

[87] A. Soifer, How does one cut a triangle? Center for Exellence in Mathematical Education (Colorado Springs, 1990).

[88] A.G. Thomason, Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs, in: B. Bollobás, ed., Advances in Graph Theory (Proc. Cambridge Combin. Conf., 1977), Ann. Discrete Math. 3 (1978), North-Holland, Amsterdam, 1978; pp. 259–268.

[89] S. Ueno and T. Yamada, Optimal fault-tolerant linear arrays, SPAA (2003) 60–64.

[90] Z. Usiskin, S. G. Wayment, Partitioning a triangle into 5 triangles similar to it, Math. Mag. 45 (1972) 37-42.

[91] V.K. Wei, A Lower Bound on the Stability Number of a Simple Graph, Technical memorandum, TM 81 - 11217 - 9, Bell laboratories, 1981.

[92] D. B. West, Pairs of adjacent Hamiltonian circuits with small intersection, Stud. Appl. Math. 59 (1978) 245–248.

[93] A.P. Wojda, M. Woźniak, Triple placement of graphs, Graphs Combin. 9 (1993) 85–91.

[94] A.P. Wojda, I. Zioło, Embedding digraphs of small size, Discrete Math. 165/166 (1997) 621–638.

[95] W. Wong and C. Wong, Minimum k-hamiltonian graphs, J. Graph Theory 8 (1984) 155–165.

[96] M. Woźniak, A note on embedding graphs without short cycles, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 60 (1991) 727–732.

[97] M. Woźniak, On the Erdős-Sós conjecture, J. Graph Theory 21 (1996) 229–234.

[98] L. Zhang, Fault tolerant networks with small degree, in Proceedings of Twelfth annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (2000) 64–69.

[99] L. Zhang, Fault-tolerant meshes with small degree, IEEE Transactions on Computers 51 (2002) 553–560.

Żak