Piotr Maćkowiak

Streszczenie artykułów:

I. D. Bugajewska, D. Bugajewski, P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Nonautonomous superposition operators in the spaces of functions of bounded variation*, Topological Method in Nonlinear Analysis 48 (2016), 637–660.

II. P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Local boundedness of nonautonomous superposition operators in* $BV[0,1]$, Bulletin of the Australian Mathematical Society 92 (2015), 325–341.

III. P. Maćkowiak, *On the continuity of superposition operators in the space of functions of bounded variation*, Aequationes Mathematicae, doi:10.1007/s00010-017-0491-x (2017), 1–19.

Spis treści

1 Wprowadzenie

Pojęcie wariacji, wprowadzone przez C.Jordana w 1881 (zob. [21]), jest jednym z podstawowych pojęć analizy matematycznej. Od końca XIX wieku wariacja Jordana, a także jej uogólnienia i rozszerzenia były przedmiotem zainteresowania wielu matematyków ze względu na fakt, że funkcje ograniczonej wariacji w sensie Jordana znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach, na przykład w geometrycznej teorii miary (zob. np. [1, 17, 25]), w teorii szeregów Fouriera (zob. [31]), w teorii całki i równań całkowych (zob. [7, 8, 14]), w przetwarzaniu obrazów, ich analizie i odzyskiwaniu (zob. np. [10–12, 18, 23, 30]) oraz w ekonomii (zob. [19]). Wiele z tych zastosowań dotyczy nieliniowych operatorów superpozycji, zdefiniowanych w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Wynika to z faktu, że teoria nieliniowych operatorów superpozycji w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana jest ściśle związana z badaniem rozwiązań równań nieliniowych w tej klasie funkcji (zob. np. [8, 13, 20]). Badanie takich rozwiązań wydaje się interesujące z co najmniej kilku powodów. Najpierw zwróćmy uwagę na fakt, że rozwiązania klasycznego problemu Cauchy'ego dla równania pierwszego rzędu zdefiniowane na zwartym przedziale $\mathbb{R}$, których istnienie jest zagwarantowane przez twierdzenie Peano, są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana (przynajmniej lokalnie). Ta własność jest zachowana, jeśli rozważa się rozwiązanie tego problemu, którego istnienie wynika z klasycznego twierdzenia Carathéodory'ego (zob. [15, Theorem 1.1]). Po drugie, rozwiązania wielu równań określających konkretne zjawiska fizyczne są funkcjami o wariacji ograniczonej (lokalnie). Jako przykłady można wspomnieć tutaj równania opisujące amplitudę wymuszonych drgań struny, które pojawiają się w inżynierii (zob. [29]), lub równanie całkowe Volterry opisujące dynamikę populacji przy założeniu ograniczoności zasobów (zob. np. [5]). Motywacja do badania rozwiązań nieliniowych równań całkowych w klasie funkcji ograniczonej wariacji w sensie Jordana wywodzi się również z teorii całek nieabsolutnie zbieżnych. Mianowicie wiadomo, że jeśli $h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Denjoya-Perrona (lub, równoważnie, w sensie Henstocka-Kurzweila), to $h\varphi$ jest również całkowalna w tym sensie, gdy $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczonej wariacji w sensie Jordana (patrz [14]).

W niedawno opublikowanej monografii [2], która ma na celu podanie szerokiego opisu wyników dotyczących funkcji o ograniczonej (uogólnionej) wariacji, ich stosunku do innych ważnych klas funkcji, a także ich zastosowań do różnych problemów powstających w analizie nieliniowej, autorzy podali trzy podstawowe otwarte problemy dotyczące nieautonomicznych operatorów superpozycji, działających w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Pierwszy i najbardziej podstawowy problem wymieniony dotyczy podania warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał rozważaną przestrzeń w siebie. Drugi problem polega rozstrzygnięciu, czy nieautonomiczny operator superpozycji odwzorowujący przestrzeń funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana w siebie jest automatycznie ograniczony, tj. czy odwzorowuje ograniczone podzbiory tej przestrzeni w podzbiory ograniczone. Trzeci problem dotyczy ciągłości nieliniowego operatora superpozycji działającego w rozpatrywanej przestrzeni.

Można zatem powiedzieć z grubsza, że teoria nieautonomicznych operatorów superpozycji działających w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana była, zgodnie z monografią [2], w punkcie wyjścia. Główną motywacją dla powstania artykułów I-III było zbudowanie solidnej podstawy dla teorii i zastosowań nieliniowych operatorów superpozycji w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, poprzez rozwiązanie trzech wymienionych problemów.

1.1 Preliminaria

Przypomnimy teraz kilka podstawowych pojęć i własności oraz ustalimy stosowaną notację. Dla funkcji $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, jej wariacja (w sensie Jordana) jest definiowana zgodnie ze wzorem

$$\bigvee_a^b u := \sup\{\sum_{i=1}^k |u(t_i) - u(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b,\ k \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Jeśli $\bigvee_a^b u < +\infty$, to mówimy, że funkcja u ma ograniczoną wariację lub jest o ograniczonej wariacji (w sensie Jordana). Zbiór wszystkich funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana określonych na przedziale $[a, b]$ z określoną na nim normą

$$||u||_{BV} := |u(a)| + \bigvee_a^b u,$$

jest przestrzenią Banacha (zob. [2, p. 62]); oznaczamy tę przestrzeń jako $BV[a, b]$ oraz przyjmujemy $BV := BV[0, 1]$. Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to autonomiczny operator superpozycji $F : BV \to BV$, generowany przez f, jest zdefiniowany jako $F(u)(t) := f(u(t))$, $u \in BV$, $t \in [0, 1]$. Jeśli $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to nieautonomiczny operator superpozycji (operator Niemyckiego) $F : BV \to BV$, generowany przez f, jest określony wzorem $F(u)(t) := f(t, u(t))$, $u \in BV$, $t \in [0, 1]$; o funkcji f mówimy, że jest generatorem (operatora) F. Zauważmy, że pojęcie nieautonomicznego operatora superpozycji jest ogólniejsze od pojęcia autonomicznego operatora superpozycji.

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Symbol $\lfloor a \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowita nie większą od a, $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest L-lipschitzowalna, gdy f jest funkcją Lipschitza ze stałą L. Przyjmujemy konwencję: $\sum_{i \in \emptyset} := 0$. Przez $C^1((a, b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, oznaczamy przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły działających z iloczynu kartezjańskiego $(a, b) \times \mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$. Dla $t \in [0, 1]$ oraz $\varepsilon \in (0, +\infty)$ piszemy $l_\varepsilon(t) := \max\{0, t - \varepsilon\}$ oraz $r_\varepsilon(t) := \min\{1, t + \varepsilon\}$. Ponadto przyjmujemy oznaczenie $\theta(t) := 0$, $t \in [0, 1]$.

Kulę domkniętą o środku x i promieniu $r \in (0, +\infty)$ w przestrzeni unormowanej X oznaczamy jako $B_X(x, r)$. Dla prostoty, zamiast $B_{\mathbb{R}}(x, r)$, piszemy $[x - r, x + r]$.

Odwzorowanie $G\colon BV \to BV$ jest nazywane lokalnie ograniczonym, gdy dla każdego $r > 0$ istnieje takie $R > 0$, że $G(B_{BV}(0, r)) \subset B_{BV}(0, R)$.

1.2 Uwagi na temat tego streszczenia

W streszczeniu prezentujemy najważniejsze wyniki zawarte w artykułach I-III, co oznacza że pewne rezultaty mogły zostać pominięte. Kolejność pojawiania się oraz numeracja twierdzeń, lematów, etc., w streszczeniu mogą różnić się w stosunku do prac; przyjmujemy numerację ciągłą. Ponadto w streszczeniu ujednoliciliśmy notację, co skutkuje tym, że forma (ale nie treść) przedstawionych wyników może być nieznacznie różna od wersji oryginalnych. O ile nie zastrzeżemy inaczej, to wyniki ujęte w streszczeniu pochodzą z prac I-III. W punktach 2-4 kiedykolwiek piszemy 'ograniczona wariacja', to mamy na myśli 'ograniczoną wariację w sensie Jordana'.

1.3 Mój wkład w prace I, II

Mój udział w pracach nad artykułem I polegał na opracowaniu dowodu Twierdzenia 11 (w pracy I: Theorem 3.8) oraz opracowaniu podpunktu 2.2 (w pracy I: Section 4). The case of locally bounded functions (poza dowodem ostatniego twierdzenia w tym podpunkcie). Swój wkład w pracę I oceniam na 30%.

Mój udział w pracach nad artykułem II polegał na opracowaniu linii dowodowej głównego wyniku tej pracy Twierdzenia 31 (w pracy II: Theorem 4.1), włączając w to wstępne wersje lematów i ich dowodów, które poprzedzają to twierdzenie. Swój wkład w pracę II oceniam na 70%.

2 Warunki na działanie: artykuł I

W monografii [4] na str. 175 Autorzy piszą:

> As already mentioned, no general results on the acting, boundedness, or continuity of the superposition operator F are known in the nonautonomous case $f = f(t, u)$ (apart from trivial sufficient conditions, of course).

Na stronie 174 Autorzy cytują i dowodzą wyniku pochodzącego z pracy Ljamina [24].

Twierdzenie 1. *Assume that the function $f(t, \cdot)$ satisfies the Lipschitz condition on $\mathbb{R}$ uniformly in $t \in [0, 1]$, and that the function $f(\cdot, u)$ is of bounded variation on the interval $[0, 1]$, uniformly in $u \in \mathbb{R}$. Then the nonautonomous superposition operator F, generated by f, maps the space BV into itself and is locally bounded, that is, it maps bounded sets into bounded ones.*

W artykule [6] D. Bugajewska sformułowała przypuszczenie, że Twierdzenie 1 jest błędne. Dodajmy, że dowód twierdzenia Ljamina zawarty w pracy przeglądowej [3] jest fałszywy. Można znaleźć odpowiednie przykłady na niepoprawność tego dowodu - zob. omówienie D. Bugajewskiego na potrzeby ZblMATH (Zbl 1255.47059). Hipoteza z pracy [6] została potwierdzona, np. w pracy [26], za pomocą następującego kontrprzykładu:

Przykład 2 ([26]). Niech funkcja $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana następująco:

$$f(t, u) = \begin{cases} 0, & \forall\, n \in \{2, 3, \ldots\} : t \neq c_n \text{ lub } u \notin I_n, \\ \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{|u - c_n|}{w_n}\right), & \exists\, n \in \{2, 3, \ldots\} : t = c_n \text{ i } u \in I_n, \end{cases}$$

gdzie $c_n = 1 - \frac{1}{n}$, $w_n = \frac{1}{2n}$ i $I_n = (c_n - w_n, c_n + w_n)$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Przy ustalonym $t \in [0, 1]$ funkcja $f(t, \cdot)$ spełnia warunek Lipschitza (jednostajnie ze względu na drugą zmienną) ze stałą nie większą niż 2. Ponadto $\bigvee_0^1 f(\cdot, u) \leqslant 22$ dla $u \in \mathbb{R}$. Biorąc funkcje $x(t) = t$ oraz $g(t) = f(t, x(t))$, $t \in [0, 1]$, można łatwo sprawdzić, że nieautonomiczny operator superpozycji, generowany przez f, nie przekształca przestrzeni BV w siebie.

W przypadku nieautonomicznego operatora superpozycji w przestrzenie BV, warunki dostateczne na działanie przedstawia

Twierdzenie 3 ([6, Theorem 1]). *Niech $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniająca następujące warunki:*

(i) *f spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie ze względu na $t \in [0, 1]$;*

(ii) *istnieje stałą $M > 0$, dla której dla dowolnych liczb rzeczywistych $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ oraz dowolnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0, 1]$, zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i, u_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| \leqslant M. \tag{1}$$

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, odwzorowuje przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony.

Przytoczony wynik dał nam wskazówkę, jakie warunki mogłyby okazać się konieczne w rozważanej sytuacji.

2.1 Nieautonomiczne operatory superpozycji - przypadek ogólny

Pierwszym wynikiem tej sekcji jest proste doprecyzowanie Twierdzenia 3.

Twierdzenie 4. *Niech funkcja* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *spełnia następujące warunki:*

(i) f *spełnia lokalny warunek Lipschitza na* $\mathbb{R}$, *jednostajnie ze względu na* $t\in[0,1]$;

(ii) *dla każdego* $r>0$ *istnieje taka stała* $M_r>0$, *że dla każdego* $n\in\mathbb{N}$, *każdego podziału* $0=t_0<\ldots<t_n=1$ *przedziału* $[0,1]$ *oraz dowolnych liczb* $u_0,\ldots,u_{n-1}\in[-r,r]$, *spełniona jest implikacja*

$$\sum_{i=1}^{n-1}|u_i-u_{i-1}|\leqslant r \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}|f(t_i,u_{i-1})-f(t_{i-1},u_{i-1})|\leqslant M_r. \tag{2}$$

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji F, *generowany przez* f, *odwzorowuje przestrzeń* BV *w siebie i jest lokalnie ograniczony.*

Poniższy przykład pokazuje, że ostatnie twierdzenie istotnie poprawia Twierdzenie 3.

Przykład 5. Rozważmy funkcję $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowana następująco:

$$f(t,u)=\begin{cases}0, & \text{if } t\neq\frac{1}{n} \text{ i } u\in\mathbb{R},\\ 0, & \text{if } t=\frac{1}{n} \text{ i } u<n-1,\\ 1, & \text{if } t=\frac{1}{n} \text{ i } u\geqslant n,\\ u-(n-1), & \text{if } t=\frac{1}{n} \text{ i } n-1\leqslant u<n,\end{cases}$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$.

Zauważmy, że dla dowolnego $t\in[0,1]$, funkcja $u\mapsto f(t,u)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Ponadto f nie spełnia warunku (ii) Twierdzenia 3. Faktycznie, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ ustalmy

$$u_0:=0,\qquad u_1:=n-1,\qquad \ldots,\qquad u_i:=n-i,\qquad \ldots,\qquad u_{n-1}:=1$$

i

$$t_0:=0,\qquad t_1=\frac{1}{n},\qquad \ldots,\qquad t_i:=\frac{1}{n-i+1},\qquad \ldots,\qquad t_n:=1.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left|f(t_i,u_{i-1})-f(t_{i-1},u_{i-1})\right|\\ &\qquad=\left|f(\tfrac{1}{n},0)-f(0,0)\right|+\sum_{i=2}^{n}\left|f(\tfrac{1}{n-i+1},n-i+1)-f(\tfrac{1}{n-i+2},n-i+1)\right|\geqslant n-1.\end{aligned}$$

Z drugiej strony funkcja f spełnia warunek (ii) Twierdzenia 4, gdyż dla dowolnej liczby $r>0$, ze względu na fakt, że w każdym prostokącie $[0,1]\times[-r,r]$ funkcja f zeruje się poza zbiorem złożonym ze skończonej liczby pionowych odcinków, wystarczy przyjąć $M_r:=2\lfloor r\rfloor+1$.

Propozycja 6. *Załóżmy, że funkcja* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *spełnia założenie* (i) *Twierdzenia* 4. *Jeśli autonomiczny operator superpozycji* F*, generowany przez* f*, przekształca przestrzeń* BV *w siebie i jest lokalnie ograniczony, wtedy funkcja* f *spełnia warunek* (ii) *Twierdzenia* 4.

Następny przykład i Propozycje 8-9 charakteryzują sytuację, w której generator f nie jest lokalnie ograniczony, czyli gdy pewien zbiór ograniczony jest przekształcony funkcją f na zbiór nieograniczony.

Przykład 7. Niech F będzie nieautonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez pewną funkcję $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Podkreślmy, fakt iż operator F przekształca BV w siebie nie oznacza, że F jest lokalnie ograniczony.

Rzeczywiście, niech funkcja $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(t,u)=\begin{cases}0, & \text{gdy } t\neq 0 \text{ lub } u\leqslant 0,\\ u^{-1}, & \text{w przeciwnym razie.}\end{cases}$$

Dalej, dla każdego $n\in\mathbb{N}$, niech

$$x_n(t)=\begin{cases}n^{-1}, & \text{gdy } t=0,\\ 0, & \text{gdy } t\in(0,1].\end{cases}$$

Oczywiście operator złożenia F, generowany przez funkcję f, przekształca BV w siebie. Jednak $\|F(x_n)\|_{BV}=2n$, podczas gdy $\|x_n\|_{BV}=2n^{-1}$ dla $n\in\mathbb{N}$.

Właściwie wniosek powyższej uwagi wynika z bardziej ogólnej obserwacji, a mianowicie z następującej propozycji.

Propozycja 8. *Załóżmy, że funkcja* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *generuje nieautonomiczny operator superpozycji* F*, który przekształca przestrzeń* BV *w siebie. Jeśli funkcja* f *nie jest lokalnie ograniczona, to operator* F *nie jest lokalnie ograniczony.*

Fakt, że nieautonomiczny operator superpozycji przekształca przestrzeń BV w siebie implikuje następującą własność.

Propozycja 9. *Jeśli nieautonomiczny operator superpozycji* F*, generowany przez funkcję* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, odwzorowuje przestrzeń* BV *w siebie, wtedy dla dowolnego* $r>0$ *zbiór* $T_r{:=}\{t\in[0,1] : \sup_{u\in[-r,r]}|f(t,u)|=+\infty\}$ *jest skończony.*

Poniższy wynik stanowi, że samo spełnienie warunków działania przez operator F nie daje informacji o własnościach generatora f, traktowanego jako funkcja drugiej zmiennej.

Twierdzenie 10. *Niech* F *będzie nieautonomicznym operatorem superpozycji, generowanym przez funkcję* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, odwzorowującym przestrzeń* BV *w siebie. Wtedy dla dowolnego* $u\in\mathbb{R}$*, funkcja* $t\mapsto f(t,u)$ *ma wariację ograniczoną. Ponadto w ogólności nie da się nic stwierdzić o własnościach przyporządkowania* $u\mapsto f(t,u)$*, gdzie* $t\in[0,1]$ *jest ustalone.*

Główny wynik pracy podaje warunki konieczne i dostateczne na działanie i lokalną ograniczoność nieautonomicznego operatora superpozycji:

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że dana jest funkcja $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, przekształca przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony;*

(ii) *dla każdej liczby $r>0$ istnieje taka stała $M_r>0$, że dla dowolnej liczby $k\in\mathbb{N}$, każdego skończonego podziału $0=t_0<\ldots<t_k=1$ przedziału $[0,1]$ i dowolnego skończonego ciągu liczb $u_0,u_1,\ldots,u_k\in[-r,r]$, spełniającego warunek $\sum_{i=1}^{k}|u_i-u_{i-1}|\leqslant r$, zachodzą następujące nierówności*

$$\sum_{i=1}^{k}\Big|f(t_i,u_i)-f(t_{i-1},u_i)\Big|\leqslant M_r \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{k}\Big|f(t_{i-1},u_i)-f(t_{i-1},u_{i-1})\Big|\leqslant M_r.$$

Uwaga 12. Zauważmy, że Twierdzenie 4 i Propozycja 6 mogą być traktowane jako wnioski z Twierdzenia 11.

2.2 Przypadek funkcji lokalnie ograniczonych

W tym podpunkcie, o ile nie stwierdzimy inaczej, zakładamy że $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone oraz że F jest nieautonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez f.

Rozumowanie podobne do tego z dowodu [32, Lemma 1] prowadzi do lematu:

Lemat 13. *Niech $x\colon[0,1]\to\mathbb{R}$. Wtedy $F(x)\notin BV$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $t\in[0,1]$, że*

$$\bigvee_{l_\alpha(t)}^{r_\alpha(t)} F(x)=+\infty \qquad \text{dla każdej } \alpha>0. \tag{3}$$

Dzięki Lematowi 13 udowodniliśmy następujący techniczny wynik, który okazał się bardzo istotny dla dalszych rozważań.

Lemat 14. *Załóżmy, że istnieje funkcja $x\in B_{BV}(0,r)$, gdzie $r>0$, dla której $F(x)\notin BV$ i ustalmy taką liczbę $t\in[0,1]$, że spełniony jest warunek (3). Wtedy dla każdej liczby $\delta>0$ istnieje taka liczba $u\in[-r,r]$, że dla dowolnego $q\in\mathbb{N}$ istnieją całkowite dodatnie c_q,d_q oraz skończony zbiór punktów $l_{1/c_q}(t)\leqslant t_0^q<t_1^q<\ldots<t_{d_q}^q\leqslant r_{1/c_q}(t)$, dla których zachodzą warunki: $x(t_i^q)\in[u-\delta,u+\delta]$ dla $i=0,1,\ldots,d_q$, $c_q\to+\infty$, gdy $q\to+\infty$, oraz*

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{i=1}^{d_q}\Big|f(t_i^q,x(t_i^q))-f(t_{i-1}^q,x(t_{i-1}^q))\Big|=+\infty. \tag{4}$$

Z Lematu 14 wywnioskowaliśmy następujący

Lemat 15. *Załóżmy, że dla funkcji $x\in B_{BV}(0,r)$, gdzie $r>0$, zachodzi $F(x)\notin BV$ oraz niech $t\in[0,1]$ spełnia warunek (3). Wtedy istnieje taka liczba $u\in[-r,r]$, że dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ i każdego ciągu $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dodatnich liczb zbieżnego do 0 istnieje ciąg dodatnich liczb całkowitych $k_n{:=}k(\delta_n,\varepsilon)$ oraz skończona liczba punktów $l_\varepsilon(t)\leqslant t_0^{\delta_n,\varepsilon}<t_1^{\delta_n,\varepsilon}<\ldots<t_{k_n}^{\delta_n,\varepsilon}\leqslant r_\varepsilon(t)$, dla których zachodzą warunki: $x(t_i^{\delta_n,\varepsilon})\in[u-\delta_n,u+\delta_n]$ dla $i=1,\ldots,k_n$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\Big|f(t_i^{\delta_n,\varepsilon},x(t_i^{\delta_n,\varepsilon}))-f(t_{i-1}^{\delta_n,\varepsilon},x(t_{i-1}^{\delta_n,\varepsilon}))\Big|=+\infty.$$

Oczywiście, jeśli dla funkcji $x \in B_{BV}(0,r)$, gdzie $r > 0$, istnieją liczby $t \in [0,1]$ i $u \in [-r,r]$, dla których zachodzi teza Lematu 15, to $F(x) \notin BV$. Dlatego mogliśmy zapisać

Twierdzenie 16. *Niech $x \in B_{BV}(0,r)$ dla pewnej liczby $r > 0$. Wtedy $F(x) \in BV$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $t \in [0,1]$ i $u \in [-r,r]$ istnieją takie $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ oraz $M > 0$, że $l_\varepsilon(t) \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant r_\varepsilon(t)$ oraz $x(t_i) \in [u-\delta, u+\delta]$ dla $i \in \{0,1,\ldots,k\}$, $k \in \mathbb{N}$, implikują*

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i, x(t_i)) - f(t_{i-1}, x(t_{i-1}))| < M. \tag{5}$$

Możemy przeformułować Twierdzenie 16 w języku własności generatora f, ale potrzebujemy do tego następującej definicji.

Definicja 17. (a) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem i liczby $a, b \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $a < b$. Skończony ciąg $(t_i, u_i)_{i=1}^{k}$ nazywamy *podziałem oznakowanym* zbioru $[a,b] \times A$, gdy $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant b$ i $u_i \in A$ dla $i = 1, \ldots, k$.

(b) Jeśli V^1 i V^2 są podziałami oznakowanymi zbioru $[a,b] \times A$, to V^2 nazywamy *zagęszczeniem* V^1 (co oznaczamy jako $V^1 \preceq V^2$), gdy V^1 jest podciągiem V^2.

(c) Ciąg $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ podziałów oznakowanych zbioru $[a,b] \times A$ nazywamy *ciągiem zagęszczeń* zbioru $[a,b] \times A$, gdy $V^n \preceq V^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ciąg zagęszczeń $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbioru $[a,b] \times A$, gdzie $V^n = (t_i^n, u_i^n)_{i=0}^{k_n}$, nazywamy *właściwym*, gdy $\sup_n \sum_{i=0}^{k_n} |u_i^n - u_{i-1}^n| < +\infty$.

Twierdzenie 18. *Operator F przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb $t \in [0,1]$ oraz $u \in \mathbb{R}$ istnieją takie $\varepsilon > 0$ oraz $\delta > 0$, że dla dowolnego właściwego ciągu zagęszczeń $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbioru $[l_\varepsilon(t), r_\varepsilon(t)] \times [u-\delta, u+\delta]$, gdzie $V^n = (t_i^n, u_i^n)_{i=0}^{k_n}$, zachodzi*

$$\sup_n \sum_{i=1}^{k_n} |f(t_i^n, u_i^n) - f(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n)| < +\infty.$$

2.3 Nieautonomiczne operatory superpozycji - przypadek zmiennych rozdzielonych

W tym podpunkcie zajmujemy się nieliniowymi operatorami superpozycji, generowanymi przez funkcje o zmiennych rozdzielonych, tj. funkcje postaci $(t, u) \mapsto f(t)g(u)$, gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wprawdzie wyniki tu przedstawione mogą być traktowane jako wnioski z Twierdzenia 11 jednak ich dowody - ze względu na specyficzną postać generatorów - mogą być znacznie uproszczone.

Następujący prosty wynik wyjaśnia kiedy nieautonomiczny operator superpozycji jest generowany przez funkcję o zmiennych rozdzielonych.

Twierdzenie 19. *Niech X oznacza przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:*

(i) *X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na $[0,1]$ wyposażoną w standardowe operacje dodawanie (punktowego) oraz mnożenia przez skalary;*

(ii) *X zawiera wszystkie funkcje stałe.*

Ponadto załóżmy, że F jest nieautonomicznym operatorem superpozycji przekształcającym X w siebie. Operator superpozycji F jest generowany przez funkcję postaci $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, gdzie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $u_0 \in \mathbb{R}$, że dla każdego $u \in \mathbb{R}$ istnieje taki element $a_u \in \mathbb{R}$, że $F(x_u) = a_u F(x_{u_0})$, gdzie x_u oznacza funkcję stałą $x(t) = u$, $t \in [0,1]$ (podobnie dla x_{u_0}). Ponadto jeśli $F \not\equiv 0$, wtedy funkcje f and g są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością co do mnożenia przez współczynniki α i β, odpowiednio, spełniające warunek $\alpha\beta = 1$.

Jest jasne, że jeśli $f \equiv 0$, to z faktu, że operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, odwzorowuje przestrzeń X w siebie, nie wynika nic dla własności funkcji g. Jednakże im więcej wiadomo o zachowaniu funkcji f w punktach jej ciągłości, tym więcej można powiedzieć o własnościach funkcji g.

Nasze rozważania prowadzimy dalej dla przestrzeni BV.

Twierdzenie 20. *Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają następujące warunki:*

(i) *istnieje taka liczba $u_0 \in \mathbb{R}$, że $g(u_0) \neq 0$;*

(ii) *istnieje taki punkt $t_0 \in [0,1]$ ciągłości funkcji f, że $f(t_0) \neq 0$.*

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) *$f \in BV$;*

(b) *g spełnia lokalnie warunek Lipschitza.*

Uwaga 21. Zauważmy, że warunki (a) i (b) Twierdzenia 20 gwarantują, że operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, jest lokalnie ograniczony. Zatem w tym przypadku, podobnie jak to ma miejsce w przypadku nieautonomicznym, fakt że operator superpozycji F przekształca przestrzeń BV w siebie pociąga, że jest on lokalnie ograniczony

Rozpatrzmy teraz funkcję f zerującą się w każdym punkcie ciągłości.

Twierdzenie 22. *Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą dane i załóżmy, że*

(i) *$f(t) = 0$ w każdym punkcie $t \in [0,1]$ ciągłości funkcji f.*

Nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, przekształca przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony, gdy

(ii) *$f \in BV$;*

(iii) *g jest lokalnie ograniczona.*

Uwaga 23. Jeśli $f \in BV$, to założenie (i) Twierdzenia 22 implikuje, że $f(t) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in D_f$, gdzie D_f jest zbiorem punktów nieciągłości funkcji f.

Zauważmy, że jeśli odrzucimy założenie, że f jest funkcją o ograniczonej wariacji, to stwierdzenie, że założenie (i) Twierdzenia 22 pociąga za sobą równoważność: $f(t) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in D_f$, przestaje być prawdziwe.

Z Propozycji 8, Twierdzenia 10 i Twierdzenia 22 otrzymujemy następujący

Wniosek 24. *Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi następujące warunki:*

(i) *istnieją takie liczby $t_0 \in [0,1]$ i $u_0 \in \mathbb{R}$, że $f(t_0) \neq 0$ i $g(u_0) \neq 0$;*

(ii) *$f(t) = 0$ w każdym punkcie $t \in [0,1]$ ciągłości funkcji f.*

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, przekształca przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) *$f \in BV$;*

(b) *g jest lokalnie ograniczona.*

Pokażemy teraz, że twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 22 jest prawdziwe przy pewnym dodatkowym założeniu nałożonym na moc zbioru D_f punktów nieciągłości f.

Twierdzenie 25. *Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ and $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi następujące warunki:*

(i) *istnieje taka liczba $u_0 \in \mathbb{R}$, że $g(u_0) \neq 0$;*

(ii) *zbiór D_f jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym i $f(t) = 0$ w każdym punkcie $t \in [0,1]$ ciągłości funkcji f.*

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $(t,u) \mapsto f(t)g(u)$, przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) *$f \in BV$;*

(b) *g jest lokalnie ograniczona.*

3 Ograniczoność: artykuł II

W przypadku autonomicznych operatorów superpozycji problemy związane z warunkami *na działanie* i warunkami lokalnej ograniczoności zostały rozwiązane przez M. Josephy'ego, który w 1981 roku podał następujące

Twierdzenie 26 ([22]). *Załóżmy, że F jest autonomicznym operatorem superpozycji, generowanym przez funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operator superpozycji F przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia lokalny warunek Lipschitza, tj. dla każdej liczby $r > 0$ istnieje taka liczba $L_r \geqslant 0$, że $|f(u) - f(w)| \leqslant L_r|u - w|$, dla $u, w \in [-r, r]$.*

Głównym celem artykułu II było udowodnienie, że jeśli operator superpozycji F odwzorowuje przestrzeń BV w siebie, to F jest automatycznie lokalnie ograniczony przy założeniu, że generator operatora F jest funkcją lokalnie ograniczoną. Dodajmy, że lokalna ograniczoność generatora jest warunkiem koniecznym dla lokalnej ograniczoności operatora superpozycji (zob. artykuł I, Proposition 2).

Zanim przejdziemy dalej wyjaśnimy krótko pomysł podejścia zaprezentowanego w pracy do dowodu głównego wyniku. Kluczowe są obserwacje są następujące: jeśli operator superpozycji przekształca przestrzeń BV w siebie, ale nie jest lokalnie ograniczony, to możliwe jest 'zlokalizowanie' niepożądanych właściwości do generatora f, tj. można znaleźć punkt $(t^*, u^*) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ i taki ciąg $(x_q)_{q\in\mathbb{N}}$ funkcji o wspólnie ograniczonej wariacji, że wykresy tych funkcji są 'ostatecznie zawarte' w dowolnym otwartym otoczeniu punktu (t^*, u^*) a odpowiadające im wariacje złożeń F i x_q rosną do nieskończoności (zob. Twierdzenie 30). Następnie możemy wykazać, że funkcje x_q mogą być zmodyfikowane tak, aby ich wariacje w pewnym przedziale wokół t^* były dowolnie małe. W ostatnim kroku wystarczy 'skleić' zmodyfikowane funkcje, aby uzyskać funkcję o ograniczonej wariacji, która po superpozycji z f nie należy do BV (patrz Twierdzenie 31).

Główny wynik artykułu, Twierdzenie 31, który stanowi rozwiązanie problemu lokalnej ograniczoności nieautonomicznych operatorów superpozycji, ma zasadnicze znaczenie dla teorii operatorów superpozycji w przestrzeni BV.

3.1 Wyniki wstępne

W tym podpunkcie przedstawiono kilka technicznych wyników, potrzebnych w dalszej części pracy do przełożenia własności nieautonomicznego operatora superpozycji na własności jego generatora. W całym podpunkcie zakładamy, że $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie ograniczoną, a F jest nieautonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez f.

Lemat 27. *Niech $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji rzeczywistych zdefiniowanych na $[0, 1]$ jest wspólnie ograniczony oraz że $\|F(x_n)\|_{BV} \geqslant n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje taka liczba $t_0 \in [0, 1]$, że dla każdego $\varepsilon > 0$:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{l_\varepsilon(t_0)}^{r_\varepsilon(t_0)} F(x_n) = +\infty. \tag{6}$$

Lemat 28. *Niech $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz załóżmy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji rzeczywistych określonych na $[0,1]$ jest wspólnie ograniczony oraz $\|F(x_n)\|_{BV}\geqslant n$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wtedy istnieje taka liczba $t_0\in[0,1]$ i podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że dla każdego $\varepsilon>0$:*

$$\lim_{k\to\infty}\bigvee_{l_\varepsilon(t_0)}^{r_\varepsilon(t_0)} F(x_{n_k}) = +\infty. \tag{7}$$

Nasze dalsze rozważania były oparte na następującym lemacie.

Lemat 29. *Niech $r>0$ i załóżmy, że $x_n\in B_{BV}(0,r)$ oraz $\|F(x_n)\|_{BV}\geqslant n$ dla $n\in\mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba $t_0\in[0,1]$, że dla każdej $\delta>0$ i $\varepsilon>0$ istnieje podciąg $(x_{n_q})_{q\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, punkt $u_0\in[-r,r]$ oraz ciąg skończonych zbiorów punktów $l_\varepsilon(t_0)\leqslant t_0^q< t_1^q<\ldots<t_{d_q}^q\leqslant r_\varepsilon(t_0)$, gdzie $q\in\mathbb{N}$, dla których zachodzi: $x_{n_q}(t_i^q)\in[u_0-\delta,u_0+\delta]$ dla $i=0,\ldots,d_q$ oraz*

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{i=1}^{d_q}\left|f(t_i^q,x_{n_q}(t_i^q))-f(t_{i-1}^q,x_{n_q}(t_{i-1}^q))\right| = +\infty. \tag{8}$$

Dowód Lematu 29 jest podobny do dowodu Lemma 2 z artykułu I.

Następne twierdzenie podaje warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator F odwzorowywał przestrzeń BV w siebie, ale nie był lokalnie ograniczony.

Twierdzenie 30. *Niech $f\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwzorowującą zbiory ograniczone w zbiory ograniczone, generującą operator F, który przekształca przestrzeń BV w siebie. Operator superpozycji F nie jest lokalnie ograniczony w BV wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczba $r>0$ oraz punkt $(t_0,u_0)\in[0,1]\times[-r,r]$, wraz z ciągiem $(x_q)_{q\in\mathbb{N}}$ funkcji należących do $B_{BV}(0,r)$, dla których dla dowolnych $\varepsilon>0$ i $\delta>0$ istnieje ciąg skończonych zbiorów punktów $l_\varepsilon(t_0)<t_0^q<t_1^q<\ldots<t_{d_q}^q<r_\varepsilon(t_0)$ spełniających warunek: $x_q(t_i^q)\in[u_0-\delta,u_0+\delta]$ dla $i=0,1,\ldots,d_q$ i dostatecznie dużych q, oraz*

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{i=1}^{d_q}\left|f(t_i^q,x_q(t_i^q))-f(t_{i-1}^q,x_q(t_{i-1}^q))\right| = +\infty.$$

3.2 Ograniczoność operatorów nieautonomicznych

Zgodnie z Propozycją 8, jeśli $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nie przekształca zbiorów ograniczonych w zbiory ograniczone, to nie można mieć nadziei, że operator superpozycji F, generowany przez f, będzie odwzorowywał zbiory ograniczone BV w zbiory ograniczone BV. Jednak jeśli f przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone, to zachodzi następujące

Twierdzenie 31. *Niech funkcja $f\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone i generuje nieautonomiczny operator superpozycji F. Jeśli operator superpozycji F przekształca przestrzeń BV w siebie, to jest on automatycznie lokalnie ograniczony.*

Z Twierdzenia 31 otrzymujemy

Wniosek 32. *Niech funkcja* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone i generuje nieautonomiczny operator superpozycji* F. *Jeśli istnieje ciąg funkcji* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *z przestrzeni* BV, *dla którego* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_0^1 x_n < +\infty$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \bigvee_0^1 F(x_n) = +\infty$, *to operator superpozycji* F *nie przekształca przestrzeni* BV *w siebie.*

Dzięki Twierdzeniu 31 możemy poprawić główny wynik artykułu I, Twierdzenie 11 w streszczeniu, podający warunki konieczne i dostateczne dla inkluzji $F(BV)\subset BV$.

Twierdzenie 33. *Niech* $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *będzie funkcją przekształcającą zbiory ograniczone w zbiory ograniczone i generującą nieautonomiczny operator superpozycji* F. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *nieautonomiczny operator superpozycji* F *przekształca przestrzeń* BV *w siebie;*

(ii) *dla każdej liczby* $r>0$ *istnieje taka stała* $M_r>0$, *że dla dowolnej liczby* $k\in\mathbb{N}$ *oraz każdego skończonego podziału* $0=t_0<\ldots<t_k=1$ *przedziału* $[0,1]$ *i każdego skończonego ciągu* $u_0,u_1,\ldots,u_k\in[-r,r]$ *spełniającego nierówność* $\sum_{i=1}^k |u_i-u_{i-1}|\leqslant r$, *spełnione są następujące nierówności:*

$$\sum_{i=1}^k \left|f(t_i,u_i)-f(t_{i-1},u_i)\right|\leqslant M_r \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^k \left|f(t_{i-1},u_i)-f(t_{i-1},u_{i-1})\right|\leqslant M_r.$$

4 Ciągłość: artykuł III

W artykule [9] udowodniono w prosty sposób, że jeśli generator $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego z nieskończonym promieniem zbieżności, to autonomiczny operator F, generowany przez f, jest ciągły. Ponadto w tym samym artykule wykazano, że jeśli założymy, że f jest klasy C^1, to autonomiczny operator superpozycji generowany przez f jest również ciągły. W przypadku operatora autonomicznego wiadomo jeszcze więcej: założenie, że generator jest klasy C^1 pociąga, że operator autonomiczny generowany przez f jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach przestrzeni BV (zob. [16, Corollary 6.64]), ale jeśli założymy, że generator f jest tylko lokalnie lipschitzowalny to operator autonomiczny może nie być jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach BV (zob. [16, Proposition 6.66]). W pracy [9] podano, że artykuł [28] P. Morse'a zawiera pewne twierdzenia dotyczące ciągłości pewnej klasy operatorów. Wydaje się, że do czasu opublikowania artykułu [9], praca Morse'a była zapomniana przez długi czas. Jak zauważają Autorzy pracy [9], twierdzenie Morse'a 7.1 łatwo implikuje, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowalną, to autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, jest ciągły. Dlatego też, biorąc pod uwagę główny wynik artykułu [22], jeśli autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełnia warunek działania $F(BV) \subset BV$, to operator F jest automatycznie ciągły i lokalnie ograniczony. Dodajmy, że wynik Morse'a z 1937 roku implikuje, że jeśli $f : [0,1] \times \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, jest ciągły na przestrzeni BV pod warunkiem, że $F(BV) \subset BV$. Jak zaobserwowano w [9], założenia w pracy Morse'a pociągają, że generator jest funkcją ciągłą. Ze względu na fakt istnienia ciągłych operatorów superpozycji działających w przestrzeni BV, które są generowane przez funkcje nieciągłe [9, Uwaga 5], kwestia ciągłości nieautonomicznego operatora superpozycji nadal pozostawała otwarta w przypadku ogólnym.

W pracy III przedstawiliśmy nowe dowody ciągłości autonomicznego operatora superpozycji dla generatora lokalnie lipschitzowalnego, dla nieautonomicznego operatora superpozycji z generatorem klasy C^1 oraz przedstawiliśmy warunki konieczne i wystarczające ciągłości nieliniowych operatorów superpozycji w przypadku ogólnym. W świetle wyników zawartych w pracy Morse'a [28] sensownie jest spytać o powód podawania nowego dowodu ciągłości autonomicznego operatora superpozycji w przypadku generatora lokalnie lipschitzowalnego oraz ciągłości nieautonomicznego operatora superpozycji, gdy generator jest różniczkowalny w sposób ciągły. Zasadniczo istnieją trzy powody, aby to zrobić: 1) jak wspomniano w pracy [9], dowód Morse'a zajmuje ok. 30 stron tekstu a nasze podejście jest znacznie krótsze; 2) dowód Morse'a wykorzystuje znacznie więcej koncepcji matematycznych niż nasze stosunkowo proste dowody; uważamy, że warto przedstawić (stosunkowo) przystępne dowody rezultatów istotnych dla całej teorii; 3) dodatkowo udowodniliśmy, że jeśli generator jest klasy C^1, to operator superpozycji jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach BV - jest to nowy wynik i nie wynika z twierdzenia Morse'a 7.1. Jak wspomniano, ciągłość autonomicznego operatora jest automatyczna, jeśli operator przekształca przestrzeń BV w siebie. Sytuacja jest inna w przypadku nieautonomicznych operatorów superpozycji. Jak wiemy, jeśli generator f jest klasy C^1, to nieautonomiczny operator superpozycji generowany przez f jest ciągły. Jeśli jednak osłabimy założenie różniczkowalności generatora f a 'jedynie' założymy, że generator f jest funkcją lokalnie lipschitzowalną, to może się zdarzyć, że nieautonomiczny operator F, generowany przez f, nie jest ciągły - ilustrujemy taką możliwość kontrprzykładem. Ostatni wynik udowodniony w pracy podaje warunki konieczne

konieczne i dostateczne ciągłości nieautonomicznego operatora superpozycji w przypadku ogólnym, w którym nie nakłada się żadnych ograniczeń na generator f, z tym zastrzeżeniem, że nieautonomiczny operator superpozycji F generowany przez f, przekształca przestrzeń BV w siebie. Okazuje się, że warunki te przyjmują postać nierówności podobnych do warunków na działanie przedstawionych w artykule I.

4.1 Przypadek autonomiczny

Następujący prosty

Lemat 34. *Niech operator superpozycji F będzie generowany przez funkcję $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lub $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ oraz takie funkcje $\overline{x}$, $\overline{y} \in BV$, że $\|\overline{x} - \overline{y}\|_{BV} < \delta$ i $\|F(\overline{x}) - F(\overline{y})\|_{BV} > \varepsilon$. Wtedy istnieją dwie ciągłe funkcje kawałkami liniowe x, y spełniające nierówności: $\|x\|_{BV} \leqslant \|\overline{x}\|_{BV}$, $\|y\|_{BV} \leqslant \|\overline{y}\|_{BV}$, $\|x - y\|_{BV} < \delta$ oraz $\|F(x) - F(y)\|_{BV} > \varepsilon$. Ponadto istnieje taki skończony podział $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$, przedziału $[0,1]$, że $x(t_i) = \overline{x}(t_i)$, $y(t_i) = \overline{y}(t_i)$, oraz $x(t) = a_i^x t + b_i^x$, $y(t) = a_i^y t + b_i^y$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, gdzie a_i^x, a_i^y, b_i^x, b_i^y są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $i = 1, \ldots, k$.*

okazał się odgrywać ważną rolę ważną rolę w dowodach faktów prezentowanych w tym i kolejnym podpunkcie. Jego pierwszą konsekwencją było

Twierdzenie 35. *Niech $f \in C^1((-a, 1+a)\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a > 0$. Autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach przestrzeni BV.*

Poniższy przykład pokazuje, że założenie 'f jest klasy C^1' jest rozsądne.

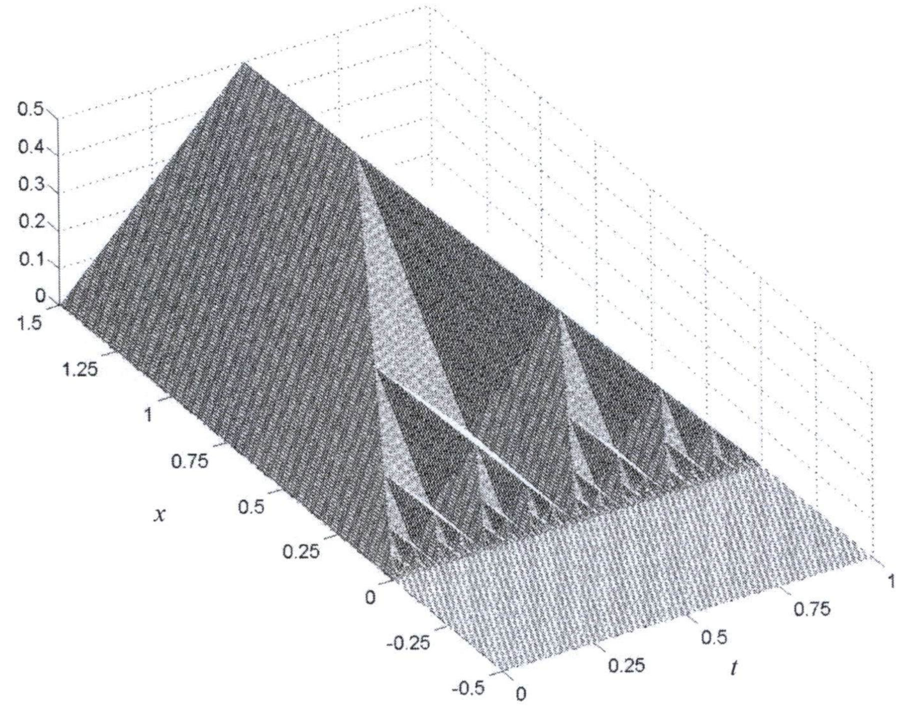
Przykład 36. Niech funkcja $g : [0,1]\times[1/2,1] \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana następująco: dla $(t,x) \in [0,1]\times[1/2,1]$

$$g(t,x) := \begin{cases} t & \text{, gdy } t \leqslant 1/2,\ x \geqslant 2t, \\ -t + x & \text{, gdy } t \leqslant 1/2,\ x \leqslant 2t, \\ t + x - 1 & \text{, gdy } t \geqslant 1/2,\ x \leqslant 2 - 2t, \\ 1 - t & \text{, gdy } t \geqslant 1/2,\ x \geqslant 2 - 2t. \end{cases} \tag{9}$$

Funkcja g jest lipschitzowalna ze stałą 2. Niech kolejna funkcja $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana następująco: dla $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$

$$f(t,x) := \begin{cases} 1/2 - |t - 1/2| & \text{, gdy } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{, gdy } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2^q} g\left(2^q(t - \frac{1}{2^q}\left\lfloor \frac{t}{1/2^q} \right\rfloor), 2^q x\right) & \text{, gdy } x \in [1/2^{q+1}, 1/2^q],\ q \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{10}$$

Nie jest trudnym, choć żmudnym, sprawdzić, że f jest lipschitzowalna (zob. Rysunek 1 poniżej). Zauważmy, że nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, przekształca przestrzeń BV w siebie - jest to prosta konsekwencja faktu, że f jest lipschitzowalna.
Ponieważ $F(\theta)(t) = f(t,0) = 0$, $t \in [0,1]$, i stąd $||F(\theta)||_{BV} = 0$. Niech $x^q(t) := 1/2^q$, $t \in$



Rysunek 1: Fragment wykresu funkcji f zdefiniowanej w przykładzie 4.

$[0,1]$, $q \in \mathbb{N}_0$. Zachodzi $\|x^q - \theta\|_{BV} = \|x^q\|_{BV} = 1/2^q$, $q \in \mathbb{N}_0$, a zatem $x^q \to \theta$ w BV, gdy $q \to +\infty$. Jednocześnie, dla każdego $q \in \mathbb{N}_0$, mamy równości $x^q(0) = 0$ oraz

$$\bigvee_0^1 F(x^q) = \bigvee_0^1 f(\cdot, 1/2^q) = 1.$$

Jasne jest, że nie może zachodzić równość $\lim_{q\to+\infty} F(x^q) = F(\theta)$, choć mamy $\lim_{q\to+\infty} x^q = \theta$. Zauważmy, że generator f skonstruowany w przykładzie jest lipschitzowalny ze względu na obie zmienne. Nie wystarcza to jednak dla zapewnienia ciągłości operatora F, generowanego przez f.

4.2 Przypadek autonomiczny

Załóżmy, że operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przekształca przestrzeń BV w siebie. Jest wiadomo, że w tym przypadku f jest funkcją lokalnie lipschitzowalną [22]. Jest również prawdą, że lokalna lipschitzowalność generatora gwarantuje ciągłość generowanego operatora, co jest przedstawione w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie 37. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lokalnie lipschitzowalną. Autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, jest ciągły.*

4.3 Warunki konieczne i dostateczne ciągłości operatora w przypadku ogólnym

Głównym wynikiem zawartym w pracy III jest następujące

Twierdzenie 38. *Załóżmy, że $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że operator superpozycji F, generowany przez f, przekształca przestrzeń BV w siebie. Niech $x \in BV$ będzie ustaloną funkcją. Następujące warunki są równoważne:*

(38.1) *operator F jest ciągły w punkcie x,*

(38.2) *dla każdego $t \in [0,1]$ funkcja $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(t,u) - f(t,x(t))$ jest ciągła w punkcie $u = x(t)$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, każdego podziału $0 = t_0 < \ldots < t_k = 1$ przedziału $[0,1]$ oraz każdego skończonego ciągu $u_0, u_1, \ldots, u_k \in [-\delta, \delta]$ spełniającego nierówność $\sum_{i=1}^{k} |u_i - u_{i-1}| \leqslant \delta$, zachodzi*

$$\sum_{i=1}^{k} |[f(t_i, u_i + x_i) - f(t_{i-1}, u_i + x_{i-1})] - [f(t_i, x_i) - f(t_{i-1}, x_{i-1})]| \leqslant \varepsilon, \text{ oraz}$$

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_{i-1}, u_i + x_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1} + x_{i-1})| \leqslant \varepsilon,$$

gdzie $x_i := x(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

PIOTR MAĆKOWIAK

Literatura

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[2] J. Appell, J. Banaś, and N. Merentes, *Bounded variation and around*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 17, De Gruyter, Berlin, 2014.

[3] J. Appell, N. Guanda, N. Merentes, and J.L. Sanchez, *Boundedness and continuity properties of nonlinear composition operators: a survey*, Communications on Pure and Applied Analysis **15** (2011), 153-182.

[4] J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, 1990.

[5] F. Brauer, *Constant rate harvesting of populations governed by Volterra integral equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **56** (1976), 18–27.

[6] D. Bugajewska, *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation, revisited*, Mathematical and Computer Modelling **52** (2010), 791-796.

[7] D. Bugajewska, *A note on differential and integral equations in the spaces of functions of Λ-bounded variation*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 4213–4221.

[8] D. Bugajewski, *On BV-solutions of some nonlinear integral equations*, Integral Equations Operator Theory **46** (2003), 387–398.

[9] D. Bugajewski, J. Gulgowski, and P. Kasprzak, *On continuity and compactness of some nonlinear operators in the spaces of functions of bounded variation*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **195** (2016), 1513–1530.

[10] A. Chambolle and P. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numerische Mathematik **76** (1997), 167–188.

[11] A. Chambolle, V. Caselles, D. Cremers, M. Novaga, and T. Pock, *An introduction to total variation for image analysis*, Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, vol. 9, Walter de Gruyter, Berlin, 2010, pp. 263–340.

[12] T. F. Chan and J. Shen, *Image processing and analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005. Variational, PDE, wavelet, and stochastic methods.

[13] C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, *BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets*, Set-Valued Analysis **3** (1995), 381–399.

[14] V. G. Čelidze and A. G. Džvaršeĭšvili, *The Theory of the Denjoy Integral and Some Applications*, Series in Real Analysis, vol. 3, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989. Translated from the Russian, with a preface and an appendix by P. S. Bullen.

[15] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1955.

[16] R.M. Dudley and R. Norvaiša, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[17] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[18] P. C. Hansen, J. G. Nagy, and D. P. O'Leary, *Deblurring images*, Fundamentals of Algorithms, vol. 3, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006.

[19] H. Harris and D. Laibson, Econometrica **69** (2001), 935–957.

[20] S. I. Hudjaev and A. I. Vol′pert, *Analysis in Classes of Discontinuous Functions and Equations of Mathematical Physics*, Mechanics: Analysis, vol. 8, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.

[21] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris **2** (1881), 228–230.

[22] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proceedings of the American Mathematical Society **83** (1981), 354–356.

[23] Y. Kim and L. A. Vese, *Image recovery using functions of bounded variation and Sobolev spaces of negative differentiability*, Inverse Problems and Imaging **3** (2009), 43–68.

[24] A. G. Ljamin, *On the acting problem for the Nemytskij operator in the space of functions of bounded variation*, 11^{th} School Theory Oper. Function Spaces, Chel'jabinsk (1986), 63–63 (in Russian).

[25] V. Mazya, *Sobolev Spaces: with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 342, Springer, 2011.

[26] P. Maćkowiak, *A counterexample to Ljamin's theorem*, Procedings of the American Mathematical Society **142** (2014), 1773–1776.

[27] Y. Meyer, *Oscillating Patterns in Image processing and Nonlinear Evolution Equations*, University Lecture Series vol. 22, AMS, 2002.

[28] A.P. Morse, *Convergence in variation and related topics*, Transactions of the American Mathematical Society **41** (1937), 48–83.

[29] A. Piskorek, *Równania całkowe*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1980.

[30] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D **60** (1992), 259–268.

[31] D. Waterman, *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Studia Mathematica **44** (1972), 107–117.

[32] D. Waterman, *On Λ-bounded variation*, Studia Mathematica **57** (1976), 33-45.