dr hab. Bartłomiej Bosek, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 31-007 Kraków
E-mail: bosek@tcs.uj.edu.pl

Kraków, 27.03.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej Natalii Bednarz

pt. *„Liczby typu Fibonacciego, ich własności i zastosowania do problemów zliczania w grafach”*

Rozprawa doktorska Natalii Bednarz dotyczy specyficznych ciągów zdefiniowanych jednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym oraz ich związków ze zliczaniem tzw. krawędziowych pokolorowań z podziałem w pewnych klasach grafów.

Dla zadanych z góry: liczby naturalnej $t \in \mathbb{N}$, liczb $l_1, \ldots, l_t \in \mathbb{N}$, oraz rozłącznych zbiorów kolorów $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$, *krawędziowe pokolorowanie z podziałem* grafu $G = (V, E)$ jest podziałem zbioru krawędzi E na rozłączne ścieżki $E = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_r$ wraz z pewnym kolorowaniem $c : \{P_1, \ldots, P_r\} \to \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_t$. Przy czym ścieżki w wytyczonym podziale mogą mieć rozmiary jedynie ze zbioru dozwolonych długości $\{l_1, \ldots, l_t\}$ zaś dla danej dozwolonej długości l_j jest przypisany zbiór kolorów Γ_j, który może być użyty do kolorowań ścieżek o długości l_j, tzn. jeśli $|P_i| = l_j$ to $c(P_i) \in \Gamma_j$. Główna część pracy dotyczy tak zwanego *„$(A, 2B)$-krawędziowego kolorowania z podziałem”* co na powyższą definicję tłumaczy się, że $t = 2$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = 1$ co de facto oznacza podział zbioru krawędzi na ścieżki składające się z pojedynczej lub dwóch krawędzi pomijając ich kolorowanie. Podrozdziały 3.2 oraz 3.3 w sekwencji lematów oraz twierdzeń prezentują dolne oraz górne oszacowanie na liczbę $(A, 2B)$-krawędziowego kolorowania z podziałem w grafach jedno-cyklowych, przy czym graf jedno-cyklowy można traktować jako dowolne drzewo z dodaną jedną krawędzią. Ponadto zostało pokazane, że podanych oszacowań nie da się poprawić — zostały podane przykłady dla których podane oszacowania są dokładną liczbą takich podziałów. Co więcej zostały całkowicie scharakteryzowane grafy, dla których rozważana wartość osiąga swoje ekstrema. Rozważane zagadnienie mieści się w kanonach szeroko pojętej kombinatoryki. Autorka całkowicie rozwiązuje problem dla naturalnej klasy grafów. Co więcej, dowody są nie najprostsze, a na pewno wymagały sporej intelektualnej pracy. Zaprezentowane twierdzenia oraz techniki dowodowe wnoszę realny wkład w wiedzę dotyczącą zliczania struktur kombinatorycznych. Omawiany fragment zapewnia przesłanki merytoryczne do pozytywnej recenzji tejże rozprawy doktorskiej.

Rozdział 4 dotyczy analizy ciągu, który dla zadanej liczby naturalnej $k \geqslant 2$ oraz liczby wymiernej $p \geqslant 1$ jest zdefiniowany liniowym równaniem rekurencyjnym k-tego rzędu postaci

$$F_{k,p}(n) = pF_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n-k+1) + F_{k,p}(n-k)$$

dla $n \geqslant k$ z warunkami początkowymi $F_{k,p}(0) = 0$ oraz $F_{k,p}(n) = p^{n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Ciąg $F_{k,p}(n)$ pomimo swojej prostoty uogólnia niektóre powszechnie znane ciągi. W szczególności: $F_{2,1}(n+1)$ to liczby Fibonacciego, $F_{2,\frac{3}{2}}(n)$ to liczby Pella, $F_{3,1}(n)$ to liczby Narayana, zaś $F_{2,\frac{t+1}{2}}(n)$ to liczby t-Fibonacciego. Główny pomysł zawarty w tym rozdziale to obserwacja (Twierdzenie 4.3), że dla całkowitej[1] liczby p wartość $F_{k,p}(n+1)$ wyraża dokładnie liczbę krawędziowych pokolorowań z podziałem ścieżki rozmiaru n przy czym dozwolone rozmiary ścieżek użytych w podziale to 1, $k-1$, oraz k, zaś liczba możliwych kolorów dla ścieżek odpowiedniej długości to p kolorów dla ścieżek rozmiaru 1 (będących pojedynczą krawędzią), $p-1$ kolorów dla ścieżek rozmiaru $k-1$, i jeden kolor dla ścieżek rozmiaru k. Odnosząc się do definicji powyżej $t = 3$, $l_1 = 1$, $l_2 = k-1$, $l_3 = k$, zaś $|\Gamma_1| = p$, $|\Gamma_2| = p-1$, $|\Gamma_3| = 1$. Bazując na powyższej obserwacji autorka wylicza między innymi wzór na $F_{k,p}(m+n)$ (tożsamość typu Honsbergera). Ponadto dla dowolnego wymiernego $p \geqslant 1$ zostały podane wzory na sumy $\sum_{i=0}^{n} F_{k,p}(i)$, $\sum_{i=0}^{n} F_{k,p}(2i)$, oraz $\sum_{i=0}^{n-1} F_{k,p}(2i+1)$ oraz macierzowe generatory dla liczb $F_{k,p}(n)$. Wiele rzeczy zawartych w opisywanym rozdziale wynika z ogólnie znanej wiedzy na temat ciągów zdefiniowanych jednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym, chociażby wzory na powyższe sumy, czy też reprezentacje macierzowe. Skupienie się na ciągu $F_{k,p}(n)$ jest eleganckim pomysłem i jest wart docenienia ale dodanie wyników, które znacząco pogłębiałyby wiedzę matematyczną w tym temacie, mocno wzmocniłoby ten fragment. Przykładem takiego wzbogacenia mogła by być próba znalezienia jawnego wzoru $F_{k,p}(n)$ albo chociaż znalezienie asymptotycznego zachowania analizowanego ciągu. Sprowadzałoby się to niewątpliwie do analizy pierwiastków wielomianu

$$w_{p,k}(x) = 1 - px - (p-1)x^{k-1} - x^k.$$

Jeżeli znalezienie wszystkich pierwiastków okazałoby się zbyt trudne to można byłoby spróbować znaleźć jakieś własności szukanych pierwiastków mając nadzieję, że powie to coś o zachowaniu $F_{k,p}(n)$. Istnieje w tym temacie bogata literatura. Można tutaj chociażby wspomnieć o podręczniku *„Analytic Combinatorics”* autorstwa Flajoleta i Sedgewicka.[2]

Cała praca jest napisana bardzo dobrze. Struktura jest logiczna, a dowody są czytelne pomimo, że często są skonstruowane na żmudnych przeliczeniach. Pojawiają się drobne błędy, które nie wpływają na poprawność, a chyba są nieuniknione w tego typu dowodach. Tutaj miałbym jedynie uwagę dotyczącą notacji stojącej za pojęciem pokolorowania z podziałem, która jak dla mnie nie była do końca klarowna.

Materiał opisywanej pracy doktorskiej składa się z aż czterech artykułów.[3][4][5][6] Warto tutaj zauważyć, że w dwóch z nich pani Natalia Bednarz jest jedyną autorką. Szkoda, że opisane wyniki nie znalazły miejsca w bardziej renomowanych czasopismach. Według *InCites Journal*

---

[1]Założenie o całkowitości p powoduje zawężenie stosowalności Tw. 4.3 w dowodach własności ciągu $F_{k,p}(n)$.

[2]P. Flajolet, R. Sedgewick. *Analytic combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009. xiv+810 pp. ISBN: 978-0-521-89806-5. `https://doi.org/10.1017/CBO9780511801655`

[3]N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch. The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs. *Utilitas Mathematica* 106 (2018), 39-49.

[4]N. Bednarz, I. Włoch. Some interpretations of the (k, p)-Fibonacci numbers. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. (w druku).

[5]N. Bednarz. On (k, p)-Fibonacci numbers. (wysłane do czasopisma).

[6]N. Bednarz. Application of the numbers of the Fibonacci type to the counting problems in graphs. (wysłane do czasopisma).

Citation Reports[7] jedno z tych czasopism[3] w 2019 roku posiadało *Journal Impact Factor* równy 0.288 zaś kolejne[4] w ogóle nie występuję w tym serwisie (trzecie i czwarte czasopismo nie zostało podane z powodu, jak rozumiem, czekania na akceptację).

To co wzbudziło moje wątpliwości to zadeklarowany cel badawczy: *„Jakie obiekty należy zliczać w grafach o najprostszych strukturach (ścieżkach, cyklach), tak aby liczba tych obiektów była wyrażona przez liczby typu Fibonacciego?”*[8] Jeżeli miałbym się zajmować tą tematyką to osobiście bardziej by mnie interesowało ile jest podziałów danego typu w jakieś danej naturalnej klasie podgrafów. W przypadku, gdy nie dałoby się wyrazić szukanej wartości w zwarty sposób, to interesowałoby mnie zachowanie asymptotyczne, czy też jakieś ograniczenia. Pytanie zadane w doktoracie jest na swój sposób ciekawe ale bałbym się, że odpowiedź na nie może nie nieść znaczącego postępu w rozwoju matematyki jako dziedziny naukowej. Co ciekawe główna część doktoratu[9] jest luźno powiązana z zadeklarowanym celem i realizuje zdecydowanie mi bliższe podejście do badań.

Podsumowując, mocne strony omawianego doktoratu to: pełne rozwiązanie problemu liczby $(A, 2B)$-krawędziowych kolorowań z podziałem w grafach jedno-cyklowych wraz z pełną charakteryzacją sytuacji ekstremalnych,[9] bardzo dobra redakcja tekstu, oraz fakt, że duża cześć wyników była pracą samodzielną. Do słabych stron przede wszystkim można zaliczyć to: że duży fragment rozdziału czwartego zostawia pewien niedosyt w kwestii mocy wyników, oraz że rezultaty z doktoratu, które zostały opublikowane, pojawiły się w czasopismach słabo albo w ogóle niepunktowanych. Biorąc pod uwagę powyższe argumenty, uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Natalii Bednarz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

B Bosek

Signed by / Podpisano przez:

Bartłomiej Emil Bosek

Date / Data: 2021-03-27 18:38

Bartłomiej Bosek

[7] `https://jcr.clarivate.com`

[8] Podrozdział 2.2, strona 28, linie 4-5 opisywanego doktoratu.

[9] Podrozdziały 3.2 oraz 3.3 opisywanego doktoratu.