Załącznik 2

Autoreferat

wraz z informacjami o osiągnięciach dydaktycznych, popularyzatorskich oraz współpracy międzynarodowej w języku polskim

Spis treści

1. Przebieg nauki i zatrudnienie 3
2. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 Ustawy o Stopniach Naukowych i Tytule Naukowym oraz o Stopniach i Tytule w Zakresie Sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) 4
2.1. Lista prac naukowych wchodzących w skład osiągnięcia naukowego 4
2.2. Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego 4
2.2.1. Wprowadzenie 5
2.2.2. Nieliniowe operatory całkowe i nieliniowe operatory superpozycji w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana 6
2.2.3. Rozwiązania nieliniowych równań całkowych typu BV_φ. Nieliniowe operatory superpozycji w przestrzeniach funkcji o ograniczonej φ-wariacji 12
2.2.4. Nieliniowe operatory całkowe, nieliniowe operatory superpozycji oraz operatory splotu w przestrzeniach funkcji o ograniczonej Λ-wariacji. 19
3. Dorobek naukowy niewchodzący w skład rozprawy habilitacyjnej 25
3.1. Lista prac naukowych niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego 25
3.2. Opis dorobku naukowego niewchodzącego w skład osiągnięcia naukowego, o którym mowa w art. 16 ust.2 26
3.2.1. Nieliniowe równania różniczkowe i całkowe w przestrzeniach Banacha 26
3.2.2. Równania różniczkowe w przestrzeniach lokalnie wypukłych 31
3.2.3. Nieliniowe równania różniczkowe wykorzystujące całki nieabsolutnie zbieżne 32
3.2.4. Równania różniczkowe zawierające pochodne rzędu ułamkowego 35
3.2.5. Uogólnione warunki Carathéodory'ego 36
4. Informacje dodatkowe 38
4.1. Wskaźniki dodatkowe 38
4.2. Udział w projektach badawczych 38
4.3. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych 38

4.4. Wykłady wygłaszane w Uniwersytetach lub innych instytucjach naukowych 39
4.5. Udział w konferencjach bez wygłoszenia odczytu 40
4.6. Udział w komitetach organizacyjnych 40
4.7. Udział w komitetach redakcyjnych czasopism 40
4.8. Recenzje projektów badawczych 40
4.9. Recenzje dla międzynarodowych i krajowych czasopism naukowych 40
4.10. Rodzaje prowadzonych zajęć dydaktycznych 41
Literatura 41

1. Przebieg nauki i zatrudnienie

Studia wyższe	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
kierunek	matematyka
specjalność	matematyka teoretyczna
Tytuł pracy magisterskiej	Twierdzenie o funkcji uwikłanej i jego zastosowania
Promotor	prof. dr hab. Stanisław Szufla
Data otrzymania stopnia magistra	18.05.1995

Studia doktoranckie	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu Wydział Matematyki i Informatyki
Tytuł rozprawy doktorskiej	Topologiczne własności zbiorów rozwiązań pewnych zagadnień dla równań różniczkowych
Promotor	prof. dr hab. Stanisław Szufla
Data otrzymania stopnia naukowego doktora	8.10.1999

Przebieg kariery zawodowej

Miejsce pracy	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Stanowisko	adiunkt (od 1.11.1999 do chwili obecnej)

2. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 Ustawy o Stopniach Naukowych i Tytule Naukowym oraz o Stopniach i Tytule w Zakresie Sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

2.1. **Lista prac naukowych wchodzących w skład osiągnięcia naukowego.** [1]

Zagadnienia istnienia rozwiązań nieliniowych równań całkowych oraz nieliniowe operatory superpozycji w klasach funkcji o ograniczonej wariacji różnych typów

[15] D. Bugajewska, D. Bugajewski, i H. Hudzik, *BV_ϕ-solutions of nonlinear integral equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **287** (2003), 265-278.

[16] D. Bugajewska i D. Bugajewski, *On nonlinear integral equations and nonabsolute convergent integrals*, Dynamic Systems and Applications, Tom specjalny: Advances in Integral Equations **14** (2005), 135-148.

[18] D. Bugajewska i D. O'Regan, *On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation*, Acta Mathematica Hungarica **107(4)** (2005), 295-306.

[20] D. Bugajewska, D. Bugajewski, i G. Lewicki, *On nonlinear integral equations in the space of functions of bounded generalized φ-variation*, Journal of Integral Equations and Applications **21(1)** (2009), 1-20.

[22] D. Bugajewska, *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation, revisited*, Mathematical Computer Modelling **52** (2010), 791-796.

[23] ______, *A note on differential and integral equations in the spaces of functions of Λ-bounded variation*, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications **75** (2012), 4213-4221.

2.2. **Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego.**

[1] Numery prac odpowiadają numeracji ze spisu publikacji

2.2.1. *Wprowadzenie.* Wyniki wchodzące w skład przedłożonej rozprawy habilitacyjnej dotyczą przede wszystkim problemów istnienia i jednoznaczności rozwiązań klasycznych nieliniowych równań całkowych w klasach funkcji o ograniczonej wariacji różnych typów. Przede wszystkim należy tu wymienić klasyczną wariację w sensie Jordana, φ-wariację w sensie Younga oraz tak zwaną Λ-wariację wprowadzoną przez Watermana. Podkreślmy, że w bogatej teorii funkcji rzeczywistych istnieje wiele typów wariacji. Wymienione typy wariacji są podstawowe, a funkcje o ograniczonej wariacji każdego z tych rodzajów posiadają interesujące własności. Ponadto rozprawa habilitacyjna zawiera również wyniki dotyczące nieliniowych operatorów superpozycji, określonych na przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji powyżej wymienionych typów.

Rozważanie rozwiązań w klasach funkcji o ograniczonej wariacji wydaje się być interesujące przynajmniej z kilku powodów. Po pierwsze, zwróćmy uwagę na fakt, że rozwiązania klasycznego zagadnienia Cauchy'ego dla równania pierwszego rzędu, określonego na zwartym przedziale w $\mathbb{R}$, których istnienie gwarantuje twierdzenie Peano, są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana (przynajmniej lokalnie). Ta własność zostaje zachowana, jeśli będziemy rozważali rozwiązania tego równania których istnienie wynika z klasycznego twierdzenia Carathéodory'ego (zob. [CL], Th.).

Po drugie, rozwiązania szeregu równań, które opisują konkretne zjawiska fizyczne okazują się być funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Dla przykładu, można udowodnić, że równanie całkowe

$$x(t) = \omega^2 \int_0^1 G(t,s)\rho(s)x(s)ds + \int_0^1 G(t,s)q(s)ds, \quad t \in [0,1],$$

gdzie

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & \text{dla } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

opisujące amplitudę drgań wymuszonych struny (zob. [P2]), przy odpowiednich założeniach o funkcjach ρ, q oraz stałej ω, posiada dokładnie jedno rozwiązanie, będące funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana na przedziale $[0,1]$. Fakt ten wynika z twierdzeń udowodnionych w pracy [B1], które wydają się być podstawowymi wynikami dotyczącymi istnienia i jedyności rozwiązań nieliniowych równań całkowych o ograniczonej wariacji w sensie Jordana.

Motywacja do badania rozwiązań nieliniowych równań całkowych w klasie funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana wypływa również z teorii całek nieabsolutnie zbieżnych. Wiadomo mianowicie, że jeśli $h : I \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją całkowalną w sensie Denjoy-Perrona (lub równoważnie Henstocka-Kurzweila), gdzie I oznacza tutaj zwarty przedział zawarty w $\mathbb{R}$, to $h\varphi$ jest również całkowalna w tym sensie, jeśli $\varphi : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana (zob. [ČD]).

Inne motywacje do szukania rozwiązań w klasach funkcji o ograniczonej wariacji ogólniejszego typu zostaną wymienione w Paragrafie 2.2.4.

Wyniki wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej zostały podzielone na trzy grupy. W Paragrafie 2.2.2 przedstawiam główne wyniki dotyczące nieliniowych równań całkowych oraz nieliniowych operatorów superpozycji w klasie funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, zawarte w pracach [22] oraz [16]. Paragraf 2.2.3 zawiera wyniki pochodzące z prac [15] i [20], które dotyczą rozwiązań nieliniowych równań całkowych Hammersteina oraz Volterry-Hammersteina w przestrzeni funkcji o ograniczonej φ-wariacji w sensie Younga oraz w przestrzeni funkcji o ograniczonej uogólnionej φ-wariacji, a także wyniki dotyczące autonomicznego operatora superpozycji w tej klasie funkcji. W Paragrafie 2.2.4 przedstawiam główne wyniki dotyczące istnienia oraz istnienia i jedyności globalnych oraz lokalnych rozwiązań nieliniowych równań całkowych Hammersteina oraz Volterry-Hammersteina w przestrzeni funkcji o ograniczonej Λ-wariacji. Ponadto w paragrafie tym przedstawiam wyniki dotyczące operatora splotu oraz nieautonomicznego operatora superpozycji w tej klasie funkcji, wraz z ich zastosowaniami do badania liniowego oraz semiliniowego równania różniczkowego. Wyniki omawiane w tym paragrafie pochodzą z prac [18] oraz [23].

2.2.2. *Nieliniowe operatory całkowe i nieliniowe operatory superpozycji w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana.* Niech $I = [0, a]$, $a > 0$, będzie zwartym przedziałem zawartym w $\mathbb{R}$ i niech $x : I \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Przypomnijmy, że liczbę

$$\bigvee_0^a(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|,$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ przedziału I, nazywamy wariacją (lub wahaniem) w sensie Jordana funkcji x na przedziale I. Oznaczmy przez $BV = BV(I)$ przestrzeń liniową wszystkich funkcji $x : I \to \mathbb{R}$ takich, że $\bigvee\limits_0^a(x) < +\infty$, wyposażoną w normę

$$\|x\|_{BV} = |x(0| + \bigvee_0^a(x).$$

Wiadomo, że BV wraz z powyżej określoną normą jest przestrzenią Banacha. Elementy tej przestrzeni będziemy nazywali BV-funkcjami, natomiast rozwiązania równań całkowych, należące do tej przestrzeni, będziemy nazywali BV-rozwiązaniami. W dalszym ciągu dla prostoty będziemy przyjmowali $a = 1$.

Dla danej funkcji $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, definiujemy następującym wzorem

$$F(x)(t) = f(t, x(t)),$$

gdzie x jest funkcją o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną na przedziale $[0, 1]$. W przypadku kiedy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, operator F generowany przez f, nazywamy autonomicznym operatorem superpozycji.

W 1981 roku Josephy ([J2]) udowodnił, że autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f = f(u)$, przekształca przestrzeń $BV(I)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia lokalny warunek Lipschitza, to znaczy, gdy spełniona jest następująca nierówność

$$|f(u) - f(v)| \leqslant k(r)|u - v|, \quad (|u|, |v| \leqslant r),$$

gdzie $k(r)$ jest stałą nieujemną, zależną od r.
Z kolei warunki dostateczne na to, by nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał przestrzeń $BV(I)$ w siebie, podawało następujące twierdzenie pochodzące od Ljamina.

Twierdzenie 1 ([L], ([AZ], Theorem 6.12))**.** *Załóżmy, że funkcja $f(s, \cdot)$ spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $s \in [0, 1]$ oraz, że funkcja $f(\cdot, u)$ posiada ograniczoną wariację w sensie Jordana na przedziale $[0, 1]$, jednostajnie względem $u \in \mathbb{R}$.*
Wówczas nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, przekształca przestrzeń $BV(I)$ w siebie oraz jest lokalnie ograniczony, to znaczy przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone.

W pracy [22] wysunęłam przypuszczenie, że powyższe twierdzenie może nie być prawdziwe. Przypuszczenie to potwierdził Maćkowiak w pracy [M], gdzie opierając się na pewnym moim pomyśle, podał następujący kontrprzykład.

Niech funkcja $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie zdefiniowana następująco:

$$f(t,u)=\begin{cases}0, & \forall n\in\{2,3,\ldots\}:\ t\neq c_n \text{ lub } u\notin I_n,\\ \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{|u-c_n|}{w_n}\right), & \exists n\in\{2,3,\ldots\}:\ t\neq c_n \text{ lub } u\in I_n,\end{cases}$$

gdzie $c_n=1-\dfrac{1}{n}$, $w_n=\dfrac{1}{2n}$, $I_n=(c_n-w_n,c_n+w_n)$, dla $n=2,3,\ldots$. Dla dowolnego $t\in[0,1]$, funkcja $f(t,\cdot)$ spełnia warunek Lipschitza jednostajnie względem x, ze stałą Lipschitza nie większą niż 2. Ponadto $\bigvee_0^1(f(\cdot,u))\leqslant 22$ dla dowolnego $u\in\mathbb{R}$. Jednakże nieautonomiczny operator superpozycji, generowany przez funkcję f, nie odwzorowuje przestrzeni $BV(I)$ w siebie. Istotnie, niech $x(t)=t$ oraz $g(t)=f(t,x(t))$ dla $t\in[0,1]$. Oczywiście $\bigvee_0^1(x)=1$ oraz

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{jeśli } t=c_n,\\ 0, & \text{jeśli } t\neq c_n,\end{cases}$$

a zatem $\bigvee_0^1(g)=+\infty$.

W pracy [22] podałam prosty warunek dostateczny na to, aby nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał przestrzeń $BV(I)$ w siebie.

Twierdzenie 2 ([22], Theorem 1)**.** *Załóżmy, że funkcja $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(t,u)\to f(t,u)$, spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $t\in[0,1]$, oraz, że dla dowolnych liczb rzeczywistych u_i, $i=0,1,\ldots,n-1$, spełniona jest następująca nierówność*

$$\sup_{\Pi}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i,u_{i-1})-f(t_{i-1},u_{i-1})|\leqslant M, \tag{1}$$

gdzie $M>0$ oraz Π jest dowolnym skończonym podziałem przedziału $[0,1]$. Wówczas nieautonomiczny operator superpozycji, generowany przez funkcję f, przekształca przestrzeń $BV(I)$ w siebie i jest lokalnie ograniczony.

Dokonując kosmetycznych zmian w dowodzie Twierdzenia 2 można udowodnić następujące jego uogólnienie

Twierdzenie 3. *Niech funkcja $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

1^0 *f spełnia lokalny warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $t\in[0,1]$;*

2^0 *dla dowolnego* $r > 0$ *istnieje stała* $M_r > 0$ *taka, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*, każdego podziału* $0 = t_o < \ldots < t_n = 1$ *przedziału* $[0, 1]$ *oraz dowolnych liczb* $u_0, \ldots, u_{n-1} \in [-r, r]$*, spełniona jest implikacja*

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u_i - u_{i-1}| \leqslant r \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(t_i, u_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| < M_r. \tag{2}$$

Wówczas nieautonomiczny operator superpozycji F*, generowany przez funkcję* f*, przekształca przestrzeń* $BV(I)$ *w siebie i jest lokalnie ograniczony.*

Chciałbym dodać, że w oparciu o przesłane mi przez prof. J. Appella pewne rozdziały monografii J. Appell at al., "Bounded Variation and Around", De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 17, mającej ukazać się w listopadzie bierzącego roku, mogę stwierdzić, iż w rozdziale 6 tejże monografii znajduje się w szczególności szerokie omówienie wyników z pracy [22] wraz z ich dowodami.

Okazuje się, że ten prosty warunek (2) (łatwo sprawdzalny dla różnych, szerokich klas odwzorowań (zob. [22], Example 1, Example 3)) posiada fundamentalne znaczenie w teorii nieautonomicznych operatorów superpozycji działających w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. W 2013 roku D. Bugajewski udowodnił, że jeśli nieautonomiczny operator superpozycji F generowany przez f, przekształca przestrzeń $BV(I)$ w siebie i jest lokalnie ograniczony oraz dodatkowo założy się, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej (co jest bardzo często pojawiającym się założeniem w teorii równań różniczkowych i całkowych), to warunek (2) jest konieczny na to, by nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał przestrzeń funkcji $BV(I)$ w siebie. Dokładniej, zachodzi następujące

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że funkcja* $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $(t, u) \to f(t, u)$*, spełnia lokalny warunek Lipschitza na* $\mathbb{R}$*, jednostajnie względem* $t \in [0, 1]$ *oraz, że nieautonomiczny operator superpozycji* F*, generowany przez funkcję* f*, przekształca przestrzeń* $BV(I)$ *w siebie oraz jest lokalnie ograniczony. Wówczas dla każdego* $r > 0$*, istnieje* $M_r > 0$ *takie, że dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*, każdego podziału* $0 = t_0 < \ldots < t_k = 1$ *przedziału* $[0, 1]$ *oraz dowolnych* $u_0, \ldots, u_{k-1} \in [-r, r]$*, spełniony jest warunek* (2)*.*

Twierdzenie 2 może być na przykład użytecznym narzędziem do badania BV-rozwiązań klasycznych nieliniowych równań całkowych, takich jak nieliniowe równanie całkowe Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \nu \int_I K(t,s) f(s, x(s)) ds, \quad \text{dla } t \in I \text{ oraz } \nu \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

a także nieliniowe równanie całkowe Volterry-Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s) f(s, x(s))\, ds, \quad \text{dla } t \in I, \tag{4}$$

gdzie symbole "$\int_I$" oraz "$\int_0^t$" oznaczają całki Lebesgue'a, odpowiednio na przedziale I oraz $[0,t]$.

Załóżmy, że

3^0 $g : I \to \mathbb{R}$ jest BV-funkcją;

4^0 $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,u) \to f(t,u)$ spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $t \in I$, oraz warunek (1);

5^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$, $(t,s) \to K(t,s)$ jest funkcją taką, że $\bigvee_0^1 (K(\cdot, s)) \leqslant P(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $P : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a oraz $K(t,\cdot)$ jest również całkowalna w sensie Lebesgue'a dla każdego $t \in I$.

Twierdzenie 5 ([22], Theorem 3)**.** *Przy powyższych założeniach istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że dla każdego $\nu \in \mathbb{R}$ takiego, że $|\nu| < \rho$, równanie* (3) *posiada dokładnie jedno BV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale I.*

Rozważmy teraz równanie (4). Przyjmijmy, że założenia 3^0 oraz 4^0 z poprzedniego twierdzenia są spełnione. Załóżmy również, że

6^0 $K : T \to \mathbb{R}$, gdzie $T = \{(t,s) : \; 0 \leqslant t \leqslant 1, \; 0 \leqslant s \leqslant t\}$ jest taką funkcją, że $|K(s,s)| + \bigvee_0^1 (K(\cdot, s)) \leqslant m(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $m : I \to \mathbb{R}_+$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz $K(t,\cdot)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0,t]$ dla każdego $t \in I$.

Przy powyższych założeniach można udowodnić następujące

Twierdzenie 6 ([22], Theorem 4)**.** *Jeśli spełnione są założenia* 3^0*,* 4^0 *oraz* 6^0*, to istnieje przedział $J \subset I$ taki, że równanie* (4) *posiada jedyne BV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale J.*

Wobec założenia 4^0, które w rozważanej sytuacji jest naturalne, zasada kontrakcji Banacha jest wystarczającym narzędziem w dowodach Twierdzenia 5 oraz Twierdzenia 6.

Praca [16] to jedyna praca wchodząca w skład rozprawy habilitacyjnej, w której rozważane nieliniowe równania całkowe są określone przy użyciu nieabsolutnie zbieżnej całki Denjoy-Perrona (lub równoważnie całki Henstocka-Kurzweila). Jej celem było w szczególności znalezienie takich warunków, które narzucone na jądra rozważanych równań gwarantowałyby istnienie i jedyność BV-rozwiązań. Niestety założenia, które są przyjęte w Twierdzeniu 7 i Twierdzeniu 8 są bardziej skomplikowane i mniej eleganckie niż odpowiednie założenia w Twierdzeniu 5 i Twierdzeniu 6. Dodajmy jednak, że założenia te są ilustrowane w pracy odpowiednimi przykładami ([16], Example 1, Remark 3).

Rozważmy nieliniowe równanie całkowe Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \nu \int\limits_I K(t,s) f(x(s))ds, \quad \text{dla } t \in I, \tag{5}$$

oraz nieliniowe równanie całkowe Volterry-Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \int\limits_0^t K(t,s) f(x(s))ds, \quad \text{dla } t \in I, \tag{6}$$

gdzie $I = [0,a]$ oraz symbole "$\int\limits_I$" oraz "$\int\limits_0^t$" oznaczają całki Denjoy-Perrona (krótko: (D-P)-całki), odpowiednio na przedziale I oraz $[0,t]$. Załóżmy, że:

7^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że autonomiczny operator superpozycji, generowany przez funkcję f, działa w przestrzeni $BV(I)$ oraz dla dowolnego $r > 0$ istnieje stała $L_r > 0$ taka, że

$$\|f(x) - f(y)\|_{BV} \leqslant L_r \|x - y\|_{BV}, \quad x, y \in B(0,r),$$

gdzie $B(0,r)$ oznacza kulę domkniętą o środku w zerze i promieniu r w przestrzeni $BV(I)$;

8^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t,\cdot)$ jest całkowalna w sensie Denjoy-Perrona dla każdego $t \in I$ oraz

$$\bigvee_0^a \left(\int\limits_I K(t,s)ds \right) < +\infty;$$

9^0 istnieje liczba $c > 0$ taka, że

$$\sup_{0=t_0<\ldots<t_n=a} \sum_{i=1}^n O\left(\int\limits_0^s (K(t_i,z) - K(t_{i-1},z))dz; I \right) < c,$$

gdzie $O(\cdot; I)$ oznacza oscylację rozważanej funkcji na przedziale I.

Chciałabym tu wyjaśnić, że w pracy [16] założenie 7^0 omyłkowo zawiera globalny warunek Lipschitza, choć w dowodzie ewidentnie wykorzystuje się warunek typu lokalnego.

Twierdzenie 7 ([16], Theorem 3)**.** *Jeśli spełnione są założenia* 1^0*,* 7^0-9^0*, to istnieje liczba* $\rho > 0$ *taka, że dla dowolnego* $\nu \in \mathbb{R}$ *takiego, że* $|\nu| < \rho$*, równanie* (5) *posiada dokładnie jedno BV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale* I*.*

Przechodząc do równania (6) wprowadzamy następujące założenia

10^0 $T = \{(t,s) : 0 \leqslant t \leqslant a,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ oraz $K : T \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t,\cdot)$ jest całkowalna w sensie Denjoy-Perrona na przedziale $[0,t]$ dla każdego $t \in I$, oraz że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $d \in (0,\delta)$:
$$\bigvee_0^d \left(\int_0^t K(t,s)ds \right) < \varepsilon;$$

11^0 dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $d \in (0,\delta)$:
$$\sup_{0=t_0<\ldots<t_n=d} \sum_{i=1}^n O\left(\int_0^s K(t_i,z)dz - \int_0^{\min(t_{i-1},s)} K(t_{i-1},z)dz; [0,t_i] \right) < \varepsilon.$$

Zachodzi następujące

Twierdzenie 8 ([16], Theorem 6)**.** *Przy założeniach* 1^0*,* 7^0*,* 10^0 *i* 11^0 *istnieje przedział* $J \subset I$ *taki, że równanie* (6) *posiada jedyne BV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale* J*.*

Dowody Twierdzenia 7 i Twierdzenia 8 są oparte na zasadzie kontrakcji Banacha, choć są one bardziej złożone technicznie w porównaniu do odpowiednich dowodów Twierdzenia 5 i Twierdzenia 6.

W pracy [16] zostały również udowodnione twierdzenia dotyczące istnienia i jednoznaczności ciągłych BV-rozwiązań równania (5) i (6). Ponadto w pracy tej były również rozważane równania postaci (3) i (4) z nieautonomicznym operatorem superpozycji.

2.2.3. *Rozwiązania nieliniowych równań całkowych typu* BV_φ*.*
Nieliniowe operatory superpozycji w przestrzeniach funkcji o ograniczonej φ*-wariacji.* Pojęcie φ-wariacji zostało wprowadzone przez Younga [Y1] w 1937 roku w związku z badaniami nad zachowaniem się szeregów Fouriera (zob. również [Y2]). Pojęcie to jest jednym z najbardziej owocnych uogólnień klasycznej wariacji w sensie Jordana. Przypomnijmy, że

przestrzeń funkcji o ograniczonej φ-wariacji była badana przez Musielaka i Orlicza (zob. [MO1]) oraz przez Leśniewicza i Orlicza (zob. [LO]), z punktu widzenia klasycznych pojęć analizy funkcjonalnej. Dodajmy również, że obszerną analizę zastosowań φ-wariacji w teorii szeregów Fouriera można znaleźć w pracach Cohena (zob. [C1, C2]). Zaznaczmy także, że uogólnienie wspomnianego wyniku Josephy'ego [J2] na przypadek autonomicznych operatorów superpozycji w przestrzeniach funkcji o ograniczonej φ-wariacji, zostało udowodnione przez Ciemnoczołowskiego i Orlicza w pracy [CO].

W dalszym ciągu przez φ-funkcję będziemy rozumieli ciągłą, nieograniczoną i niemalejącą funkcję $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, spełniającą warunek $\varphi(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$. Mówimy, że taka funkcja φ spełnia warunek Δ_2 dla małych u, jeśli

$$\varphi(2u) \leqslant k\varphi(u) \quad \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant u_0,$$

gdzie $u_0 > 0$ jest ustalone oraz k jest pewną stałą dodatnią. Oznaczmy przez X przestrzeń liniową funkcji o wartościach rzeczywistych, zdefiniowanych na przedziale $I = [0, a]$ i takich, że $x(0) = 0$. Przypomnijmy, że liczbę

$$\mathrm{var}_\varphi|_0^a(x) = \mathrm{var}_\varphi(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} \varphi(|x(t_i) - x(t_{i-1})|), \quad x \in X,$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ przedziału I, nazywamy φ-wariacją funkcji x na przedziale I. Rozważmy następującą klasę funkcji

$$BV_\varphi(I) = \{x \in X : \ \mathrm{var}_\varphi(\lambda x) < +\infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}.$$

Wiadomo, że jeśli przykładowo niezerowa funkcja $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest wypukła, $\varphi(0) = 0$, to $BV_\varphi(I)$ wyposażona w normę

$$\|x\|_{V_\varphi} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \ \mathrm{var}_\varphi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \leqslant 1 \right\}$$

jest przestrzenią Banacha (zob. [MO2]). Jeśli w przestrzeni tej rozważymy zwykłe działanie mnożenia funkcji, to otrzymujemy algebrę Banacha (zob. [MO]). Elementy tej przestrzeni będziemy nazywali BV_φ-funkcjami, natomiast rozwiązania równań całkowych, należące do tej przestrzeni, będziemy nazywali BV_φ-rozwiązaniami.

Odpowiednik Twierdzenia 2 na przypadek φ-wariacji udowodniłam w pracy [22].

Praca [15], wchodząca w skład rozprawy habilitacyjnej, dotyczy BV_φ-rozwiązań nieliniowych równań całkowych postaci (5) i (6). Dla prostoty przyjmijmy $a = 1$. Załóżmy, że φ jest φ-funkcją oraz, że spełnione są następujące warunki:

12^0 $g \in X$ jest BV_φ-funkcją;
13^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia lokalny warunek Lipschitza;
14^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t, \cdot)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a dla dowolnego $t \in I$, $K(0, s) = 0$ oraz istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $\mathrm{var}_\varphi(K(\cdot, s)/\alpha) \leqslant M(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $M : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Pierwszym wynikiem udowodnionym w pracy [15] jest następujące

Twierdzenie 9 ([15], Theorem 1). *Przy powyższych założeniach istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że dla każdego ν takiego, że $|\nu| < \rho$, równanie* (5) *posiada dokładnie jedno BV_φ-rozwiązanie,zdefiniowane na przedziale I.*

Dla pełności dodam, że formułując w pracy [15] założenie 14^0 (zob. [15], zał. 3^0) nie zaznaczyliśmy, że $K(0, s) = 0$ dla $s \in I$. W pracy [20], dowodząc uogólnienie Twierdzenia 14 dla uogólnionych BV_φ rozwiązań, odpowiednik założenia 14^0 sformułowaliśmy w inny sposób (zob. [20], zał. 4^0).

Kolejny rezultat uzyskany w pracy [15], dotyczy ciągłych BV_φ-rozwiązań równania (5). Załóżmy dodatkowo, że

15^0 $g \in X$ jest ciągłą BV_φ-funkcją;
16^0 dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $t,\ \tau,\ s \in I$

$$|t - \tau| < \delta \implies |K(\tau, s) - K(t, s| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 10 ([15], Theorem 2). *Załóżmy, że spełnione są warunki $13^0 - 16^0$. Wówczas istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że dla każdego ν takiego, że $|\nu| < \rho$, równanie* (5) *posiada dokładnie jedno ciągłe BV_φ-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale I.*

Przechodząc do BV_φ-rozwiązań równania (6), wprowadźmy następujące założenie.

17^0 $T = \{(t, s) :\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ oraz $K : T \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t, \cdot)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0, t]$ dla każdego $t \in I$, $K(s, s) = 0$ oraz istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $\mathrm{var}_\varphi|_s^1(K(\cdot, s)/\alpha) \leqslant m(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $m : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

W pracy [15] udowodniono następujące

Twierdzenie 11 ([15], Theorem 5). *Załóżmy, że spełnione są warunki 12^0, 13^0 i 17^0. Wówczas istnieje przedział $J \subset I$ taki, że równanie* (6) *posiada jedno BV_φ-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale J.*

Dla równania (6) został również udowodniony odpowiednik Twierdzenia 10, a także sformułowano odpowiedniki Twierdzenia 9, Twierdzenia 10 i Twierdzenia 11, w których występują funkcje o wartościach w przestrzeni Banacha.

W pracy [15], przy wykorzystaniu alternatywy Leray-Schaudera dla kontrakcji (zob. [O]), udowodniono również twierdzenia dotyczące globalnych BV_φ-rozwiązań równania (5), w którym $\nu = 1$ oraz równania (6). W twierdzeniach tych, narzucając pewien warunek wzrostu na występującą w tych równaniach funkcję f, można było zrezygnować z wymagania, by była ona lokalnie lipschitzowska. Dla przykładu zacytujemy wynik pochodzący z pracy [15], który dotyczy równania (5), w którym $\nu = 1$. Dla prostoty przyjmijmy $a = 1$. Załóżmy, że spełnione są warunki 12^0 i 14^0. Ponadto załóżmy, że

18^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

19^0 istnieje funkcja $\Psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ taka, że $\Psi(u) > 0$ dla $u > 0$ oraz

$$\sup_{s\in[0,1]} |f(x(s))| \leqslant \Psi(\|x\|_{V_\varphi}), \quad \text{dla dowolnego } x \in BV_\varphi(I);$$

20^0 istnieje $M_0 > 0$ takie, że $\dfrac{M_0}{\|g\|_{V_\varphi} + \Psi(M_0)c} > 1$, gdzie c jest pewną stałą, która została zdefiniowana w dowodzie Twierdzenia 9;

21^0 istnieje funkcja ciągła i niemalejąca $\varphi_{M_0} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ taka, że $c\varphi_{M_0}(\tilde{c}z) < z$ dla $z > 0$ oraz

$$|f(x) - f(y)| < \varphi_{M_0}(|x - y|) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R} \text{ takich, że } |x|, |y| \leqslant M_0,$$

gdzie $\tilde{c}$ jest pewną stałą, zdefiniowaną w dowodzie Twierdzenia 9.

Twierdzenie 12 ([15], Theorem 9)**.** *Przy powyższych założeniach równanie* (5)*, w którym* $\nu = 1$*, posiada* BV_φ*-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale* I*.*

Podobny wynik udowodniono również dla równania Volterry-Hammersteina (6).

Jeśli przyjmiemy, mówiąc nieprecyzyjnie, że funkcja φ, która występuje w określeniu φ-wariacji, zależy również od parametru t, to otrzymamy pojęcie uogólnionej φ-wariacji, które zostało wprowadzone przez Gniłkę w1976 roku, w pracy [G1]. W pracy [20], wchodzącej w skład rozprawy habilitacyjnej, badaliśmy nieliniowe operatory superpozycji oraz rozwiązania nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach funkcji o ograniczonej, uogólnionej φ-wariacji. Wyniki dotyczące operatorów superpozycji, udowodnione w pracy [20] stanowią rozszerzenie znanych wyników z pracy Ciemnoczołowskiego i Orlicza [CO].

Zwróćmy uwagę na pewien fakt, który sprawia, że szukanie rozwiązań nieliniowych równań całkowych w klasach funkcji o ograniczonej, uogólnionej φ-wariacji wydaje się być interesujące. Okazuje się mianowicie, że dla pewnej klasy funkcji $\varphi(t,u)$ otrzymuje się rozwiązania badanych równań, które są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, stałymi na każdym przedziale ich ciągłości (zob. [20], Remark 1).

Załóżmy, że funkcja $\varphi : [0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, gdzie $a < +\infty$, spełnia następujące warunki:

22^0 dla każdego $t \in [0,a]$, $\varphi(t,u)$ jest ciągłą, niemalejącą funkcją względem $u \geqslant 0$, $\varphi(t,u) \to +\infty$ przy $u \to +\infty$;

23^0 $\varphi(t,0) = 0$ dla każdego $t \in [0,a]$ oraz $\varphi(0,u) = 0$ implikuje $u = 0$.

Niech $X = \{x : [0,a] \to \mathbb{R}\}$. Przypomnijmy, że dla funkcji $x \in X$, liczbę

$$V_\varphi(x) = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i, |x(t_i) - x(t_{i-1})|),$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich podziałach $\Pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ wraz z punktami pośrednimi $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, nazywamy uogólnioną φ-wariacją funkcji x na przedziale $[0,a]$. Oznaczmy

$$BV_\varphi = BV_\varphi(I) = \{x \in X : \ V_\varphi(\lambda x) < +\infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\},$$

gdzie $I = [0,a]$. Wiadomo, że jeśli funkcja φ spełnia następujący warunek

24^0 $\varphi(t,u)$ jest funkcją wypukłą zmiennej u dla każdego $t \in I$;

to $BV_\varphi(I)$ wraz z normą

$$\|x\|_{V_\varphi} = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \ V_\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant 1\right\}$$

jest przestrzenią Banacha (zob. [M], Theorem 10.8, p.71 oraz Theorem 1.5, pp.2-3). Elementy tej przestrzeni nazywamy uogólnionymi BV_φ-funkcjami, a rozwiązania równań całkowych, które należą do tej przestrzeni, będziemy nazywali uogólnionymi BV_φ-rozwiązaniami.

Niech $\psi(u) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant a} \varphi(s,u)$. Będziemy zakładali, że spełniony jest następujący warunek:

25^0 jeśli $\psi(u) = 0$, to $u = 0$.

Ponadto, niech $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że

26^0 $\lim\limits_{u \to +\infty} g(u) = +\infty$;

27^0 $g(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$;
28^0 g spełnia warunek Δ_2 dla małych u.

Wreszcie będziemy również zakładali, że istnieją stałe dodatnie m, M oraz $u_0 > 0$ takie, że dla dowolnych $u \in [0, u_0]$ oraz $t \in [0, a]$ spełnione są nierówności:

29^0 $\quad mg(u) \leqslant \varphi(t, u) \leqslant Mg(u)$.

Przytoczymy teraz dwa główne wyniki dotyczące autonomicznego operatora superpozycji, udowodnione w pracy [20].

Twierdzenie 13 ([20], Theorem1)**.** *Niech funkcje* $\varphi : [0, a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *oraz* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *spełniają założenia* 22^0*,* 23^0*,* 25^0*-*29^0*. Niech* $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie ciągiem takich funkcji, że* $F_n(0) = 0$*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) *dla dowolnego* $x \in BV_\varphi$ *istnieje liczba* $k > 0$ *taka, że*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\varphi(k(F_n \circ x)) < +\infty;$$

(b) *dla dowolnego* $\nu > 0$ *istnieje* $k_\nu > 0$ *takie, że dla dowolnych* $u_1, u_2 \in [-v, v]$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$*, spełniona jest nierówność:*

$$g(|F_n(u_1) - F_n(u_2)|) \leqslant k_\nu g(|u_1 - u_2|).$$

Twierdzenie 14 ([20], Theorem 2)**.** *Niech funkcje* φ *i* g *będą takie jak w* Twierdzeniu 13*. Dodatkowo załóżmy, że funkcja* g *jest* s*-wypukła dla pewnego* $s \in (0, 1]$ *lub, że istnieje* $t \in [0, a]$ *takie, że* $\varphi(t, \cdot)$ *jest* s*-wypukła dla pewnego* $s \in (0, 1]$*. Wówczas warunek* (a) *występujący w* Twierdzeniu 13*, jest równoważny następującemu warunkowi:*

(c) *dla dowolnego* $\nu > 0$ *istnieje* $k_\nu > 0$ *takie, że dla dowolnych* $u_1, u_2 \in [-v, v]$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$*, spełniona jest nierówność:*

$$|F_n(u_1) - F_n(u_2)| \leqslant k_\nu |u_1 - u_2|.$$

Dowody Twierdzenia 13 i Twierdzenia 14 wykorzystują pewne idee pochodzące z pracy Ciemnoczołowskiego i Orlicza [CO].

Przytoczymy jeszcze jeden wynik dotyczący autonomicznego operatora superpozycji, który pochodzi z pracy [20]. Rezultat ten stanowi rozszerzenie wspomnianych już wyników Josephy'ego [J2] oraz Ciemnoczołowskiego i Orlicza [CO].

Twierdzenie 15 ([20], Corollary 1)**.** *Niech funkcje* φ *oraz* g *będą takie jak w* Twierdzeniu 14*. Załóżmy, że funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek* $f(0) = 0$*. Wówczas operator superpozycji* $x \to f \circ x$ *przekształca przestrzeń* BV_φ *w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy* f *spełnia lokalny warunek Lipschitza.*

W pracy [20] zbadaliśmy również rozwiązania nieliniowych równań całkowych w klasie funkcji o ograniczonej φ-wariacji. Rozważmy wpierw równanie (5). Dla prostoty przyjmijmy $a = 1$. Niech funkcja φ spełnia założenia $22^0 - 25^0$. Załóżmy, że

30^0 $g : I \to \mathbb{R}$ jest uogólnioną BV_φ-funkcją ($g(0) = 0$);
31^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską;
32^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t, \cdot)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a dla każdego $t \in I$, $K(0, s) = 0$ oraz istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $V_\varphi\left(\frac{K(\cdot,s)}{\alpha}\right) \leqslant M(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $M : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Twierdzenie 16 ([20], Theorem 3)**.** *Przy powyższych założeniach istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że dla każdego ν takiego, że $|\nu| < \rho$, równanie* (5) *posiada dokładnie jedno uogólnione BV_φ-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale I.*

Załóżmy teraz dodatkowo, że φ-funkcja φ jest wypukła oraz spełnia następujący warunek Δ_2:

33^0 $\varphi(t, 2u) \leqslant k\varphi(t, u)$ dla $0 \leqslant u \leqslant u_0$, $t \in [0, a]$, gdzie $u_0 > 0$ jest ustalone oraz k jest pewną stałą dodatnią.

Rozważmy teraz równanie (6). Definiujemy następującą funkcję

$$\tilde{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ 0, & t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Przyjmijmy następujące założenie

34^0 niech $T = \{(t, s) :\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ i niech $K : T \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że $K(t, \cdot)$ jest całkowalna na przedziale $[0, t]$ dla każdego $t \in I$ oraz, że istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $\bigvee_0^1{}_\varphi\left(\frac{\tilde{K}(\cdot,s)}{\alpha}\right) \leqslant m(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $m : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Dla równania (6), w którym symbol "$\int_0^t$" oznacza całkę Lebesgue'a na przedziale $[0, t]$, udowodniliśmy następujący wynik dotyczący istnienia i jedyności uogólnionego BV_φ-rozwiązania.

Twierdzenie 17 ([20], Theorem 4)**.** *Przyjmijmy, że spełnione są założenia* 30^0, 31^0 *oraz* 34^0*. Wówczas istnieje przedział $J \subset I$ taki, że równanie* (6) *posiada jedyne uogólnione BV_φ-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale J.*

W pracy [20] wykorzystaliśmy również alternatywę Leray-Schaudera dla kontrakcji (zob. [O]) do badania istnienia globalnych, uogólnionych BV_φ-rozwiązań równania (5), w którym $\nu = 1$ oraz równania (6). Przyjmijmy, że w równaniu (5) $a = 1$ oraz $\nu = 1$. Załóżmy, że

35^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

36^0 istnieje funkcja $\Psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ taka, że $\Psi(u) > 0$ dla $u > 0$ oraz

$$\sup_{s\in[0,1]} |f(x(s))| \leqslant \Psi(\|x\|_{V_\varphi}), \quad \text{dla dowolnego } x \in BV_\varphi(I),$$

37^0 istnieje $M_0 > 0$ takie, że $\dfrac{M_0}{\|x\|_{V_\varphi} + \Psi(M_0)c} > 1$, gdzie c jest pewną stałą, która została zdefiniowana w dowodzie Twierdzenia 16;

38^0 istnieje ciągła i niemalejąca funkcja $\varphi_{M_0} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ taka, że $c\varphi_{M_0}(\tilde{c}z) < z$ dla $z > 0$ oraz

$$|f(x) - f(y)| < \varphi_{M_0}(|x - y|) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R} \text{ takich, że } |x|, |y| \leqslant M_0,$$

gdzie $\tilde{c}$ jest pewną stałą, zdefiniowaną w dowodzie Twierdzenia 16.

Twierdzenie 18 ([20], Theorem 5)**.** *Przy założeniach* 30^0*,* 32^0*,* 35^0*-*38^0 *równanie* (5)*, w którym* $\nu = 1$*, posiada uogólnione* BV_φ*-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale* I*.*

Dodajmy, że podobny wynik udowodniliśmy również dla równania Volterry-Hammersteina (6).

2.2.4. *Nieliniowe operatory całkowe, nieliniowe operatory superpozycji oraz operatory splotu w przestrzeniach funkcji o ograniczonej* Λ*-wariacji.* Bardzo interesujące uogólnienie pojęcia wariacji w sensie Jordana, mianowicie tak zwana Λ-wariacja, zostało wprowadzone przez Watermana [W1] w 1972 roku. Wariacja ta posiada pewne interesujące zastosowania w analizie harmonicznej. Zaznaczmy również, że Λ-wariacja jest związana z φ-wariacją poprzez następujący fakt, udowodniony przez Watermana w pracy [W2]. Mianowicie, jeśli $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$, jest funkcją o ograniczonej φ-wariacji i spełniona jest pewna nierówność typu Younga, to f jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji.

Dlaczego problem szukania rozwiązań nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach funkcji o ograniczonej Λ-wariacji wydaje się być interesujący? Okazuje się, że funkcje o ograniczonej Λ-wariacji posiadają pewne własności, które przysługują funkcjom o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Dla przykładu, funkcje o ograniczonej Λ-wariacji są ograniczone i zbiory punktów ich nieciagłości są co najwyżej przeliczalne. Ponadto dla takich funkcji zachodzi twierdzenie typu Helly'ego. Wymieńmy również bardzo interesującą własność, która dotyczy pewnej podklasy funkcji o ograniczonej Λ-wariacji, a mianowicie funkcjom o tak zwanej ograniczonej harmonicznej wariacji. Waterman (zob. [W1]) udowodnił, że szeregi Fouriera funkcji o ograniczonej harmonicznej wariacji są zbieżne w każdym punkcie oraz zbieżne jednostajnie, na przedziałach domkniętych ich ciągłości (dodajmy, iż w pewnym sensie jest to najlepszy wynik w tym kierunku).

Dodam również, że praca [18], wchodząca w skład rozprawy habilitacyjnej, jest według mojej najlepszej wiedzy pierwszą w literaturze pracą, w której przebadano klasyczne nieliniowe operatory całkowe w przestrzeniach funkcji o ograniczonej Λ-wariacji.

Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną na zwartym przedziale $I = [a, b]$, zawartym w $\mathbb{R}$, $\{I_n\}$ niech będzie ciągiem niezachodzących na siebie przedziałów $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$ i niech Λ oznacza niemalejący ciąg liczb dodatnich λ_n taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ jest rozbieżny. Mówimy, że funkcja f posiada ograniczoną Λ-wariację, lub krótko, że jest ΛBV-funkcją, jeśli dla każdego ciągu $\{I_n\}$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < +\infty, \quad \text{gdzie } f(I_n) = f(b_n) - f(a_n).$$

Powyższa definicja może być rozszerzona oczywiście na przypadek przedziałów nieograniczonych. Jeśli f jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji, to Λ-wariacje funkcji f na przedziale $[a, x]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ definiujemy w następujący sposób:

$$V_\Lambda(f; [a, x]) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} \right\},$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich ciągach niezachodzących na siebie przedziałów $\{I_n\}$ takich, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a, x]$. Oznaczmy przez $\Lambda BV(I, \mathbb{R}) = \Lambda BV(I)$ przestrzeń liniową wszystkich funkcji $x : I \to \mathbb{R}$ takich, że $V_\Lambda(x, I) = V_\Lambda(x) < +\infty$, wyposażoną w normę

$$\|x\|_\Lambda = |x(a)| + V_\Lambda(x).$$

Wiadomo, że przestrzeń $\Lambda BV(I)$ z powyższą normą jest przestrzenią Banacha, a jeśli uwzględni się również operację mnożenia funkcji, to przestrzeń ta jest algebrą Banacha. Dodajmy jeszcze, że zbieżność w sensie powyższej normy jest silniejsza niż zbieżność jednostajna.

W pracy [23], wchodzącej w skład rozprawy habilitacyjnej, udowodniłam wpierw dwa wyniki, dotyczące operatorów splotu oraz nieliniowego operatora superpozycji w przestrzeniach $\Lambda BV(I)$. Ustalmy niemalejący ciąg liczb dodatnich (λ_n) taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 19 ([23], Proposition 1)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji oraz, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wówczas splot*

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)f(s)ds, \quad \textit{dla } t \in \mathbb{R}.$$

jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji.

Twierdzenie 20 ([23], Proposition 2)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,u) \to f(t,u)$, spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $t \in [0,1]$ oraz, że dla dowolnych liczb rzeczywistych u_n, $n = 1, \ldots, N$, zachodzi następująca nierówność*

$$\sup \sum_{n=1}^{N} \frac{|f(b_n,u_n) - f(a_n,u_n)|}{\lambda_n} \leqslant M,$$

gdzie $M > 0$ oraz supremum jest wzięte po wszystkich skończonych rodzinach niezachodzących na siebie przedziałów $[a_n, b_n] \subset I$. Wówczas nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, odwzorowuje przestrzeń $\Lambda BV(I)$ w siebie i jest lokalnie ograniczony.

Powyższe twierdzenie można również sformułować w sposób analogiczny do Twierdzenia 3 z warunkiem (2).

Obydwa te twierdzenia wykorzystałam w pracy [23] do badania ΛBV-rozwiązań równań różniczkowych liniowych i semiliniowych. Rozważmy wpierw następujące równanie liniowe

$$u'(t) = \alpha u(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

gdzie $\alpha < 0$.

Twierdzenie 21 ([23], Proposition 3)**.** *Załóżmy, że funkcja $f \in \Lambda BV(\mathbb{R})$ jest ciągła. Wówczas $x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)f(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, jest ciągłym rozwiązaniem równania (7) o ograniczonej Λ-wariacji.*

Rozważmy teraz semiliniowe równanie różniczkowe kształtu

$$u'(t) = \alpha u(t) + f(t, u(t)), \quad t \in I = [0,1], \tag{8}$$

gdzie $\alpha < 0$. Poniższy wynik dotyczy istnienia lokalnego rozwiązania równania (8), które jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji.

Twierdzenie 22 ([23], Theorem2)**.** *Załóżmy, że ciągła funkcja f spełnia warunki wymienione w* Twierdzeniu 20. *Wówczas istnieje przedział $J \subset I$ taki, że równanie* (8) *posiada ciągłe rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale J, które jest funkcją o ograniczonej Λ-wariacji.*

Jak już wspomniałam wcześniej, klasyczne nieliniowe równania całkowe w przestrzeniach funkcji o ograniczonej Λ-wariacji były rozważane w pracy [18], wchodzącej w skład rozprawy habilitacyjnej. Będziemy zakładali, że całki występujące w rozważanych tutaj równaniach są całkami Lebesgue'a. Rozważmy wpierw równanie (5).

Załóżmy, że

39^0 $g : I \to \mathbb{R}$ jest ΛBV-funkcją;

40^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską;

41^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $V_\Lambda(K(\cdot, s); I) \leqslant M(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $M : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a oraz $K(t, \cdot)$ jest również całkowalna w sensie Lebesgue'a, dla każdego $t \in I$.

Przy powyższych założeniach prawdziwe jest następujące twierdzenie o istnieniu i jedyności ΛBV-rozwiązania dla równania (5).

Twierdzenie 23 ([18], Theorem 1)**.** *Przy powyższych założeniach istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że dla każdego ν takiego, że $|\nu| < \rho$, równanie* (5) *posiada dokładnie jedno ΛBV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale I.*

Przejdźmy teraz do równania kształtu (6). Przyjmijmy następujące założenie

42^0 $T = \{(t, s) : \ 0 \leqslant t \leqslant a, \ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ oraz $K : T \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że $\dfrac{|K(s, s)|}{\lambda_1} + V_\Lambda(K(\cdot, s); [0, a]) \leqslant m(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $m : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a oraz $K(t, \cdot)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0, t]$, dla każdego $t \in I$.

Następujące twierdzenie dotyczy istnienia i jedyności ΛBV-rozwiązania równania (6).

Twierdzenie 24 ([18], Theorem 2)**.** *Załóżmy, że spełnione są założenia* 39^0, 40^0 *oraz* 42^0. *Wówczas istnieje przedział $J \subset I$ taki, że równanie* (6) *posiada jedyne ΛBV-rozwiązanie, zdefiniowane na przedziale J.*

W pracy [18] udowodniono również twierdzenia dotyczące istnienia i jedyności ciągłych ΛBV-rozwiązań równania (5), w którym $\nu = 1$ oraz równania (6).

W pracy [23] zbadałam ΛBV-rozwiązania bardziej złożonych, nieliniowych równań całkowych, a mianowicie mieszanego równania całkowego Volterry-Fredholma postaci

$$(9) \qquad x(t) = g(t) + \int_0^t \int_0^1 K(t,s) f(x(s)) ds d\tau, \quad t \in I,$$

oraz nieliniowego równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem postaci

$$(10) \quad x(t) = g(t) + F(x)(t) + \nu \int_0^1 K(t,s) f(x(s)) ds, \quad t \in I,$$

gdzie wszystkie całki w powyższych równaniach oznaczają całki Lebesgue'a. Odnotujmy, że powyższe równania wraz z ich potencjalnymi zastosowaniami były badane na przykład w pracach [AT, BBZ, B1, GM, HKS]. Głównym narzędziem, które zastosowałam w dowodach twierdzeń o istnieniu i lokalnej jedyności ΛBV-rozwiązań powyższych równań była następująca wersja twierdzenia Lovelady'ego o punkcie stałym, udowodniona w pracy [BK], a mianowicie

Twierdzenie 25 ([BK], Proposition 5)**.** *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą dwiema przestrzeniami Banacha i niech $T : X \times B_Y(0,r) \to Y$, gdzie $B_Y(0,r)$ oznacza kulę domkniętą o środku w zerze i promieniu $r > 0$ w przestrzeni Y, będą odwzorowaniami takimi, że*

- 43^0 $T(0,0) = 0$*;*
- 44^0 $\|T(a,x) - T(b,y)\|_Y \leqslant \beta \|a-b\|_X + \beta \|x-y\|_Y$ *dla* $a, b \in X$ *oraz* $x, y \in B_Y(0,r)$*, gdzie* $\beta \geqslant 0$*.*

Ponadto, niech $G : B_Y(0,r) \to Y$ będzie odwzorowaniem wyższego rzędu takim, że $G(0) = 0$. Wówczas istnieją liczby dodatnie $\sigma \leqslant r$ oraz $\eta \leqslant r$ takie, że dla każdej pary $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$ istnieje jedyny element $x^* \in B_Y(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(a_0, x_0 + G(x^*))$.

Pojęcie odwzorowania wyższego rzędu występujące w powyższym twierdzeniu, zostało wprowadzone przez Grossmana i Millera ([GM]) w 1970 roku. Przypomnijmy, że odwzorowanie $G : B_X(0,r) \to X$ nazywa się odwzorowaniem wyższego rzędu, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje liczba $0 < \delta \leqslant r$ taka, że

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|, \quad \text{dla dowolnych } x, y \in B_X(0,\delta).$$

Podkreślmy, że stosowanie twierdzeń typu Lovelady'ego daje często "lepsze" rezultaty, niż bezpośrednie stosowanie zasady kontrakcji Banacha.

Do końca tego paragrafu będziemy przyjmowali dla prostoty, że $I = [0,1]$. W dowodzie głównego wyniku dotyczącego równania (9), istotną rolę odgrywa również następujące twierdzenie, udowodnione w pracy [23]. Załóżmy, że

45^0 $K : I \times I \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $K(t,\cdot)$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a dla każdego $t \in I$, $V_\Lambda(K(\cdot,s); I) \leqslant m(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I$, gdzie $m : I \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a , $K(0,s) = 0$; bez straty ogólności możemy przyjmować, że $c_1 = \int\limits_0^1 m(s)\ ds > 0$,

46^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją borelowsko mierzalną, która odwzorowuje zbiory ograniczone w zbiory ograniczone;

47^0 istnieje otwarte otoczenie zera w $\mathbb{R}$, na którym funkcja f jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz $f'(0) = 0$.

Twierdzenie 26 ([23], Theorem 3)**.** *Przy powyższych założeniach nieliniowy operator całkowy*

$$G(x)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s) f(x(s))\ ds, \quad \textit{dla } t \in I,$$

działa w przestrzeni $\Lambda BV(I)$ i jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Głównym wynikiem dotyczącym równania (9) jest następujące

Twierdzenie 27 ([23], Theorem 4)**.** *Przyjmijmy, że spełnione są założenia $45^0 - 47^0$. Dodatkowo załóżmy, że $f(0) = 0$ oraz, że $g \in \Lambda BV(I)$. Wówczas istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że dla każdej funkcji $g \in B_\Lambda(0,\eta)$, równanie* (9) *posiada jedyne ΛBV-rozwiązanie w pewnej kuli $B_\Lambda(0,\sigma)$.*

Przejdźmy teraz do równania z zaburzeniem kształtu (10). Załóżmy, że

48^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską i taką, że $f(0) = 0$;

49^0 $g \in \Lambda BV(I)$;

50^0 $F : \Lambda BV(I) \to \Lambda BV(I)$ jest operatorem superpozycji wyższego rzędu takim, że $F(0) = 0$.

Twierdzenie 28 ([23], Theorem 25)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunki 45^0, 48^0-50^0. Wówczas istnieją liczby dodatnie $\rho, \sigma, \eta > 0$ takie, że jeśli $|\nu| < \rho$, $g \in B_\Lambda(0,\eta)$, to istnieje dokładnie jeden element $x^* \in B_\Lambda(0,\sigma)$, który jest rozwiązaniem równania* (10).

3. Dorobek naukowy niewchodzący w skład rozprawy habilitacyjnej

W drugiej części autoreferatu przedstawiam wyniki zawarte w pracach, które nie wchodzą w skład rozprawy habilitacyjnej. Chciałabym podkreślić, że tematy, których dotyczą te prace oraz znaczna część zawartych w nich wyników istotnie różni się od prac i wyników wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej. Ta sama uwaga odnosi się również do metod dowodowych, stosowanych w tych dwóch grupach prac.

Prace niewchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej podzieliłam na cztery główne grupy tematyczne. W Paragrafie 3.2.1 przedstawiam wyniki dotyczące problemów istnienia oraz topologicznej struktury zbiorów rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych (zwyczajnych i cząstkowych) oraz nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach Banacha (skończenie oraz nieskończenie wymiarowych). Paragraf 3.2.2 dotyczy równań różniczkowych w przestrzeniach lokalnie wypukłych. W Paragrafie 3.2.3 omawiam wyniki zawarte w kilku pracach, w których do badania równań różniczkowych (sformułowanych przy użyciu klasycznej pochodnej oraz pochodnych aproksymatywnych) wykorzystano całki nieabsolutnie zbieżne. Paragraf 3.2.4 dotyczy równań różniczkowych rzędu ułamkowego, sformułowanych przy użyciu pochodnej Riemanna-Liouville'a. W ostatnim paragrafie omawiam pracę z zakresu teorii funkcji rzeczywistych, która posiada zupełnie inny charakter, niż wszystkie pozostałe prace omawiane w autoreferacie.

3.1. **Lista prac naukowych niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego.** [2]

[1] D. Bugajewska i D. Bugajewski, *On the equation* $x_{ap}^{(n)} = f(t,x)$, Czechoslovak Mathematical Journal **46(121)** (1996), 325-330.

[2] ———, *On generalized Carathéodory's conditions in ordinary differential equations*, Proc. Prague Math. Conf., Praha, Czech Republic (1996), 53-57.

[3] D. Bugajewska, *On implicit Darboux problem in Banach spaces*, Buletin of the Australian Mathematical Society **56** (1997), 149-156.

[4] ———, *On the equation of n-th order and the Denjoy integral*, Nonlinear Analysis, TMA **34** (1998), 1111-1115.

[5] D. Bugajewska i D. Bugajewski, *On nonlinear equations in Banach spaces and axiomatic measures of noncompactness*, Functional Differential Equations **5** (1998), 57-68.

[6] ———, *On the generalized Carathéodory's conditions in ordinary differential equations*, Mathematische Nachrichten **199** (1999), 71-75.

[7] D. Bugajewska, *A note on the global solutions of the Cauchy problem in Banach spaces*, Acta Mathematica Hungarica **88(4)** (2000), 341-346.

[2]Numery prac odpowiadają numeracji ze spisu publikacji

[8] ______, *On the structure of solution sets of differential equations in Banach spaces*, Mathematica Slovaca **50(4)** (2000), 463-471.
[9] D. Bugajewska i D. Bugajewski, *A note on differential equations in locally convex spaces*, Archivum Mathematicum **36** (2000), 415-420.
[10] ______, *On topological properties of solution sets for differential equations in locally convex spaces*, Nonlinear Analysis, TMA **47** (2001), 1211-1220.
[11] D. Bugajewska, *On topological structure of solution sets for delay and functional differential equations*, Journal of Analysis and its Applications **20(4)** (2001), 1075-1080.
[12] ______, *On some applications of Reichert's principle to differential equations in locally convex spaces*, Proc. of 3rd Polish Symposium on Nonl. Anal., Lecture Notes in Nonlinear Analysis **3** (2002), 41-47.
[13] D. Bugajewska i M. Zima, *On positive solutions of nonlinear fractional differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Tom specjalny: Dynamical Systems and Differential Equations (2003), 141-146.
[14] D. Bugajewska i D. O'Regan, *Nonlinear first order ordinary differential equations via Denjoy-Perron integrals*, Archives of Inequalities and Applications **1(2)** (2003), 251-260.
[17] D. Bugajewska, *On nonlinear differential equations of generalized order*, Nonlinear Functional Analysis and Applications **10(1)** (2005), 65-78.
[19] D. Bugajewska i D. O'Regan, *Upper and lower solutions of differential equations via approximate derivatives and the Denjoy integral*, African Diaspora Journal of Mathematics, Tom specjalny: Trends in African Diaspora Mathematics Research (2007), 1-10.
[21] D. Bugajewska, *On the existence uniqueness and topological structure of solution sets to a certain fractional differential equation*, Computers and Mathematics with Applications, Tom specjany: Advance in Fractional Differential Equations **59** (2010), 1108-1116.

Prace [1]-[6] zostały opublikowane przed doktoratem, natomiast prace [8, 10, 12] zawierają wyniki powiązane z doktoratem.

3.2. **Opis dorobku naukowego niewchodzącego w skład osiągnięcia naukowego, o którym mowa w art. 16 ust.2.**

3.2.1. *Nieliniowe równania różniczkowe i całkowe w przestrzeniach Banacha.* W pracy [3] zbadałam zagadnienie Darboux w postaci uwikłanej

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = g\left(x, y, z, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \\ &z(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < +\infty, \\ &z(0,y) = 0, \quad 0 \leqslant y < +\infty,, \end{aligned} \tag{11}$$

w przestrzeni Banacha, gdzie $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ oznacza pochodną mieszaną drugiego rzędu funkcji z.

Niech $I = [0, +\infty)$ oraz niech E będzie przestrzenią Banacha. Załóżmy, że

51^0 $g : I \times I \times E \times E \to E$ jest odwzorowaniem ciągłym;
52^0 istnieje liczba $k \in [0, 1)$ taka, że

$$\|g(x, y, u, v_1) - g(x, y, u, v_2)\| \leqslant k\|v_1 - v_2\|,$$

dla dowolnych $(x, y, u) \in I \times I \times E$ oraz $v_1, v_2 \in E$;
53^0 dla dowolnych $a, b > 0$ istnieje $m(a, b) \in \mathbb{R}_+$ takie, że

$$\|g(x, y, u, 0)\| \leqslant m(a, b), \quad \text{jeśli tylko } |x| < a, \ |y| < b.$$

Głównym wynikiem udowodnionym w pracy [3] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 29 ([3], Theorem 4)**.** *Jeśli spełnione są założenia* 51^0-53^0 *oraz*

$$\alpha(g(A \times X \times Y)) \leqslant \max(h(\alpha(X)), \alpha(Y))$$

dla wszystkich ograniczonych zbiorów $A \subset I \times I$ *oraz* $X \times Y \subset E \times E$, *gdzie* α *oznacza miarę niezwartości Kuratowskiego oraz* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *jest funkcją ciągłą, niemalejącą i taką, że nierówność*

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant \int_0^x \int_0^y h(u(t, s))dtds, \quad (x, y) \in I \times I,$$

posiada tylko trywialne rozwiązanie, to zbiór wszystkich rozwiązań problemu (11)*, zdefiniowanych na* $I \times I$*, jest typu* R_δ*, to znaczy jest on homeomorficzny z przekrojem zstępującego ciągu zwartych retraktów absolutnych. W szczególności jest on niepusty, spójny i zwarty.*

Dowód powyższego twierdzenia jest oparty na pewnej zasadzie spójności z pracy [S3].

Praca [5] to jedna z dwóch prac, w których do badania nieliniowych równań różniczkowych i całkowych w przestrzeniach Banacha, stosowałam miary aksjomatyczne wprowadzone przez Banasia i Goebla (zob. [BG]). Jednym z głównych wyników, udowodnionych w pracy [5], jest twierdzenie typu Aronszajna dla nieliniowego równania całkowego Volterry postaci

$$x(t) = g(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))ds, \quad t \in I, \tag{12}$$

gdzie $I = [0, a]$ jest zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$ oraz symbol "$\int_0^t$" oznacza całkę Bochnera-Lebesgue'a na przedziale $[0, t]$.

Załóżmy, że E jest przestrzenią Banacha oraz, że

54^0 $g : I \to E$ jest funkcją ciągłą;

55^0 $f : I \times I \times E \to E$ jest funkcją ciągłą i lokalnie ograniczoną, to znaczy dla każdego $b > 0$ istnieje liczba $m_b > 0$ taka, że

$$\|f(t,s,x)\| \leqslant m_b \text{ dla } (t,s) \in I^2, \ \|x\| \leqslant b;$$

56^0 dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $t, \tau \in I$ spełniona jest następująca implikacja:

$$|t-\tau| < \delta \Longrightarrow \|f(t,s,x) - f(\tau,s,x)\| \leqslant \varepsilon,$$

jeśli tylko $(t,s,x), \ (\tau,s,x) \in I^2 \times E$.

Twierdzenie typu Aronszajna dla równania (12), udowodnione w pracy [5] posiada następującą postać

Twierdzenie 30 ([5], Theorem 3)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunki* $54^0 - 56^0$. *Jeśli miara aksjomatyczna* μ *posiada własność maksimum oraz*

57^0 $\mu(\{x\}) = 0$ *dla dowolnego* $x \in E$

i istnieje funkcja ciągła $h : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *która jest niemalejąca względem drugiej zmiennej i taka, że funkcja identycznościowo równa zero jest jedynym ciągłym rozwiązaniem nierówności*

$$u(t) \leqslant \int_0^t h(t,u(s))ds, \quad t \in I,$$

oraz

$$\mu(g(t) + f(t, A \times X)) \leqslant h(t, \mu(X))$$

dla dowolnego $t \in I$ *i dowolnych zbiorów ograniczonych* $A \subset I$, $X \subset E$, *to istnieje przedział* $J \subset I$ *taki, że zbiór wszystkich ciągłych rozwiązań równania* (12), *zdefiniowanych na* J *i rozważanych jako podzbiór przestrzeni* $C(J,E)$ *wszystkich funkcji ciągłych* $J \to E$ *z topologią zbieżności jednostajnej, jest typu* R_δ.

Dowód Twierdzenia 30 jest oparty na pewnym wariancie twierdzenia Vidossich'a, pochodzącym z pracy [S4]. Podobny wynik do powyższego twierdzenia udowodniliśmy również dla zagadnienia Cauchy'ego postaci

$$x'(t) = f(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{13}$$

oraz dla zagadnień (12) i (13), określonych na przedziałach nieograniczonych.

Dodam, że dla specjalistów zainteresowanych własnościami Knesera i Aronszajna, ciekawym było pytanie, czy Twierdzenie 30 jest prawdziwe, jeśli pominie się założenie 57^0. Mimo upływu 15 lat, odpowiedź na to pytanie nadal wydaje się być otwarta.

Zagadnieniu Cauchy'ego (13), w którym $f : I \times E \to E$, $I = [0, +\infty)$ oraz E jest przestrzenią Banacha, dotyczy praca [8]. Głównym elementem tej pracy było udowodnienie twierdzenia typu Aronszajna dla zagadnienia (13), przy narzuceniu na odwzorowanie f bardziej ogólnego warunku wzrostu niż na przykład w pracy [5]. Ten warunek wzrostu posiada następującą postać

58^0 istnieje $\omega \in \Re_0$ oraz ciągła funkcja $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$\|f(t, x)\| \leqslant \varphi(t)\omega(\|x\|) \ \text{ dla wszystkich } t \in I \text{ oraz } x \in E,$$

gdzie $\Re_0$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji ciągłych $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takich, że

$$v(r) > 0, \quad r \geqslant \delta, \quad \int_\delta^{+\infty} \frac{ds}{v(s)} = +\infty, \quad \text{dla pewnego } \delta \geqslant 0.$$

Warunek wzrostu, występujący w założeniu 58^0, pochodzi z pracy [HYS], w której Autorzy badali zagadnienie przedłużalności rozwiązań równania o rozdzielających się zmiennych postaci

$$r'(t) = \varphi(t)\omega(r).$$

Z kolei warunek typu zwartościowego, narzucony na funkcję f, był sformułowany w języku miary niezwartości Kuratowskiego lub w języku wspomnianej już miary aksjomatycznej.

Warunek 58^0 wykorzystałam również w pracy [7], w której udowodniłam twierdzenie dotyczącej topologicznej własności zbioru globalnych rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (13), w którym $f : I \times E \to E$, E oznacza przestrzeń Banacha oraz $I = [0, a]$ jest zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$. Załóżmy, że

59^0 $f : I \times E \to E$ jest odwzorowaniem ciągłym;

60^0 $\alpha(f(I \times A)) \leqslant h(\alpha(A))$, dla każdego ograniczonego zbioru $A \subset E$, gdzie $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest ciągłą, niemalejącą funkcją taką, że zagadnienie początkowe

$$x' = h(x), \quad h(0) = 0,$$

posiada tylko trywialne rozwiązanie $x(t) \equiv 0$ na przedziale I (α oznacza tutaj ponownie miarę niezwartości Kuratowskiego).

Twierdzenie 31 ([7], Theorem 3). *Przyjmijmy, że spełnione są warunki* 59^0, 60^0 *oraz* 58^0 *(dla* $I = [0, a]$*). Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia* (13)*, zdefiniowanych na przedziale* I *i rozważanych jako podzbiór przestrzeni* $C(I, E)$*, jest typu* R_δ*.*

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem wyniku A. Constantina z pracy [C3], dotyczącego istnienia i jedyności globalnych rozwiązań równania (13). Dowód Twierdzenia 31 jest moim zdaniem dość ciekawym i nietrywialnym zastosowaniem twierdzenia Vidossich'a z pracy [V].

Z kolei w pracy [11] badałam równanie różniczkowe z opóźnieniem postaci

$$x' = f(t,x) + g(t, x(t-\tau(t))), \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t, \tag{14}$$

gdzie $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są funkcjami ciągłymi. Przypomnijmy, że zbiór

$$E_{t_0} = \{t_0\} \cup \{s : \; s = t - \tau(t) \leqslant t_0 \text{ dla } t \geqslant t_0\}$$

nazywamy przedziałem początkowym dla równania (14) w punkcie t_0. Zakładamy, że zbiór E_{t_0} jest ograniczony dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji początkowej $x_0 : E_{t_0} \to \mathbb{R}^n$, funkcja $x = x(t)$ jest rozwiązaniem równania (14) na przedziale $[t_0, t_0 + a)$ dla pewnego $0 < a \leqslant +\infty$, jeśli funkcja x jest ciągła na zbiorze $E_{t_0} \cup [t_0, t_0 + a)$, spełnia równanie (14) na przedziale $[t_0, t_0 + a)$ oraz

$$x(t) = x_0(t) \quad \text{dla } t \in E_{t_0}. \tag{15}$$

Lokalne rozwiązania problemu (14)-(15) były badane na przykład w [D] oraz [H]. W pracy [11] udowodniłam następujące twierdzenie typu Aronszajna dla zagadnienia (14)-(15).

Twierdzenie 32 ([11], Theorem 3)**.** *Załóżmy, że $\varphi, \psi, z, \omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są funkcjami ciągłymi takimi, że $z(r) > 0$ oraz $\omega(r) > 0$ dla $0 \leqslant \delta \leqslant r$. Zakładamy, że funkcje z, ω są niemalejące na $\mathbb{R}_+$, $\omega \in \Re_0$ (klasa funkcji $\Re_0$ została zdefiniowana w założeniu 58^0) oraz istnieją stałe $K, L, M > 0$ takie, że*

$$z(r) \leqslant K\omega(r) \int_\delta^r \frac{ds}{\omega(s)} + M\omega(r), \quad 0 \leqslant L \leqslant r.$$

Ponadto, niech $f, g : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będą funkcjami ciągłymi, przy czym

$$\begin{aligned} &\|f(t,x)\| \leqslant \varphi(t) z(\|x\|), \\ &\|g(t,x)\| \leqslant \psi(t)\omega(\|x\|), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

W końcu niech $\sup_{t \in E_{t_0}} \|x_0(t)\| = \|x_0(t_0)\|$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia (14)-(15) *jest typu R_δ.*

Twierdzenie 32 uogólnia wynik A. Constantina z pracy [C3], dotyczący istnienia globalnych rozwiązań tego problemu. Wynik podobny do

Twierdzenia 32 udowodniłam również dla bardziej ogólnego równania różniczkowo-funkcyjnego postaci

$$x' = f(t,x) + g(t,x_t), \quad t \geqslant b, \quad x_b = \gamma, \tag{16}$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą oarz $x_t(s) = x(t+s)$ dla $s \in [-h,0]$.

Dowody tych twierdzeń są oparte na twierdzeniu typu Vidossicha z pracy [K].

3.2.2. *Równania różniczkowe w przestrzeniach lokalnie wypukłych.* Prace [10], [12] zawierają wyniki związane z moją rozprawą doktorską, które dotyczą własności topologicznych rozwiązań zagadnienia początkowego dla równania n-tego rzędu w przestrzeniach lokalnie wypukłych. Dla przykładu przytoczę tutaj główny wynik z pracy [10]. Niech E będzie quasi-zupełną przestrzenią lokalnie wypukłą i niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną seminorm, które generują topologię przestrzeni E. Ponadto, niech $I = [0,a]$ będzie zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$, $B = \{x \in E: \ p_i(x) \leqslant b, i = 1,\ldots,k\}$, gdzie $b > 0$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $p_i,\ldots,p_k \in \mathcal{P}$. Rozważmy zagadnienie

$$x^{(n)} = f(t,x), \quad x^{(j)}(0) = x_j, \quad j = 0,\ldots,n-1, \tag{17}$$

gdzie $x_j \in E$ dla $j = 0,\ldots,n-1$, $x_0 = 0$ oraz $f: I \times B \to E$ jest ograniczoną funkcją ciągłą.

Oznaczmy przez $(\beta_p(\cdot))_{p\in\mathcal{P}}$ miarę niezwartości Sadowskiego (zob. [S1] dla definicji oraz podstawowych własności tej miary).
Podobnie jak w pracy Pianigiani'ego [P1], definiujemy

$$\varphi_p(t,X) = \lim_{r\to 0^+} \beta_p(f(I_{tr} \times X)) \ \text{ dla } t \in (0,a) \text{ oraz } X \subset B,$$

gdzie $I_{tr} = (t-r,t+r) \cap I$. Ponadto, niech $B_p(0,r) = \{x \in E: \ p(x) \leqslant r\}$, $p \in \mathcal{P}$.

Twierdzenie 33 ([10], Theorem 1)**.** *Załóżmy, że dla każdej seminormy $p \in \mathcal{P}$, istnieje ciągła funkcja u_p, zdefiniowana na przedziale I i taka, że $u_p(t) > 0$ dla $t > 0$, $u_p(0) = \ldots = u_p^{(n-1)}(0) = 0$, $u_p^{(n)}$ jest dodatnia i całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz*

$$\varphi_p(t,X) \leqslant \frac{u_p^{(n)}(t)}{u_p(t)} \beta_p(X)$$

dla $t \in (0,a)$ oraz dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset B$, oraz

$$\lim_{\substack{t\to 0^+\\ r\to 0^+}} \frac{\beta_p(f(t,B_p(0,r)))}{u_p^{(n)}(t)} = 0.$$

Wówczas istnieje przedział $J = [0, d] \subset I$ taki, że zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia (17), zdefiniowanych na J i rozważanych jako podzbiór przestrzeni $C(J, \mathbb{E})$ wszystkich funkcji ciągłych z topologią zbieżności jednostajnej, jest niepusty, spójny i zwarty.

Dodam, że założenie wyrażone w języku miary niezwartości Sadowskiego, które występuje w powyższym twierdzeniu, jest motywowane pracą A. Constantina [C4].

Dowód Twierdzenia 33 jest dość długi i technicznie złożony. W pracy [12] podałam inny dowód Twierdzenia 33 w oparciu o zasadę spójności pochodzącą z pracy [R].

Praca [9] to artykuł przeglądowy, w którym autorzy przedstawili swoje wyniki dotyczące istnienia oraz topologicznych własności zbiorów rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych w przestrzeniach lokalnie wypukłych (w szczególności, w ciągowo zupełnych przestrzeniach wypukłych, które zawierają zwartą beczkę).

3.2.3. *Nieliniowe równania różniczkowe wykorzystujące całki nieabsolutnie zbieżne.* Prace [1] oraz [4] dotyczą równań różniczkowych n-tego rzędu, sformułowanych z użyciem pochodnych aproksymatywnych. Tego typu pochodna wydaje się być jednym z ważniejszych uogólnień klasycznej pochodnej. Jest ona mocno związana z pojęciem całki Denjoy (zob. np. [S2]). Przypomnijmy, że w pracy [BS] Bullen i Sarkhel udowodnili uogólnienie twierdzenia Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego dla równania pierwszego rzędu, sformułowanego przy użyciu pochodnej aproksymatywnej. Rozważmy zagadnienie

$$x_{ap}^{(n)}(t) = f(t, x), \quad x_{ap}^{(i)}(t_0) = x_i, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{18}$$

gdzie $I = [t_0, t_0 + a]$ jest zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant b\}$, $a, b > 0$, $f : I \times B \to \mathbb{R}$ oraz $x_{ap}^{(i)}$ oznacza i-tą pochodną aproksymatywną funkcji x, $i = 1, \ldots, n$. Załóżmy, że

61^0 $t \to f(t, x)$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a dla każdego $x \in B$;

62^0 $x \to f(t, x)$ jest funkcją ciągłą dla prawie wszystkich $t \in I$;

63^0 istnieją dwie funkcje całkowalne w sensie Denjoy $m : I \to \mathbb{R}$, $M : I \to \mathbb{R}$ takie, że

$$m(t) \leqslant f(t, x) \leqslant M(t) \text{ dla każdej pary } (t, x) \in I \times B.$$

Twierdzenie 34 ([1], Theorem)**.** *Przy powyższych założeniach istnieje przedział $J \subset I$ taki, że zbiór wszystkich uogólnionych rozwiązań zagadnienia (18), zdefiniowanych na J, jest typu R_δ.*

Uogólnienie powyższego twierdzenia na przypadek równania

$$x_{ap}^{(n)} = f\left(t, x, x'_{ap}, x''_{ap}, \dots, x_{ap}^{(n-1)}\right), \qquad (19)$$
$$x_{ap}^{(i)}(t_0) = x_i,\ i = 0, \dots, n-1,$$

zostało udowodnione w pracy [4]. Dowody tych twierdzeń są oparte na twierdzeniu Vidossich'a dla odwzorowań zwartych (zob. [V]).

W pracy [19] badaliśmy w szczególności problem istnienia uogólnionych rozwiązań zagadnienia (18), które są zawarte pomiędzy dwiema a'priori danymi funkcjami. Przyjmijmy, że $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T > 0$ oraz, że spełnione są odpowiedniki warunków 61^0, 62^0. Założenie 63^0 przyjmuje postać

64^0 dla każdego $c > 0$ istnieją dwie funkcje całkowalne w sensie Denjoy $m_c, M_c : [0,T] \to \mathbb{R}$, takie, że

$$m_c(t) \leqslant f(t,x) \leqslant M_c(t)$$

dla wszystkich $t \in [0,T]$ oraz $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x| \leqslant c$.

Załóżmy ponadto,że istnieją dwie funkcje $s^0, s^1 : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ takie, że

65^0 $s^j = b^j + c^j$, gdzie $c^j \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ oraz b^j są funkcjami ograniczonymi o ograniczonej uogólnionej wariacji na $[0,T]$ dla $j = 0,1$ (zakładamy tutaj, że przedział $[0,T]$ może być przedstawiony jako przeliczalna suma zbiorów mierzalnych, na każdym z których funkcje b^j posiadają ograniczoną wariację w sensie Jordana);

66^0 $s_1^1(0^+) \leqslant x_0 \leqslant s_1^0(0^+)$, $s_i^1(t) \leqslant s_i^0(t)$ dla wszystkich $t \in [0,T]$ oraz $i = 1, \dots, n$;

67^0 $(D)\int_a^b f(t, s_1^0(t))\ dt \leqslant s_1^0(b^-) - s_1^0(a^+)$, $(D)\int_a^b f(t, s_1^1(t))\ dt \geqslant s_1^1(b^-) - s_1^1(a^+)$ dla wszystkich $a, b \in [0,T]$, $a < b$ (symbol "$(D)\int_a^b$" oznacza tutaj całkę Denjoy na przedziale $[a,b]$).

Głównym wynikiem z pracy [19] jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 35 ([19], Theorem 1)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunki* 61^0*,* 62^0*,* 64^0*-*67^0*. Wówczas zagadnienie* (18) *posiada rozwiązanie* x *takie, że*

$$s_i^1(t) \leqslant x_{ap}^{(i-1)}(t) \leqslant s_i^0(t)$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$ *oraz prawie wszystkich* $t \in [0,T]$*.*

Podobnego typu wynik otrzymaliśmy w pracy [19] również dla następującego zagadnienia Darboux

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2_{ap} z}{\partial x \partial y} = f(x,y,z), \quad \text{dla prawie wszystkich } (x,y) \in A,\\ &z(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a_1,\\ &z(0,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant a_2, \end{aligned}$$

gdzie $A = [0,a_1] \times [0,a_2]$, $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\frac{\partial^2_{ap} z}{\partial x \partial y}$ oznacza aproksymatywną pochodną mieszaną funkcji z.

W dowodach tych twierdzeń wykorzystaliśmy, w szczególności, twierdzenie Schaudera o punkcie stałym.

Podobnego typu wynik dla uogólnionych rozwiązań zagadnienia (13), rozważanego przy użyciu całki Denjoy-Perrona, udowodniliśmy w pracy [14]. W artykule tym udowodniliśmy również twierdzenia dotyczące istnienia oraz topologicznej struktury zbiorów globalnych uogólnionych rozwiązań dla tego zagadnienia, przy różnych warunkach wzrostu, narzuconych na funkcje generującą to równanie. Zacytujmy przykładowo jeden z tych wyników.

Załóżmy, że funkcja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia odpowiedniki warunków 61^0-63^0. Zauważmy, iż w szczególności implikują one, że f może być przedstawiona w postaci

$$f(s,y) = \tilde{f}(s,y) + g(s),$$

gdzie $\tilde{f}$ jest funkcją L^1-Carathéodory'ego, a g jest funkcją całkowalną w sensie Denjoy-Perrona.

Twierdzenie 36 ([14], Theorem 6)**.** *Załóżmy, że* $\tilde{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *jest funkcją spełniającą założenia typu* 61^0, 62^0. *Dodatkowo przyjmijmy,że* $|\tilde{f}(t,x)| \leqslant \Psi(|x|)$, *gdzie* $\Psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *jest funkcją niemalejącą, przyjmującą prawie wszędzie wartości dodatnie. Wówczas zagadnienie* (13) *posiada globalne, uogólnione rozwiązanie określone na przedziale dla każdego*

$$T < \int\limits_{|x_0|+c}^{+\infty} \frac{du}{\Psi(u)} = T_\infty, \quad \textit{gdzie } c = \sup_{s\in[0,T]} |(D-P)\int\limits_0^s g(v)\ dv|.$$

Dowód Twierdzenia 36 jest oparty na pewnym twierdzeniu typu Leray-Schaudera, pochodzącym z pracy Granasa [G2]. Z kolei w dowodach twierdzeń zawartych w pracy [14], które dotyczą własności topologicznych zbiorów globalnych, uogólnionych rozwiązań zagadnienia (13), wykorzystaliśmy idee pochodzące z pracy [7].

3.2.4. *Równania różniczkowe zawierające pochodne rzędu ułamkowego.* Prace [13], [17] oraz [21] dotyczą twierdzeń o istnieniu i jedyności, a także topologicznych własności zbiorów rozwiązań pewnych zagadnień sformułowanych przy użyciu pochodnych rzędu ułamkowego, a dokładniej pochodnej typu Riemanna-Liouville'a. W ostatnich latach opublikowano szereg prac dotyczących tego typu równań. Jest to związane, w szczególności z faktem, że tego typu równania posiadają zastosowania w różnych dziedzinach. Zwróćmy uwagę przykładowo na procesy subdyfuzji, w opisie których pochodne rzędu ułamkowego pojawiają się w sposób naturalny (zob. np. [KL]).

W pracy [17] udowodniłam twierdzenia typu Aronszajna dla następujących zagadnień rzędu ułamkowego

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= f(t,x), \quad \alpha \in (0,1], \\ x^{(\alpha-1)}(t_0) &= x_0, \quad t \in I, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} x_i^{(\alpha)} &= f_i(t,x_1,\dots,x_n), \quad \alpha \in (0,1], \\ x_i^{(\alpha-1)}(t_0) &= x_i^0, \quad i=1,\dots,n,\ t \in I, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} x^{(n\alpha)}(t) &= f(t,x^{(\alpha)},x^{(2\alpha)},\dots,x^{((n-1)\alpha)}), \quad \alpha \in (0,1], \\ x^{(k\alpha-1)}(t_0) &= x_k^0, \quad k=1,\dots,n,\ t \in I, \end{aligned} \tag{23}$$

gdzie $I = (t_0, t_0+a]$ jest zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$ $(a > 0)$.

Według mojej najlepszej wiedzy, praca [17] jest pierwszą w literaturze pracą, w której zbadano własność Aronszajna dla równań z pochodnymi rzędu ułamkowego. Zacytujmy przykładowo wynik dla zagadnienia (21). Niech Γ oznacza funkcję Gamma, $B = \left\{x \in \mathbb{R} :\ |x - \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)}| \leqslant b\right\}$ dla pewnego $b > 0$ i niech $f : I \times B \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą.

Twierdzenie 37 ([17], Theorem 3)**.** *Istnieje przedział $T \subset I$ taki, że zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia* (21)*, zdefiniowanych na T i rozważanych jako podzbiór przestrzeni $C_F(T,\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $T \to \mathbb{R}$ z topologią zbieżności niemal jednostajnej, jest typu R_δ.*

Głównym narzędziem stosowanym w dowodach twierdzeń z pracy [17] jest twierdzenie Vidossich'a dla operatorów zwartych (zob. [V]), jednakże dodam, że zastosowania tego twierdzenia w tym artykule, ze względu na naturę pochodnych typu Riemanna-Liouville'a, mają dość subtelny charakter.

W pracy [13] zbadaliśmy problem istnienia i jedyności dodatnich rozwiązań zagadnienia (21), gdzie $x_0 \geqslant 0$, $f : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $I = (t_0, t_0 + a]$ oraz $a \in (0, 1)$. Załóżmy, że

68^0 f jest funkcją ciągłą i ograniczoną;

69^0 $\bigwedge_{t\in I} f(t, 0) > 0$ oraz $f(t, \cdot)$ jest funkcją malejącą;

70^0 $\bigvee_{m\in(0,1)} \bigwedge_{t\in I} \bigwedge_{x>0} mf(t, 0) \leqslant f(t, x)$;

71^0 $\bigwedge_{\lambda\in(0,1)} \bigvee_{\bar{\eta}\in[1,\frac{1}{\lambda})} \bigwedge_{t\in I} \bigwedge_{x\in[0,+\infty)} f(t, \lambda x) \leqslant \bar{\eta} f(t, x)$.

Głównym wynikiem udowodnionym w pracy [13] jest następujące

Twierdzenie 38 ([13], Theorem 1)**.** *Przy powyższych założeniach, istnieje jedyne, dodatnie rozwiązanie zagadnienia* (21)*, zdefiniowane na przedziale I.*

Dowód powyższego twierdzenia jest oparty na pewnym twierdzeniu o punkcie stałym dla operatorów zgęszczających, określonych na stożku normalnym (zob. [GL]).

Artykuł [21] jest rozszerzeniem wyników z prac [13, 17] na przypadek następujących zagadnień z pochodnymi rzędu ułamkowego:

$$
\begin{aligned}
&x^{(\alpha)}(t) = f(t, x), \quad \alpha \in (n-1, n),\\
&x^{(\alpha-k)}(0) = x_k, \quad (k = 1, \ldots, n),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

gdzie $I = (0, a]$, $a > 0$, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $x_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 1, \ldots, n$ oraz n jest jest pewną ustaloną liczbą naturalną, a także

$$
\begin{aligned}
&x^{(\alpha_n)}(t) - a_{n-1}x^{(\alpha_{n-1})}(t) - \ldots - a_1 x^{(\alpha_1)}(t) = f(t, x),\\
&x(0) = 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

gdzie $t \in \bar{I}$, $f : \bar{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < 1$ oraz $a_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 1, \ldots, n-1$.

3.2.5. *Uogólnione warunki Carathéodory'ego.* Praca [6] różni się od pozostałych prac w moim dorobku. Dotyczy ona tak zwanych uogólnionych warunków Carathéodory'ego, wprowadzonych przez Grandego w pracy [G3]. Niech $I = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$, będzie zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leqslant b\}$ i niech $f : I \times B \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że funkcja f spełnia klasyczne warunki Carathéodory'ego (krótko (C) warunki), jeżeli

72^0 prawie wszystkie funkcje $f_t(x) = f(t, x)$ $(t \in I,\ x \in B)$ są ciągłe;

73^0 wszystkie funkcje $f^x(t) = f(t, x)$ $(t \in I,\ x \in B)$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a;

74^0 istnieje funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a $m : I \to \mathbb{R}_+$ taka, że $|f(t,x)| \leqslant m(t)$ dla każdej pary $(t,x) \in I \times B$.

Przypomnijmy, że warunki (C) implikują, że zagadnienie (13) (z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$) posiada lokalne rozwiązanie w sensie Carathéodory'ego.

Mówimy, że funkcja $f : I \times B \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunki (G) (zob. [G3]), jeśli

75^0 dla każdej funkcji ciągłej $h : I \to B$, superpozycja $t \to f(t, h(t))$, $t \in I$, jest mierzalna w sensie Lebesgue'a;

76^0 istnieje funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a $m : I \to \mathbb{R}_+$ taka, że $\|f(t,x)\| \leqslant m(t)$ dla każdej pary $(t,x) \in I \times B$;

77^0 istnieje ciąg funkcji $f_k : I \times B \to \mathbb{R}^n$, spełniających warunki (C) z nierównościami $\|f_k(t,x)\| \leqslant m(t)$ dla $(t,x) \in I \times B$, $k \in \mathbb{N}$ i taki, że dla każdego podciągu (f_{n_k}), dla każdego ciągu funkcji ciągłych $g_n : I \to B$, który jest zbieżny na przedziale I do funkcji g, i dla każdego $t \in I$, istnieje ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_i) taki, że

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t} f_{k_{n_i}}(s, g_{n_i}(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

Grande udowodnił, że warunki (G) gwarantują istnienie lokalnego rozwiązania zagadnienia (13) w sensie Carthéodory'ego.

Niech $\tilde{B} = \{z \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|z(s) - x_0\| \leqslant b$ dla każdego $s \in I\}$. Jeśli zastąpimy warunek 77^0 następującym warunkiem

78^0 jeśli $z_n, z \in \tilde{B}$ (dla $n \in \mathbb{N}$) oraz $z_n \to z$ jednostajnie na I, to

$$\int_{t_0}^{t} f(s, z_n(s))ds \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds \quad \text{dla każdego } t \in I,$$

to mówimy, że funkcja f spełnia warunki (CL).

W pracy [5] wykazaliśmy, że jeśli funkcja $f : I \times B \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunki (G), to spełnia warunki (CL) i ponadto udowodniliśmy twierdzenie typy Aronszajna dla zagadnienia (13), w którym funkcja występująca po prawej stronie spełnia warunki (G).

W notce [2], opublikowanej w materiałach konferencyjnych, zastosowaliśmy warunki (G) do badania zagadnienia Cauchy'ego (13), z wykorzystaniem całki Denjoy-Perrona.

Na zakończenie dodam, że w pracy [B2] autor udowodnił, że faktycznie warunki (G) i (CL) są równoważne.

4. Informacje dodatkowe

4.1. Wskaźniki dodatkowe.

- *Sumaryczny impact factor publikacji naukowych, zgodnie z rokiem publikacji*: 10,157
- *Liczba cytowań publikacji według bazy*:
  Web Of Science 20 (liczba ta zawiera również cytowania prac opublikowanych pod panieńskim nazwiskiem D. Wójtowicz)
  Scopus 28 (liczba ta zawiera również cytowania prac opublikowanych pod panieńskim nazwiskiem D. Wójtowicz)
  Mathematical Reviews 20
  Ponadto, w bazie Google Scolar znajduje sie 6 cytowań mojego Doktoratu (który nie był opublikowany) przez innych Autorów.
- *Indeks Hirscha opublikowanych publikacji według bazy* :
  Web of Science 2
  Scopus 3

4.2. Udział w projektach badawczych.

- Grant Naukowy Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GN-03/02-wykonawca
- Grant Naukowy Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GN-01/03-wykonawca
- Grant Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej na wyjazd na konferencję z serii Dynamical Systems, Differential Equations and Applications
- Grant Naukowy Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GN-02/2012-kierownik
- Grant Dydaktyczny Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GD-02/2013/KZ-kierownik

4.3. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych.

- Prague Mathematical Conference, Praga (Czechy), 8-12 lipca 1996,
  odczyt: On generalized Carathéodory's conditions in ordinary differential equations (wspólny z D. Bugajewskim).
- 3rd International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Acquafredda di Maratea (Włochy), 23-28 września 1996,
  odczyt: On some applications of Kuratowski measure of noncompactness to differential equations in Banach spaces.

- Conference on Differential Equations and Their Applications (Equadiff 9), Brno (Czechy), 25-29 sierpnia 1997,
  odczyt: On the structure of solution sets of some differential equations in Banach spaces.
- Colloquim on Differential and Difference Equations, Brno (Czechy), 5-9 września 2000,
  odczyt: Knesers's property for differential equations in locally convex spaces.
- International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Haifa (Izrael), 13-19 czerwca 2001,
  wykład: On topological structure of fixed point sets of some nonlinear operators.
- The Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Wilmington (USA), 24-27 maja 2002,
  odczyt: Topological properties of solution sets of nonlinear differential equations of generalized order.
- International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Valencia (Hiszpania), 13-19 lipca 2003,
  odczyt: On some applications of different fixed point theorem to differential and integral equations via nonabsolute convergent integrals.
- The Centenary Orlicz Conference and Function Spaces VII, Poznań, 21-25 lipca 2003,
  odczyt: On Λ-bounded variation in the theory of nonlinear integral equations.
- Function Spaces IX, Kraków, 6-10 lipca 2009,
  odczyt: On superposition operators in spaces of functions of bounded variations with applications to nonlinear integral equations.
- International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca (Rumunia), 5-8 lipca 2011,
  wykład: On solutions of nonlinear integral equations in spaces of functions of bounded variation of different types.

4.4. **Wykłady wygłaszane w Uniwersytetach lub innych instytucjach naukowych.**

- Minisemestr w Centrum Banacha: Differential Inclusions and Optimal Control, Warszawa, 22 września-2 października 1997,
- Seminarium "Nonlinear Analysis", Morgan State University, USA, wrzesień 2007.

- Wykład w Department of Mathematics, Morgan State University, USA, kwiecień, 2008.
- Wykłady w Department of Mathematics, Morgan State University, USA, kwiecień-maj 2009.

4.5. **Udział w konferencjach bez wygłoszenia odczytu.**

- Sesja Naukowa poświęcona pamięci Profesora Władysława Orlicza, Będlewo, 27-29 września 2000.
- Function Spaces VI, Wrocław, 3-8 września 2001.
- 6 European Congress of Mathematics, Kraków, 2-7 lipca 2012.
- Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu, Kraków, 3-5 lipca 2013.

4.6. **Udział w komitetach organizacyjnych.**

- Członek Global Organizing Commettee międzynarodowej konferencji *The 6th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 22-26.05.2008, Baltimore, USA*,
- Współorganizator sesji *Topological Methods in Nonlinear Analysis* podczas *The 6th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 22-26.05.2008, Baltimore, USA*.

4.7. **Udział w komitetach redakcyjnych czasopism.**

- Global Journal of Pure and Applied Mathematics,
- International Journal od Management Science and Engineering Management,
- Pacific-Asian Journal of Mathematics

4.8. **Recenzje projektów badawczych.**

- Roustaveli Fundation, Georgia - recenzje 2 grantów naukowych

4.9. **Recenzje dla międzynarodowych i krajowych czasopism naukowych.**

- Commentationes Mathematicae (sekretarz w latach 2004-2005)
- Abstract and Applied Analysis
- African Diaspora Jurnal of Mathematics
- Applied Mathematics Letters
- Archivum Mathematicum
- Communications in Mathematical Analysis
- Computers and Mathematics with Applications
- Fractional Differential Calculus
- Journal of Analysis and Applications
- Journal of Applied Analysis

- Journal of Integral Equations and Applications
- Journal of Mathematical Analysis and Applications
- Mathematical and Computer Modelling
- Mathematical Reviews
- Proceedings of American Mathematical Society
- Quaestiones Mathematicae
- Topological Methods in Nonlinear Analysis
- Zentralblatt MATH

4.10. **Rodzaje prowadzonych zajęć dydaktycznych.**

- Wykłady:
  - analiza matematyczna,
  - równania różniczkowe cząstkowe,
  - matematyka dla studentów Wydziału Chemii.
- Ćwiczenia:
  - analiza matematyczna,
  - analiza matematyczna dla informatyków,
  - równania różniczkowe zwyczajne,
  - równania różniczkowe cząstkowe,
  - teoria mnogości,
  - repetytorium z matematyki elementarnej,
  - matematyka dla studentów Wydziału Chemii.

Literatura

[AZ] J. Appell and P.P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, 1990.

[AT] K. Asano and W. Tutschke, *An extended Cauchy-Kovalevskaya problem and its solution in associated spaces*, Z. Anal. Anwend. **21** (2002), no. 4, 1055-1060.

[BG] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of Noncompactnes in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 60, Marcel Dekker, New York and Basel, 1980.

[BBZ] M. Borkowski, D. Bugajewski, and M. Zima, *On some fixed point theorems for generalized contractions and their perturbations*, J. Math. Anal. Appl. **367** (2010), 464-475.

[B1] D. Bugajewski, *On BV-solutions of some nonlinear integral equations*, Int. Eq. Op. Th. **46** (2003), 387-398.

[B2] ______, *On Carathéodory's conditions revisited*, Real Anal. Exchange **25(2)** (1999/2000), 899-906.

[BK] D. Bugajewski and P. Kasprzak, *On mappings of higher order and their applications to nonlinear equations*, Comm. Pure Appl. Anal. **11(2)** (2012), 627-647.

[BS] P.S. Bullen and D.N. Sarkhel, *On the solution of $(\frac{dy}{dx})_{ap} = f(x,y)$*, J. Math. Anal. Appl. **127** (1987), 365-376.

[CO] J. Ciemnoczłowski and W. Orlicz, *Composing functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **96,3** (1986), 431 - 436.

[CL] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1955.

[C1] E. Cohen, *On the degree of approximation of a function by the partial sums of its Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 35-74.

[C2] ______, *On the Fourier coefficients and continuity of functions of class V_ϕ^**, Rocky Mountains J. Math. **9** (1979), 227-237.

[C3] A. Constantin, *Global existence of solutions for perturbed differential equations*, Ann. Math. Pura. Appl. **4(68)** (1995), 237-299.

[C4] ______, *On the unicity of solution for the differential equation $x^{(n)} = f(t,x)$*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II **42** (1991), 59-64.

[ČD] V. G. Čelidze and A. G. Džvaršeĭšvili, *The Theory of the Denjoy Integral and Some Applications*, Series in Real Analysis, vol. 3, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989.

[D] R.D. Driver, *Existence theory for a delay differential system*, Contrib. Differential Equations **1** (1963).

[G1] S. Gniłka, *On the generalized Helly's theorem*, Functiones at Approximatio **4** (1976), 109-112.

[G2] A. Granas, *Sur la méthode de continuité de Poincare*, C.R. Acad. Sci. Paris **282** (1976), 983-985.

[G3] Z. Grande, *On an integral equation*, Math. Pannonica **4(1)** (1993), 95-101.

[GM] S. I. Grossman and R. K. Miller, *Perturbation theory for Volterra integro-differential systems*, J. Differential Equations **8** (1970), 457-474.

[GL] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, New York, 1988.

[H] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[HYS] T. Hara, T. Yoneyama, and J. Sugie, *Continuability of solutions of perturbed differential equations*, Nonlinear Analysis, TMA **8** (1984), 963-975.

[HKS] S. Heikkilä, M. Kumpulainen, and S. Seikkala, *On functional improper Volterra integral equations and impulsive differential equations in ordered Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), no. 1, 433-444.

[J1] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci., Paris (1881), 228–230.

[J2] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **83(2)** (1981), 354–356.

[KL] T. Kosztołowicz and K. Lewandowska, *Time evolution of the reaction front in a subdiffusive system*, Physical Review E **78** (2008).

[K] Kubáček, *On the structure of the solution set of functional differential system on an unbounded interval*, Arch. Math. **35** (1999), 215-228.

[LO] R. Leśniewicz and W. Orlicz, *On generalized variations II*, Studia Math. **45** (1973), 71-109.

[L] A.G. Ljamin, *On the acting problem for the Nemytskij operator in the space of functions of bounded variation*, 11^{th} School Theory Oper. Function Spaces, Chel'jabinsk (1986), 63–63 (Russian).

[M] P. Maćkowiak, *A counterexample to Ljamin's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[MO] L. Maligranda and W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Monatsh. Math. **104** (1987), 53-65.

[M] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1034, Springer, 1983.

[MO1] J. Musielak and W. Orlicz, *On generalized variations I*, Studia Math. **18** (1959), 11–41.

[MO2] ———, *On modular space*, Studia Math. **18** (1959), 49–65.

[O] D. O'Regan, *Fixed point theorems for nonlinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 413-432.

[P1] G. Pianigiani, *Existence of solutions of an ordinary differential equation in the case of Banach space*, Bull. Ac. Polon.: Math. **8** (1960), 667-673.

[P2] A. Piskorek, *Równania Całkowe*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1980.

[R] M. Reichert, *Condensing Volterra operators in locally convex spaces*, Analysis **16** (1996), 347-364.

[S1] B.N. Sadovski, *Limit-compact and condensing mappings*, Russian Math. Surveys **27** (1972), 81-146.

[S2] S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa, Lwów, 1937.

[S3] S. Szufla, *Solution sets on nonlinear equation*, Bull. Acad. Polon. Scien. **11** (1973), 971-976.

[S4] ———, *On the structure of solution sets on nonlinear equations*, Proceedings of the Conference: Diff. Eq. Optimal Control, Zielona Góra (1989), 33-39.

[V] G. Vidossich, *A fixed-point theorem for function spaces*, J. Math. Anal. and Appl. **36** (1971), 581-587.

[W1] D. Waterman, *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Studia Math. **44** (1972), 107-117.

[W2] ———, *On Λ-bounded variation*, Studia Math. **57** (1976), 33-45.

[Y1] L.C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p^{ieme} bornée au sens de N. Wiener et sur la convergence des séries de Fourier*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A **204** (1937), 470-472.

[Y2] ———, *General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series*, Math. Ann. **115** (1938), 581-612.

D. Bugajewska