prof. dr hab. Sławomir Cynk
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
email: slawomir.cynk@.uj.edu.pl

Kraków, 15 czerwca 2020

Recenzja rozprawy doktorskiej p. Jędrzeja Garnka
pt. Abelian varieties over p-adic fields.

Zasadniczym obiektem badań rozprawy doktorskiej Pana mgra Garnka, napisanej pod opieką prof. Wojciecha Gajdy i dra dra Bartosza Naskręckiego są rozmaitości abelowe, czyli gładkie rzutowe rozmaitości algebraiczne, które z działaniem zadanym przez funkcję wymierną stanowią grupę, w której element odwrotny również zadany jest przez funkcję wymierną. Jednowymiarowymi rozmaitościami abelowymi są krzywe eliptyczne. Rozmaitość abelowa wymiaru n nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ powstaje jako iloraz przestrzeni $\mathbb{C}^n$ przez kratę Λ spełniającą warunki Riemanna, rozmaitość abelowa jest dyfeomorficzna z torusem $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \cong (S^1)^{2n}$. Rozmaitości abelowe są bardzo ważnymi obiektami badań w wielu działach matematyki, szczególnie geometrii algebraicznej, arytmetycznej i teorii liczb. Pomimo bardzo intensywnych badań wiele ważnych pytań dotyczących rozmaitości abelowych pozostaje w dalszym ciągu otwartych.

Praca składa się z rozdziału wstępnego oraz trzech rozdziałów zasadniczych poświęconych trzem zagadnieniom związanym z arytmetyką rozmaitości abelowych nad ciałem liczb p-adycznych oraz związkom z redukcją do charakterystyki dodatniej. W rozdziałach 2. i 3. autor rozważa podniesienia "zwyczajnych" i "nie-zwyczajnych" rozmaitości abelowych. Rozmaitość abelowa nad ciałem charakterystyki skończonej p jest zwyczajna jeżeli grupa punktów p-torsyjnym w domknięciu algebraicznym ciała ma rząd p. Krzywa eliptyczna, która nie jest zwyczajna jest supersingularna, w wyższym rozmiarze pojęcie to jest bardziej skomplikowane.

Motywacją rozdziału 2. jest hipoteza dotycząca asymptotycznego zachowania (n, d)-stopnia sformułowana przez Davida i Westona w przypadku krzywych eliptycznych oraz Gamzona w sytuacji ogólnej. Z prawdziwości tej hipotezy wynika w szczególności skończoność liczby liczb pierwszych lokalnych torsji.Głównym wynikiem tej części jest wyznaczenie $(p, 1)$-stopnia krzywych eliptycznych z mnożeniem zespolonym, przy pomocy współczynników rozkładu liczby p w ciele kwadratowym (Tw. 2.4.1). W szczególności pokazane zostało (Cor. 2.4.4), że $(p, 1)$-stopień należy do zbioru $\{1, 2\}$ wtedy i tylko wtedy gdy liczbę p (przy założeniu $p \geqslant 5$) można zapisać w postaci $p = \frac{1}{4}(1 + Dt^2)$ (gdzie $-D$ jest wyróżnikiem porządku mnożenia zespolonego). W przypadku $D = 4$ (mnożenie zespolone przez porządek w $\mathbb{Q}[i]$) autor uzyskuje bardzo interesującą charakteryzację kiedy $(p, 1)$-stopień jest równy 8 poprzez warunek, że p jest sumą kwadratów kolejnych wyrazów pewnego ciągu rekurencyjnego rzędu 2 (Cor. 2.4.5). W konsekwencji, problem badany w rozdziale 2. zostaje związany z pewnymi klasycznymi otwartymi problemami teorii liczb.

Bardzo ważna rolę w tym rozdziale odgrywa teoria deformacji rozmaitości abelowych (ze szczególnym uwzględnieniem zwyczajnych rozmaitości abelowych) nad pierścieniami artinowskimi R z ciałem residualnym k. W tej sytuacji zbiór podniesień do R zwyczajnej rozmaitości abelowej nad k posiada naturalną strukturę grupy, w szczególności jest niepusty i posiada element wyróżniony zwany podniesieniem kanonicznym. W dowodach w tej części pracy wykorzystana została charakteryzacja kanonicznego podniesienia do wektorów Witta długości n poprzez grupę torsyjną (Tw. 2.2.1).

Rozdział 4. pracy jest motywowany próbą skonstruowania przykładu rozmaitości jakobianowej, dla której kanoniczne podniesienie redukcji modulo p nie jest rozmaitością jakobianową (modulo p^2) dla wszystkich zwyczajnych liczb pierwszych. Skonstruowany w pracy został przykład (Ex. 3.4.6) krzywej w charakterystyce p, której rozmaitość jakobianowa nie posiada podniesienia do wektorów Witta długości 2 spełniających warunek odpowiadający podniesieniu kanonicznemu rozmaitości w terminach pierścienia endomorfizmów. W celu pokazania nieistnienia podniesienia zwykle staramy się wskazać, że rozważany schemat nie posiada pewnej własności, która jest spełniona np. przez rozmaitości w charakterystyce 0. Przykładem takiej własności może być istnienie rozkładu Hodge'a. W charakterystyce $p > 0$ mamy jedynie namiastkę tego rozkładu w postaci ciągu spektralnego Hodge-to-de Rham. Jeżeli ciąg spektralny degeneruje się to dokładne są ciągi dokładne (oznaczone w pracy (3.1) oraz (3.2)).

Istotnym elementem rozdziału 3. jest badanie ekwiwariantnego rozszczepiania się tych ciągów dokładnych dla krzywych rzutowych. W szczególności autor dowodzi (Thm. 3.4.5), że jeżeli ciągi te rozszczepiają się ekwiwariantnie dla działania grupy skończonej, to działanie jest słabo rozgałęzione. Implikacja przeciwna nie jest prawdziwa, co wynika z przykładu w charakterystyce 2 krzywej eliptycznej z $j = 0 = 1728$. Autor dowodzi jednak częściowych wyników: jeżeli działanie jest słabo rozgałęzione to część G-niezmiennicza ciągu Hodge-de Rham jest dokładna (Thm. 3.5.1). Ponadto ciąg Hodge-de Rham rozszczepia się dla działania grupy skończonej, jeżeli zachodzi jeden z trzech dodatkowych warunków.

Rozdział czwarty pracy dotyczy oszacowania liczby klas ciał podziału rozmaitości abelowych nad ciałem liczbowym, główny wynik tej części (Thm. 4.1.4) zawiera oszacowanie dolne, które jest liniowe względem n. W przypadku rozmaitości abelowej nad $\mathbb{Q}$ oszacowanie to implikuje, że liczba klas ciała K_n rośnie do nieskończoności z n jezeli zachodzi jeden z dwóch dodatkowych warunków, rozmaitość ma rangę większą od wymiaru, lub redukcja rozmaitości modulo p jest dobra oraz ranga redukcji jest dodatnia. Ta część pracy może wydawać się troszkę odmienna od reszty, sądząc ze wstępu motywacją była w tym przypadku była praca Hiranouchi'ego (cytowana jako [Hir19]), w której oszacowanie liczby klas uzyskano przy założeniu znikania lokalnych torsji. W pracy p. Garnka założenie to zostało usunięte.

Rozdział 1. pracy zawiera materiał przygotowawczy wykorzystywany w pracy, dotyczący szerokiego zakresu tematycznego. W szczególności zacytowane w nim są chyba wszystkie zaawansowane wyniki wykorzystywane w dalszych częściach pracy.

Praca dotyczy bardzo trudnych zagadnień matematycznych i jest zaawansowana technicznie, dotyczy szerokiego zakresu tematyki obejmujące wiele zagadnień z geometrii algebraicznej, geometrii arytmetycznej, algebraicznej teorii liczb i innych dziedzin. Spośród zaawansowanych metod wykorzystywanych w pracy wymienić można m.in. (w sposób dość przypadkowy i tendencyjny): techniki schematów, teorię deformacji, kohomologie snopów koherentnych, kohomologie de Rhama czy hiperkohomologie. Tymi bardzo zaawansowanymi pojęciami i technikami Pan Garnek posługuje się z wielką sprawnością pokazującą głębokie zrozumienie stosowanych wyników.

Tematyka pracy jest nie tylko trudna, ale również mieści się moim zdaniem w głównym nurcie badań geometrii algebraicznej i geometrii arytmetycznej, uzyskane wyniki w istotny sposób poszerzają stan wiedzy w tym zakresie. Praca jest wynikiem realizacji pewnego klarownego programu badawczego, inspirowanego otwartymi problemami. Rozdziały 2,3,4 powstały na podstawie dwóch prac opublikowanych i jednego preprintu, w pracy zostały uogólnione lub poszerzone wyniki innych autorów (zarówno motywacja, jak i związki z wynikami innych autorów są bardzo klarownie omówione w rozprawie).

Bardzo wysoko oceniam redakcję pracy, autor dokłada starań aby dowody zarówno głównych wyników jak i lematów pomocniczych były czytelne i zrozumiałe. W lekturze pracy bardzo pomocne są zarówno wspomniane preliminaria jak i Wstęp, stanowiący, poza opisem motywacji, również przewodnik po wynikach pracy. Ponadto na początku każdego rozdziału podany jest Setup, w którym autor się porusza, na końcu pracy jest wykaz oznaczeń (liczący trzy strony). Oczywiście w tak obszernej i technicznej pracy nie można uniknąć błędów i literówek, moim zdaniem jest ich bardzo mało i nie utrudniają lektury pracy. Najpoważniejsze mankamenty dostrzeżone przeze mnie, to w dowodzie Lematu 2.2.2 w tej postaci oszacowanie w linii 32^{10} jest nieprawdziwa, podobnie (linia 56^{13}) punkt O nie jest jedynym punktem o nietrywialnej izotropii. Obie usterki są nieistotne, a Pan Garnek od razu podał mi eleganckie poprawki.

Bardzo wysoko oceniam zarówno merytoryczną jak i redakcyjną wartość rozprawy doktorskiej Pana mgra Garnka, uważam, że z nadwyżką spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania, wnoszę o dopuszczenie p. Garnka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sławomir Cynk

SCynk