Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 30-348 Kraków
e-mail: grytczuk@tcs.uj.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej

Sylwia Antoniuk

Sharp treshold functions for some properties of random groups

Rozprawa doktorska Sylwii Antoniuk traktuje o funkcjach progowych pewnych własności grup losowych. Jest to bardzo ciekawa tematyka zapoczątkowana pod koniec ubiegłego wieku przez wybitnego matematyka Gromova, laureata licznych wyróżnień, w tym prestiżowej nagrody Abela. W zaproponowanym przez niego modelu losujemy prezentację grupy, przy czym ustalona jest liczba generatorów, natomiast losowo wybieramy zbiór relacji (z prawdopodobieństwem jednostajnym przy ustalonej gęstości), których jednakowa długość rośnie do nieskończoności. Gromov wykazał, że w tak zdefiniowanym modelu dla pewnych własności grup występuje zjawisko przejścia fazowego. W szczególności, przy gęstości mniejszej od 1/2 grupa jest prawie napewno hiperboliczna (i nieskończona), natomiast powyżej 1/2 staje się co najwyżej 2-elementowa.

Prace Gromova zainspirowały wielu innych badaczy. Wkrótce Żuk wprowadził komplementarny model grupy losowej, w którym ustalona jest długość relacji, natomiast liczba generatorów rośnie. W przypadku grup trójkątnych (długość relacji wynosi dokładnie 3) wykazał on to samo co Gromov, z tym, że powyżej gęstości 1/2 grupa losowa w jego modelu staje się trywialna.

Sylwia Antoniuk w pracy doktorskiej bada jeszcze inny model grupy losowej (tzw. model dwumianowy), w którym każdą relację losujemy niezależnie z prawdopodobieństwem $p = p(n)$, gdzie n jest liczbą generatorów grupy. Przy odpowiednich założeniach o gęstości, model ten jest równoważny z modelem Żuka, ale jest dogodniejszy gdy chcemy dokładniej szacować funkcje progowe ponieważ pozwala na efektywne wykorzystanie technik z teorii grafów i hipergrafów losowych. Jedną z głównych zalet tego doktoratu jest właśnie eleganckie połączenie tych dwóch dziedzin—grup losowych i losowych struktur dyskretnych. Sądzę, że kierunek ten znajdzie wkrótce entuzjastycznych kontynuatorów.

Wyniki rozprawy koncentrują się na kilku kluczowych własnościach grup rozważanych wcześniej zarówno przez Gromova jak i Żuka. Dostarczają one dokładniejszych asymptotycznie oszacowań na funkcje progowe związane z tymi własnościami. Na przykład, w Twierdzeniu 10 autorzy dowodzą, że grupa losowa $\Gamma(n,p)$ jest trywialna już dla $p \geq 1.2n^{-3/2}$ wzmacniając znacząco rezultat Żuka mówiący, że to samo zachodzi dla $p \geq n^{-3/2+\epsilon}$ (przy dowolnym ustalonym $\epsilon > 0$). Kluczowy pomysł dowodu polega na zdefiniowaniu pewnego grafu tak, aby relacja sąsiedztwa wierzchołków w grafie odpowiadała równości elementów grupy, a następnie wykorzystaniu istnienia dużych składowych spójności w grafie losowym. Jest to bardzo eleganckie zastosowanie metody probabilistycznej w teorii grup (charakterystyczne dla całej rozprawy).

W Twierdzeniu 15 wykazano, że własność kolapsowania grupy (stawania się grupą trywialną) posiada tzw. ostry próg (ang. sharp thereshold), którym jest funkcja $c(n)n^{-3/2}$, gdzie $c(n)$ jest ciągiem o skończonej granicy górnej (autorzy przypuszczają, że $c(n)$ zbiega do stałej). Dowód polega na umiejętnej adaptacji metody Friedguta sprowadzającej problem do rozważania struktur lokalnych w odpowiednim grafie losowym.

Z kolei Twierdzenie 12 wzmacnia i rozszerza zarazem wynik Żuka dotyczący hiperboliczności grupy. Mówi ono, że przy $p \leq n^{-3/2+o(1)}$ grupa losowa $\Gamma(n,p)$ jest hiperboliczna, asferyczna, beztorsyjna i nieskończona. Dowód wykorzystuje własności izoperymetryczne tzw. diagramów van Kampena (a właściwie ich odpowiedniej modyfikacji). Jego kluczowym składnikiem jest zasada lokalno-globalna geometrii hiperbolicznej pozwalająca sprowadzić problem do skończonej rodziny takich diagramów.

Druga część rozprawy dotyczy funkcji progowych dla wolności grupy oraz własności Kazhdana (T). Inspiracji dostarcza ponownie wynik Żuka, stwierdzający, że przy $p \leq n^{-2-\epsilon}$ grupa $\Gamma(n,p)$ jest wolna, a przy $p \geq n^{-2+\epsilon}$ posiada własność (T) (własności te wzajemnie się wykluczają). Twierdzenie 19 wzmacnia pierwszą własność, mianowicie grupa $\Gamma(n,p)$ pozostaje wolna dla $p = cn^{-2}$ przy dowolnym $c \leq A - \epsilon$, gdzie A jest pewną stałą. Idea dowodu ponownie polega na zdefiniowaniu odpowiedniego hipergrafu (o krawędziach rozmiaru co najwyżej 3), przetłumaczeniu pożądanych własności prezentacji grupy na jego własności kombinatoryczne, a następnie wykazaniu tych własności przy użyciu aparatu hipergrafów losowych.

Zaskakujący wynik znajduje się w Twierdzeniu 23. Mówi ono, że w ewolucji grupy losowej $\Gamma(n,p)$ istnieje przedział, w którym nie posiada ona włsności (T), ani nie jest wolna. Przedział ten rozpina się pomiędzy wartościami An^{-2} i $Bn^{-2}\log n$, dla pewnych stałych A, B. Dowód wykorzystuje ciekawe związki między własnościami grupy $\Gamma(n,p)$ a charakterystyką Eulera kompleksu prezentacji grupy.

Ostatni wynik (Twierdzenie 28) stanowi eleganckie uzupełnienie Twierdzenia 23 w części dotyczącej własności (T). Orzeka on, że przy $p \geq Cn^{-2}\log n$ grupa $\Gamma(n,p)$ ma własność (T), co sugeruje możliwość istnienia ostrego progu dla tej własności. Dowód wykorzystuje własności spektralne Laplasjanu pewnego grafu (ang. link graph) związanego z prezentacją grupy. Kluczowym narzędziem jest tu wcześniejszy wynik Coja-Oghlana dotyczący spektrum Laplasjanu grafu losowego.

Podsumowując, uważam, że rozprawa Sylwii Antoniuk to przykład znakomitej matematyki, łączącej w elegancki sposób teorię grup i teorię grafów losowych. Autorka wykazuje się w niej świetnym opanowaniem trudnego i rozległego warsztatu oraz niezwykłą wręcz erudycją. Na osobne uznanie zasługuje znakomita redakcja pracy. Jest to jedna z najlepszych rozpraw doktorskich jakie przyszło mi recenzować w ostatnim czasie. Wnoszę zatem o dopuszczenie Sylwii Antoniuk do dalszych etapów przewodu doktorskiego, a także o wyróżnienie przedłożonej rozprawy.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk — Kraków, 1 czerwca 2014