

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Łukasza Patryka Michalaka.

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Łukasza Patryka Michalaka *On the Reeb graphs and related objects* (O grafach Reeba i powiązanych obiektach). Wymieniona praca doktorska liczy 82 strony i napisana jest w języku angielskim. Treść podzielona jest na pięć rozdziałów, a na jej merytoryczną zawartość składają się w większości wyniki dwóch prac doktoranta "Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 52 (2018), no. 2, 749–762, Combinatorial modifications of Reeb graphs and the realization problem, *Discrete Comput. Geom.* 65 (2021), 1038–1060, oraz jego wspólnej pracy z promotorem, Relations between Reeb graphs, systems of hypersurfaces and epimorphisms onto free groups, preprint (2020), arXiv:2002.02388., (złożona do druku).

Pojęcie grafu Reeba $\mathcal{R}(f)$ funkcji gładkiej $f : M \rightarrow R$ na rozmaitości M zostało wprowadzone przez Georgesa Reeba w 1946 przy badaniu funkcji Morse'a foliacji. Zainteresowanie badaniem tego pojęcia wzrosło w szczególności z początkiem lat 90tych dwudziestego wieku kiedy okazało się istotnym narzędziem w zastosowaniu do grafiki komputerowej.

Rozprawa magistra Michalaka przedstawia wyniki dotyczące grafów Reeba funkcji gładkich na rozmaitości. Jednym z podstawowych problemów w tej tematyce, badanym przez różnych autorów, jest wyróżnienie i scharakteryzowanie grafów, które mogą być grafami Reeba określonych klas funkcji. Znacznie trudniejszym problemem jest pytanie o zbiór dopuszczalnych grafów Reeba funkcji na ustalonej rozmaitości. W ten sposób z niezmiennika funkcji otrzymuje się właściwości charakteryzujące rozmaitość samą w sobie. Korzystając z teorii Morse'a oraz metod kombinatorycznych pan Michalak podaje szereg twierdzeń realizacyjnych dla grafów Reeba, począwszy od wyznaczenia możliwych rang cyklicznych występujących grafów Reeba, a skończywszy na opisanu ich typów homeomorfizmu czy izomorfizmu.

Z grafem Reeba w naturalny sposób związane są dwa rodzaje obiektów: epimorfizmy na grupę wolną, zwane epimorfizmami Reeba, które są indukowane na grupach podstawowych przez odwzorowania ilorazowe z rozmaitości do grafu Reeba, oraz systemy hiperpowierzchni w rozmaitości, odpowiadające krawędziom w grafie Reeba poza drzewami rozpinającymi. Magister Michalak przedstawia szereg własności tych obiektów i ich związków z grafami Reeba. W szczególności dowodzi on, że każdy epimorfizm z grupy podstawowej rozmaitości na grupę wolną jest indukowany przez system hiperpowierzchni, który nie rozspójnia tej rozmaitości. Magister Michalak przedstawia także związek klas kobordyzmu obramowanego systemów hiperpowierzchni modulo dyfeomorfizmy rozmaitości z klasami silnej równoważności epimorfizmów na grupy wolne. Dokonuje on pełnego wyliczenia tych klas dla powierzchni. Uzyskane wyniki pozwalają rozszerzyć twierdzenia realizacyjne w celu scharakteryzowania nie tylko grafów Reeba, ale także epimorfizmów Reeba funkcji Morse'a. W przypadku powierzchni pan Michalak podaje pełną charakteryzację epimorfizmów Reeba prostych funkcji Morse'a oraz ich związek z topologiczną sprzężonością funkcji.

Praca jest dobrze i przejrzysto zredagowana, a jej poziom naukowy jest bardzo wysoki.

W konkluzji, uważam, że rozprawa magistra Łukasza Patryka Michalaka *On the Reeb graphs and related objects* spełnia z nadlatkiem wymagania artykułu 13. ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. z 2017 r. poz. 1789). z dn. 14 marca 2003 roku. Może być zatem podstawą

do nadania magistrowi Łukaszowi Patrykowi Michalakowi stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka. W związku z tym wnioskuje o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie mgra Łukasza Patryka Michalaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

8 października, 2022

A handwritten signature in black ink, reading "Józef Przytycki". The script is cursive and elegant, with the first letter 'J' being particularly large and stylized.

Józef H. Przytycki
Professor of Mathematics,
George Washington University, Washington, DC