Autoreferat

DR MICHAŁ JASICZAK

Jestem autorem 14 prac z czego 12 zostało opublikowanych, 11 po uzyskaniu stopnia doktora w 2004 roku. Osiągnięcie, o którym mowa w Ustawie o stopniach i tytule naukowym stanowi cykl 7 prac:

J1 M. Jasiczak, *Generators of the algebra of holomorphic functions with log-type growth*, Houston J. Math. **34** (2008), no. 2, 545-563.
J2 M. Jasiczak, *The Bézout equation for functions of log-type growth in convex domains of finite type*, Math. Nachr. 283 (2010), no. 5, 721-731.
J3 M. Jasiczak, *Division on a complex space with arbitrary singularities*, Funct. Approx. Comment. Math. 40 (2009), part 2, 327-339.
J4 M. Jasiczak, *Carleson embedding theorem on convex finite type domains*, J. Math. Anal. Appl. 362 (2010), no. 1, 167-189.
J5 M. Jasiczak, *Extension and restriction of holomorphic functions on convex finite type domains*, Illinois J. Math. 54 (2010), no. 2, 509-542.
J6 M. Jasiczak, *Restriction of holomorphic functions on finite type domains in* $\mathbb{C}^2$, Manuscripta Math. 133 (2010), no. 1-2, 1-18.
J7 M. Jasiczak *Remark on zero sets of holomorphic functions in convex domains of finite type*, Canad. Math. Bull. 53 (2010), no. 2, 311-320.

pod tytułem:

PROBLEM PODZIELNOŚCI I INTERPOLACJI DLA FUNKCJI HOLOMORFICZNYCH WIELU ZMIENNYCH.

W szczególności osiągnięciem tym jest:

(1) rozwiązanie równania Bézout w klasie funkcji o logarytmicznym wzroście na obszarach silnie pseudowypukłych (praca J1), wypukłych obszarach skończonego typu (praca J2) i na przestrzeniach zespolonych dla funkcji znikających w otoczeniu osobliwości (praca J3),
(2) rozwiązanie problemu interpolacji z podrozmaitości kowymiaru 1 na wypukłych obszarach skończonego typu w klasie przestrzeni Bergmana (praca J5) oraz wykazanie warunków koniecznych interpolacji na obszarach skończonego typu w $\mathbb{C}^2$ (praca J6),
(3) dowód nierówności Carlesona na wypukłych obszarach skończonego typu (praca J4).

Najsilniejszym wynikiem zawartym w pracach składających się na habilitację jest dowód nierówności Carleson-Hörmandera w J4. Praca J5 z kolei zawiera przy przyjętych założeniach pełne rozwiązanie, to znaczy warunek konieczny i wystarczający, problemu interpolacji z podrozmaitości kowymiaru jeden w klasie przestrzeni Bergmana na wypukłych obszarach skończonego typu.

Prace wchodzące w skład habilitacji nie były dotychczas cytowane. Pozostałe prace były cytowane 5 razy a indeks Hirscha wynosi 2. Łączny impact factor wynosi 5.111.

Prace J1-J7 dotyczą teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych. Poniżej przedstawię uzyskane w nich wyniki, motywacje badań oraz naszkicuję metody dowodów. W dalszej części autoreferatu przedstawię wyniki zawarte w pozostałych moich pracach, tych, które nie są częścią habilitacji. Na koniec autoreferatu (po bibliografii) przedstawię informacje dotyczące mojego wykształcenia i życia zawodowego.

Ważnym i nierozwiązanym problemem analizy, teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych w szczególności, jest tak zwany problem korony. Polega on na odpowiedzi na pytanie czy jeżeli funkcje $f_1, \dots, f_m$ holomorficzne i ograniczone w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$ spełniają warunek

$$|f_1(z)|^2 + \dots + |f_m(z)|^2 \geq c > 0, z \in D \tag{1}$$

to istnieją funkcje $g_1, \dots, g_m \in H^\infty(D)$ – holomorficzne i ograniczone w D, takie, że

$$f_1 g_1 + \dots + f_n g_m = 1. \tag{2}$$

Problem ten ma równoważne sformułowanie w języku algebr Banacha. Tym równoważnym pytaniem, jest pytanie czy obszar D jest gęsty w topologii $*$-słabej w przestrzeni ideałów maksymalnych algebry $H^\infty(D)$.

Problem korony był źródłem wielu badań. Odpowiedź pozytywna znana jest w przypadku dysku $\mathbb{D}$. Jest ona treścią twierdzenia udowodnionego przez L. Carleson w 1962 roku [22]. W 1979 T. Wolff podał [42] prostszy dowód tego twierdzenia. W przypadku funkcji wielu zmiennych zespolonych nie jest znane rozwiązanie problemu korony nawet dla kuli. Problematyką tą zajmowano się między innymi w [6], [7], [8], [54], [55], [62], [63]. Wiadomo, że równanie (2) na obszarach ściśle pseudowypukłych, przy założeniu (1), ma rozwiązanie w $H^\infty \cdot BMOA$ ([6], [7], [8]). Symbol $BMOA$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w D, których wartości brzegowe mają ograniczone wahanie (należą do BMO).

Badano pewne modyfikacje równania (2). Pytano mianowicie dla jakich funkcji g równanie

$$\sum_{j=1}^{m} f_j g_j = g \tag{3}$$

ma rozwiązanie w zadanych przestrzeniach funkcyjnych [6], [62], [63]. Tak zmodyfikowany problem korony nazywa się często problemem mnożników lub podzielności, samo równanie (3) nazywa się równaniem Bézout. Dla przykładu równanie (3) ma rozwiązanie dla funkcji g należącej do przestrzeni Hardy'ego $H^2(bD)$ w przestrzeni $H^2(bD)$ [6] (to znaczy dla zadanego $g \in H^2(bD)$ istnieją funkcje $g_1, \dots, g_m \in H^2(bD)$, przy założeniu, że $f_j \in H^\infty, j = 1, \dots, m$ i spełniają założenie (1)).

Wyniki zawarte w pracach J1, J2 dotyczą problemu podzielności w algebrze funkcji holomorficznych, które spełniają warunek wzrostu

$$|f(z)| \leq C(-log\,\mathrm{dist}(z, bD))^k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnego $z \in D$ (możemy zakładać, że $\mathrm{dist}(z, bD) < 1$ dla każdego $z \in D$). O funkcjach takich mówi się, że są wzrostu logarytmicznego. Algebrę wszystkich funkcji holomorficznych o logarytmicznym wzroście oznaczać będziemy przez $HW(D)$, $LW(D)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych spełniających ten sam warunek wzrostu.

W pracy J1 udowodnione zostało następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech D będzie ograniczonym obszarem silnie pseudowypukłym o gładkim brzegu. Załóżmy, że $f_1, f_2 \in HW(D)$ spełniają warunek*

$$|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \gtrsim \left|\log dist(z, bD)\right|^{-k} \tag{4}$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Istnieją wówczas funkcje $g_1, g_2 \in HW(D)$ takie, że

$$f_1(z)g_1(z) + f_2(z)g_2(z) = 1. \tag{5}$$

Innymi słowy, funkcje f_1, f_2 spełniające warunek (4) generują algebrę wszystkich funkcji holomorficznych o wzroście logarytmicznym.

Przypomnijmy, że obszar D definiowany przez funkcję r

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : r(z) < 0\}$$

jest silnie pseudowypukły, jeżeli

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\zeta_j\bar{\zeta}_k > 0$$

dla dowolneqo $z \in bD$ oraz $\zeta \in T_z bD$.

Algebra HW pojawia się w pewnym sensie naturalnie w badaniach nad problemem korony. Uzasadnimy, że tak jest w istocie. Niektóre argumenty będą miały charakter heurystyczny. Argumenty, które dowodzą twierdzenia będą już w pełni ścisłe.

Metoda rozwiązania równania (3) sprowadza się do rozwiązania niejednorodnych równań Cauchy'ego-Riemanna. Mianowicie przyjmuje się, że

$$g_1 = \frac{\psi_1}{f_1} + uf_2,$$
$$g_2 = \frac{\psi_2}{f_2} - uf_1,$$

gdzie funkcje ψ_1, ψ_2 są tak dobrane, aby g_1, g_2 były poprawnie określone i rozwiązywały rówanie (5), a funkcja u tak, aby g_1, g_2 były holomorficzne. To oznacza, że musi być spełnione równanie $\overline{\partial} g_1 = \overline{\partial} g_2 = 0$, co z kolei prowadzi do $\overline{\partial}$-problemu, którego rozwiązaniem jest funkcja u. Równanie to jest postaci $\overline{\partial} u = \alpha\overline{\partial}\beta$ dla pewnych α, β. Weźmy pod uwagę rozwiązanie kanoniczne – jest to rozwiązanie prostopadłe do przestrzeni funkcji holomorficznych. Jest ono postaci $\overline{\partial}^* N$, gdzie

$\overline{\partial}^*$ jest operatorem sprzężonym z $\overline{\partial}$ (operator sprzężony z operatorem nieograniczonym) a N operatorem rozwiązującym $\overline{\partial}$-problem z warunkami brzegowymi Neumanna:

$$(\overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial})u = f, \text{ w } D$$
$$\overline{\partial}r \vee u = 0, \text{ na } bD$$
$$\overline{\partial}r \vee \overline{\partial}u = 0, \text{ na } bD.$$

Napiszmy

$$\overline{\partial}^* N\alpha\overline{\partial}\beta = \alpha\overline{\partial}^* N\overline{\partial}\beta + [\overline{\partial}^* N, M_\alpha]\overline{\partial}\beta,$$

gdzie M_α oznacza operator mnożenia przez α a $[\overline{\partial}^* N, M_\alpha]$ jest komutatorem operatorów $\overline{\partial}^* N$ i M_α. Innymi słowy, rozwiązanie u jest postaci

$$u = \overline{\partial}^* N\alpha\overline{\partial}\beta = \alpha(I - B)\beta + [\overline{\partial}^* N, M_\alpha]\overline{\partial}\beta, \tag{6}$$

gdzie B oznacza rzut Bergmana. Przypomnijmy, że jest to rzut ortogonalny na przestrzeni $L^2(D)$ na podprzestrzeń wszystkich funkcji holomorficznych. Tożsamość (6) pozwala nam argumentować, że własności rozwiązania u są związane z własnościami rzutu Bergmana. Argument ten opiera się na prawdziwej w wielu przypadkach własności komutatora dwóch operatorów. Jest on "bardziej regularny niż złożenie". Okazuje się, było to przedmiotem doktoratu autora, że rzut Bergmana zachowuje własność wzrostu logarytmicznego. Stąd zainteresowanie algebrą $HW(D)$ w kontekście problemu korony, chociaż powyższe obserwacje nie są oczywiście dowodem.

Metoda dowodu twierdzenia 1 motywowana powyższymi obserwacjami polega na wykorzystaniu wzorów całkowych rozwiązujących $\overline{\partial}$-problem z warunkami brzegowymi Neumanna. Wzory takie zostały podane przez I. Lieba oraz R. M. Range [51], [52], [53].

Dokładniej, aby udowodnić twierdzenie 1 należy pokazać, że $Z_i A_2 h^i, i = 1, \ldots, n-1$, $Z_n P^{1-n} h^n$ należą do LW a $f X\rho^{2-2n} h^i, 1 \leq i \leq n$ należy do $BMOW$, gdzie h^i są współczynnikami formy różniczkowej $\frac{\overline{\partial}\psi_2}{f_1 f_2}$ w specjalnie dobranym układzie współrzędnych a f funkcją należącą do HW. Symbole $Z_1, \ldots, Z_n$ oznaczają pola wektorowe w kierunkach zdefiniowanych przez specjalne współrzędne, a X dowolne gładkie pole wektorowe. Przestrzeń $BMOW$ jest na mocy definicji sumą przestrzeni

$$BMO(\mu_k) = \left\{ f \text{ mierzalna: } \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\mu_k(Q)} \int_Q |f - f_Q| dV < \infty \right\},$$

gdzie $\mathcal{Q}$ jest rodziną kul o promieniach porównywalnych z odległością od brzegu obszaru a μ_k jest miarą $|\log|\cdot||^k dV$, $k \in \mathbb{N}$ a f_Q oznacza wartość średnią f na kuli Q.

Wyjaśnienie pozostałych użytych symboli wymaga przytoczenia pewnych informacji o rachunku operatorów wprowadzonym w [51], [52], [53] przez I. Lieba and R. M. Range i opisanym przez I. Lieba i J Michela w monografii [50]. Cechą charakterystyczną tego rachunku jest odróżnienie kierunków normalnych i stycznych do poziomic obszaru. Operator N rozwiązujący $\overline{\partial}$-problem Neumanna dla 1-form jest operatorem całkowym o jądrze, które jest podwójną formą różniczkową.

$$\mathcal{N}_1 = 2^{n-2}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n(n-3)!\Bigg[\sum_{0\le s\le n-3}\frac{(n-s-2)(s+1)}{n-s-2}\frac{1}{\Phi^{2+s}P^{n-s-2}}$$

$$+(n-2)\frac{2\bar{\Phi}}{\Phi P^{n-1}}\Bigg]\mathbf{t}+\frac{(n-2)!}{2\pi^n}\frac{1}{\rho^{2n-2}}\mathbf{t}+\frac{-2^{n-1}(n-2)!}{2\pi^n}\frac{1}{P^{n-1}}\mathbf{n}+\frac{(n-2)!}{\rho^{2n-2}}\mathbf{n}.$$

Forma $\mathbf{t}$ zawiera, modulo wyrażenie zaniedbywalne, tylko formy dualne do stycznych pól wektorowych. Forma $\mathbf{n}$ tylko, poza zaniedbywalnym błędem, normalne. Funkcja Φ jest rozszerzonym wielomianem Leviego, czyli modyfikacją wyrażenia

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial z_j}(z)(w_j-z_j)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial z_k}(z)(w_j-z_j)(w_k-z_k).$$

Funkcja P jest na mocy definicji równa $\rho^2(\zeta,z)+2r(z)r(\zeta)$, gdzie $\rho(x,y)$ oznacza odległość punktów x i y w metryce Leviego

$$ds^2=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 r}{\partial z_i\partial \bar{z}_j}dz_i\otimes d\bar{z}_j.$$

Poszczególne wyrazy sumy definiującej operator $\mathcal{N}_1$ są pierwowzorem różnych klas operatorów. Formy definiujące tak zwaną klasę operatorów dopuszczalnych, w szczególności operator $\mathcal{A}_2$ – operator dopuszczalny typu 2, zawierają modulo funkcje gładkie tylko potęgi i sprzężenia funkcji P, Φ oraz funkcji definiującej r.

Dowód twierdzenia 1 polega na szczegółowej analizie własności tak zdefiniowanych operatorów całkowych na badanych klasach przestrzeni. Warto podkreślić, że metoda dowodu nie jest bezpośrednia i wykorzystuje między innymi tak zwane twierdzenie T1.

W pracy J2 analizowany jest przypadek wypukłych obszarów skończonego typu. Udowodnione twierdzenie brzmi:

Twierdzenie 2. *Niech D będzie ograniczonym, wypukłym obszarem skończonego typu o gładkim brzegu. Załóżmy, że funkcje $f_1,\dots,f_n$ spełniają warunek*

$$\sum_{j=1}^{m}|f_j(z)|\gtrsim|\log dist(z,bD)|^{-k}$$

dla pewnej liczby $k\in\mathbb{N}$. Wówczas istnieją funkcje $g_1,\dots,g_m\in HW(D)$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{m}f_jg_j=1.$$

Warunek skończonego typu, lub dokładniej skończonego 1-typu w sensie D'Angelo [29], jest uogólnieniem silnej pseudowypukłości. Obszary skończonego typu pojawiają się w badaniach dotyczących $\bar{\partial}$-problemu Neumanna. Są to te obszary, na których $\bar{\partial}$- problem Neumanna jest subeliptyczny. Mianowicie D. Catlin [24] udowodnił, że $\bar{\partial}$-problem dla q-form z warunkami brzegowymi Neumanna jest subeliptyczny wtedy i tylko wtedy, gdy obszar jest skończonego q-typu. Nie będziemy definiować precyzyjnie q-typu $D_q(z)$ ponieważ pojęcie to nie pojawia się w omawianych pracach. Ważne jest jedynie to, że subelliptyczność $\bar{\partial}$-problemu z warunkami brzegowymi Neumanna implikuje rozwiązanie problemu rozszerzania biholomorfizmów do brzegu [13]. Podsumowując warunki skończonego typu, istnieje kilka pojęć skończonego typu, mają ścisły związek z problemem rozszerzania biholomorfizmów. Dlatego analiza na tej klasie obszarów jest naturalna.

Punkt $p \in bD$ nazywa się punktem skończonego typu, jeżeli istnieje stała M taka, że

$$\Delta_1(p) = \sup_F \frac{\nu(r \circ F)}{\nu(F)} \leq M. \tag{7}$$

Jeżeli f jest gładką funkcją zdefiniowaną na pewnym otoczeniu 0, przyjmującą wartości zespolone, to $\nu(f)$ oznacza rząd znikania $f - f(0)$ w 0. Dla funkcji wektorowo-wartościowej $F = (f_1, \dots, f_n)$ przyjmujemy $\nu(F) = \min_i \nu(f_i)$. Supremum w (7) brane jest po wszystkich holomorficznych parametryzacjach jednowymiarowych analitycznych podzbiorów $\mathbb{C}^n$ takich, że $F(0) = p$.

Innymi słowy, punkt p jest punktem skończonego typu, jeżeli rząd styczności bD w p z kiełkami jednowymiarowych zbiorów analitycznych jest skończony.

Obszar D zdefiniowany przez funkcję r nazywa się obszarem skończonego typu, jeżeli każdy punkt brzegu bD jest punktem skończonego typu. Należy podkreślić, że w przypadku obszarów wypukłych, aby stwierdzić czy obszar jest skończonego typu wystarczy badać rząd styczności z prostymi zespolonymi [17], [57].

Dowód twierdzenia w pracy J2 w przypadku wypukłych obszarów skończonego typu polega na wykorzystaniu wzorów na rozwiązanie niejednorodnych równań Cauchy'ego-Riemanna skonstruowanych przez B. Berndtssona i M. Anderssona [14]. Wykorzystuje on także istnienie funkcji podpierających skonstruowanych dla wypukłych obszarów skończonego typu przez J. E. Fornaess i K. Diedericha [30] wraz z oszacowaniami dla tych funkcji z prac [37], [38].

Praca J3 dotyczy problemu podzielności na przestrzeni zespolonej dla funkcji holomorficznych znikających w otoczeniu osobliwości. Podobnie jak prace J1 i J2 metoda dowodu polega na analizie kompleksu Koszula rozwiniętej przez L. Hörmandera [49] i rozwiązaniu $\bar{\partial}$-problemu na przestrzeniach zespolonych podanym przez J. E. Fornaessa, N. Øvrelida i S. Vassiliadou [41].

Niech X będzie zredukowaną n-wymiarową przestrzenią Steina (czystego wymiaru n), A niech będzie podzbiorem analitycznym X niższego wymiaru zawierającym zbiór osobliwości X_{sing}. Zbiór Ω niech będzie otwartym i relatywnie zwartym obszarem Steina w X.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że funkcje $f_1, \dots, f_m \in H(\Omega)$ spełniają dla pewnego $\tilde{N}$ następujący warunek*

$$\sup_{\Omega'} d_A^{\tilde{N}} \Big(\sum_{j=1}^m |f_j|^2 \Big)^{-1} < \infty$$

dla każdego $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wówczas dla dowolnego $N_0 \geq 0$, istnieje $N \geq 0$ takie, że jeżeli F jest funkcją holomorficzną w Ω spełniającą warunek

$$\|F\|_{\Omega,N} := \int_\Omega |F|^2 d_A^{-N} dV < \infty,$$

to istnieją funkcje $g_1, \dots, g_m \in H(\Omega \setminus A)$ takie, że

$$\|g_j\|_{\Omega',N_0} := \int_{\Omega'} |g_j|^2 d_A^{-N_0} dV \leq C \|F\|_{\Omega,N}$$

dla dowolnego $\Omega' \subset\subset \Omega$ oraz

$$\sum_{j=1}^{m} f_j g_j = F$$

w zbiorze $\Omega^* := \Omega \setminus A$.

Symbol d_A oznacza odległość od zbioru A. Poprawne określenie odległości wynika z faktu, że pewne otoczenie Ω można zrealizować jako podrozmaitość otwartego polidysku w $\mathbb{C}^N$, dla pewnego $N > 0$. Pozwala to określić odległość między dwoma punktami jako odległość między ich obrazami w zanurzeniu. Podobnie możliwe jest określenie formy objętości.

Pierwszym krokiem w dowodzie tego twierdzenia jest wykorzystanie desyngularyzacji podobnie jak w [41]. Dokładniej, istnieje właściwa holomorficzna surjekcja $\pi\colon \tilde{X} \to X$ ([16], [9]) określona na n-wymiarowej rozmaitości zespolonej $\tilde{X}$. Przeciwobraz $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$ jest hiperpowierzchnią o bardzo szczególnej postaci. Mianowicie dla dowolnego punktu $z \in \tilde{A}$ istnieją holomorficzne współrzędne, w których $\tilde{A}$ jest postaci $z_1 \dots z_m = 0$, $1 \leq m \leq n$. Odwzorowanie π obcięte do zbioru $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$ jest biholomorfizmem na zbiór $X \setminus A$.

Najistotniejszym elementem dowodu jest twierdzenie udowodnione w pracy [41] uogólniające poprzedni wynik Y. T. Siu [64]:

Twierdzenie 4. *Dla dowolnych $q > 0$ and $k \geq 0$ istnieje liczba naturalna $l \geq k$ taka, że odwzorowanie*

$$i_*\colon H^q(\tilde{\Omega}, J^l \cdot \Omega^q) \to H^q(\tilde{\Omega}, J^k \cdot \Omega^p)$$

indukowane przez inkluzję $i\colon J^l \cdot \Omega^p \to J^k \cdot \Omega^p$, jest tożsamościowo równe 0.

Symbol $H^q(\tilde{\Omega}, J^l \cdot \Omega^q)$ oznacza q-grupę kohomologii zbioru $\tilde{\Omega}$ o wartościach w snopie $J^l \cdot \Omega^q$, gdzie J^l jest snopem ideałów zbioru $\tilde{A}$ a Ω^p snopem $\overline{\partial}$-zamkniętych $(p, 0)$-form. Twierdzenie 4 jest faktycznie twierdzeniem o istnieniu rozwiązania $\overline{\partial}$-problemu ponieważ

$$H^q(\tilde{\Omega}, J^k \cdot \Omega^p) \cong \frac{\ker(\overline{\partial}\colon J^k \cdot \mathcal{L}_{p,q}(\tilde{\Omega}) \to J^k \cdot \mathcal{L}_{p,q+1}(\tilde{\Omega}))}{\overline{\partial}(J^k \cdot \mathcal{L}_{p,q-1}(\tilde{\Omega}))}.$$

Dowód twierdzenia wymaga jeszcze przetłumaczenia własności algebraicznych na oszacowania w seminormach $\| \cdot \|_{\Omega', N}$ i odwrotnie. Takie własności, korzystające między innymi z nierówności Łojasiewicza [56] zostały udowodnione w [41] i w pracy J3.

Ważnym elementem dowodu twierdzenia o koronie dla dysku jest tak zwana nierówność Carlesona lub Carlesona-Hörmandera. Charakteryzuje ona te miary, dla których prawdziwa jest inkluzja

$$H^p(b\mathbb{D}) \hookrightarrow H^p(\mu),$$

gdzie $H^p(b\mathbb{D})$ oznacza przestrzeń Hardy'ego oraz

$$H^p(\mu) = \{f \in H(\mathbb{D})\colon \int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu < \infty\}.$$

W pracy J4 udowodniony jest analog tego twierdzenia dla wypukłych obszarów skończonego typu w $\mathbb{C}^n$. Jest to najważniejszy wynik zawarty w pracach J1-J7.

Twierdzenie 5. *Niech D będzie wypukłym obszarem skończonego typu w $\mathbb{C}^n$. Załóżmy, że dodatnia miara borelowska μ spełnia następujący warunek*

$$\sup\Big\{\frac{\mu(P(\omega,\varepsilon)\cap D)}{\sigma(P(\omega,\varepsilon)\cap bD)}:\omega\in bD,\varepsilon>0\Big\}<\infty. \tag{8}$$

Wówczas istnieje stała $C>0$ taka, że dla dowolnej funkcji f należącej do przestrzeni Hardy'ego $H^p(bD)$ zachodzi nierówność

$$\int_D |f|^p d\mu \le C\int_{bD}|f|^p d\sigma. \tag{9}$$

Przedstawienie tego twierdzenia wymaga wprowadzenia pewnych pojęć. Przede wszystkim przestrzeń Hardy'ego $H^p(bD)$ na obszarze definiowanym przez gładką w otoczeniu bD funkcję r

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n: r(z)<0\},$$

składa się ze wszystkich tych funkcji holomorficznych, które spełniają warunek

$$\sup_{c<0}\int_{r=c}|f|^p d\sigma_{bD_c}<\infty. \tag{10}$$

Symbol σ_{bD_c}, $c\le 0$ oznacza miarę powierzchniową, czyli miarę indukowaną na poziomicy $bD_c=\{z\in\mathbb{C}^n: r(z)=c\}$ przez element objętości na bD_c. Ten z kolei jest indukowany przez element objętości w $\mathbb{C}^n$. Funkcje należące do przestrzeni Hardy'ego mają wartości graniczne na brzegu obszaru należące do przestrzeni $L^p(d\sigma)$, gdzie $\sigma=\sigma_0$. Równoważnie można więc powiedzieć, że przestrzeń Hardy'ego $H^p(bD)$ jest przestrzenią tych wszystkich funkcji z $L^p(d\sigma)$, które są wartościami granicznymi (brzegowymi) funkcji holomorficznych w D spełniających warunek wzrostu (10).

Interpretacja twierdzenia 5 wymaga informacji dotyczących wypukłych obszarów skończonego typu. W sformułowaniu twierdzenia pojawia się symbol $P(\omega,\varepsilon)$. Oznacza on polidysk o środku w punkcie ω zdefiniowany w specjalnej, tak zwanej ε-ekstremalnej bazie $u_1,\dots,u_n$

$$P(\omega.\varepsilon):=\Big\{z=\omega+\sum_{j=1}^n z_j u_j: |z_j|<\tau(\omega.u_j,\varepsilon)\Big\},$$

gdzie

$$\tau(\omega,u,\varepsilon):=\sup\{c: |r(z+\lambda u)-r(z)|<\varepsilon, |\lambda|<c\}.$$

Załóżmy, że D jest wypukłym obszarem skończonego typu w $\mathbb{C}^n$. ε-ekstremalna baza w punkcie ζ ([57]) należącym do pewnego otoczenia $\bar{D}$ dana jest następująco: wybierzmy punkt q_1 spełniający warunek $r(q_1)=r(\zeta)+\varepsilon$ leżący na prostej zespolonej wyznaczanej przez kierunek $\partial r(\zeta)$. Niech u_1 będzie wektorem jednostkowym w kierunku $q_1-\zeta$. Następnie wybierzmy wektor jednostkowy u_2 prostopadły do u_1 tak, aby maksymalna odległość między ζ a zbiorem $\{z\in\mathbb{C}^n: r(z)=r(\zeta)+\varepsilon\}$ była osiągana na prostej wyznaczonej przez u_2. W kolejnym kroku rozważa się tylko kierunki prostopadłe do u_1 i u_2 i wybiera ten, w kierunku którego osiągana jest największa odległość między ζ a zbiorem $\{z\in\mathbb{C}^n: r(z)=r(\zeta)+\varepsilon\}$. W ten sposób konstruuje się całą bazę $(u_1,\dots,u_n)$. Sensem tej konstrukcji jest wybór bazy tak, aby polidysk o środku w ζ zdefiniowane w tej bazie i zawarty w zbiorze $\{z:\mathbb{C}^n: r(z)\le r(\zeta)+\varepsilon\}$ był możliwie największy. To z kolei pozwala na kontrolę nad wzrostem funkcji holomorficznych. Rzeczywiście własność wartości średniej pozwala napisać

$$|f(z)| \leq \frac{1}{V(P)} \int_P |f| dV \leq \frac{1}{V(P)^{1/p}} \Big(\int_D |f|^p dV \Big)^{1/p}$$

dla dowolnego polidysku P zawartego w obszarze D o środku w punkcie z. Zatem, aby kontrolować wzrost funkcji w normie całkowej (normie przestrzeni Bergmana) potrzeba dla dowolnego punktu z wskazać największy (w sensie objętości) możliwy polidysk o środku w punkcie z zawarty w zadanym obszarze. Na to właśnie pozwala wybór bazy ε-ekstremalnej.

Przedstawimy obecnie ideę dowodu twierdzenia 5. Przypomnijmy, że dla dowolnej miary ν

$$\|f\|_{L^p(\nu)} = p \int_0^\infty t^{p-1} \nu_f(t) dt, \tag{11}$$

gdzie $\nu_f(t)$ jest funkcją rozkładu

$$\nu_f(t) := \nu(\{z \colon |f(z)| \geq t\}).$$

Nierówność Carlesona-Hörmandera jest nierównością między normami. Z (11) wynika, że dla dowodu twierdzenia 5 wystarczy udowodnić odpowiednią nierówność dla funkcji rozkładu. Faktycznie jednak dowód polega na wykazaniu nierówności

$$\mu_f(t) \leq C \sigma_{M^{\mathcal{N}}[M^I[f]]}(t/C) \tag{12}$$

dla funkcji f holomorficznych na domknięciu obszaru D. Warto zauważyć, że funkcje takie są gęste w $H^p(bD)$. Funkcja występująca po prawej stronie w (12) nie jest funkcją rozkladu funkcji f tylko funkcją rozkładu funkcji maksymalnych $M^{\mathcal{N}}[M^I[f]]$ funkcji f. Przypomnijmy, że są one zdefiniowane następująco:

$$M^I[f](\omega) := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\sigma(B_\varepsilon(\omega) \cap bD)} \int_{B_\varepsilon(\omega) \cap bD} |f| d\sigma,$$

gdzie $B_\varepsilon(\omega)$ oznacza kulę euklidesową o środku w punkcie $\omega \in bD$ i promieniu $\varepsilon > 0$ oraz

$$M^{\mathcal{N}}[f](\omega) := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\sigma(Q_\varepsilon(\omega))} \int_{Q_\varepsilon(\omega)} |f| d\sigma.$$

Symbol $Q_\varepsilon(\omega)$ oznacza pseudokulę o środku w punkcie ω i promieniu ε ze względu na pseudoodległość

$$d(z, \zeta) := \inf\{\varepsilon > 0 \colon z \in P(\zeta, \varepsilon), \zeta \in P(z, \varepsilon)\}$$

wprowadzoną przez rodzinę polidysków $P(z, \varepsilon)$. Indeksy $\mathcal{N}$ oraz $\mathcal{I}$ wskazują na struktury geometryczne, z którymi związane są odpowiednie operatory maksymalne: nieizotropową wprowadzoną przez rodzinę polidysków zdefiniowanych w bazach ε-ekstremalnych i izotropową czyli euklidesową.

Nierowność (12) wystarcza do dowodu twierdzenia 5 ponieważ operatory maksymalne są ciągłe na przestrzeni $L^p, 1 \leq p < \infty$.

Najważniejszym elementem dowodu nierowności (12) jest własność, która mówi, że jeżeli funkcja holomorficzna przyjmuje w otoczeniu pewnego punktu duże wartości, to porównywalnie duże wartości przyjmuje złożenie $M^{\mathcal{N}}[M^{\mathcal{I}}[f]]$ na rzucie na brzeg tego otoczenia. Dokładniej istnieją stałe $c, C > 0$ takie, że dla dowolnej funkcji $f \in H(\bar{D})$ i $t \geq 0$, jeżeli

$$P(\zeta, c|r(\zeta)|) \cap \{\zeta \in D \colon |f(\zeta)| \geq t\} \neq \emptyset,$$

to

$$\pi(P(\zeta, c|r(\zeta)|)) \subset \{\omega \in bD \colon M^{\mathcal{N}}[M^{\mathcal{I}}[f]](\omega) \geq t/C\}$$

Symbol π oznacza gładką projekcję na brzeg bD obszaru D.

Dowód nierówności Carlesona-Hörmandera dla dysku czy kuli jest znacznie prostszy. Opiera on się na oszacowaniach dla jądra Szegö. Oszacowania takie nie są znane dla wypukłych obszarów skończonego typu.

Podstawowym przykładem miar Carlesona na dysku, czyli miar dla których zachodzi twierdzenie 5 są miary postaci

$$(1-|z|^2)|f'(z)|^2 dA,$$

gdzie f jest ograniczoną funkcją holomorficzną a dA dwuwymiarową miarą Lebesque'a. W pracy J4 udowodnione jest także, że miary postaci

$$\operatorname{dist}(\cdot, bD)^{-1}|\partial f \wedge \overline{\partial f}|_{\mathcal{N}} dV$$

są miarami Carlesona na wypukłych obszarach skończonego typu w $\mathbb{C}^n$ wtedy, gdy f należy do $BMOA(bD)$. W szczególności więc wtedy, gdy f jest ograniczona i holomorficzna. Symbol $|\cdot|_{\mathcal{N}}$ oznacza specjalnie zdefiniowaną nieizotropową normę określoną na kompleksyfikacjach przestrzeni kostycznych [19]. Niech B będzie (p,q)-formą wówczas

$$|B(z)|_{\mathcal{N}} := \sup\{|B(z)(v_1, \ldots, v_p, \bar{v}_{p+1}, \ldots, \bar{v}_{p+q})| \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^{n} \tau(z, v_j, \varrho(z)) \colon v_1, \ldots, v_{p+q} \neq 0\},$$

gdzie, podobnie jak poprzednio,

$$\tau(z, v, \varepsilon) := \sup\{c \colon |r(z+\lambda v) - r(z)| < \varepsilon, |\lambda| < c\}.$$

Dowód faktu, że $\operatorname{dist}(\cdot, bD)^{-1}|\partial f \wedge \overline{\partial f}|_{\mathcal{N}} dV$ jest miarą Carlesona wykorzystuje oszacowania udowodnione w pracy [19] przez J. Bruna, P. Charpentier, Y. Dupain oraz oszacowania jądra i rzutu Szegö uzyskane przez E. Steina i J. D. McNeala w [60].

Praca J5 dotyczy problemu interpolacji z podrozmaitości kowymiaru 1 postaci

$$A := \{z \in \tilde{V} \colon f(z) = 0\},$$

gdzie f jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu $\tilde{V}$ domknięcia obszaru D. O funkcji f zakładamy, że $\partial f \neq 0$ w zbiorze $\tilde{V}$ oraz $\partial f \wedge \partial r \neq 0$ w pewnym otoczeniu bD. O funkcji, która spełnia powyższe warunki będziemy mówić, że spełnia warunek transwersalności i nieosobliwości.

Ważnym wynikiem dotyczącym interpolacji w $\mathbb{C}^n$ jest twierdzenie udowodnione przez G. M. Henkina [47] i E. Amara [3] mówiące, że ograniczona funkcja holomorficzna na $D \cap A$ rozszerza się do ograniczonej funkcji holomorficznej na całym obszarze, jeżeli D jest obszarem silnie pseudowypukłym a A podrozmaitością zespoloną pewnego otoczenia $\bar{D}$ (w pracy [47] G. M. Henkin zakłada jeszcze, że A przecina brzeg obszaru transwersalnie. Założenia tego pozbył się E. Amar w [3]). Wiadomo, że podobne twierdzenie nie jest prawdziwe dla wypukłych obszarów skończonego typu w $\mathbb{C}^n$, nawet o brzegu *real-analytic* ([32], [33]). K. Diederich i E. Mazzilli [32] udowodnili, że jeżeli A jest afiniczną liniową podrozmaitością, to każda funkcja ograniczona holomorficzna w zbiorze $D \cap A$ jest obcięciem ograniczonej i holomorficznej funkcji na całym obszarze wtedy, gdy D jest ograniczonym wypukłym obszarem skończonego typu. W [1] podane są warunki jakie musi spełniać A, aby twierdzenie to było prawdziwe na wypukłych obszarach skończonego typu.

W pracy J5 badany jest problem interpolacji w przypadku przestrzeni Bergmana. Problematyką interpolacji na obszarach silnie pseudowypukłych w tej klasie przestrzeni zajmowała się A. Cummenge [28].

Zapiszmy odpowiednik własności, którą spełniają miary Carlesona (8) w języku przestrzeni Bergmana:

$$\sup\Big\{\frac{\mu(P(z,\varepsilon))}{V(P(z,\varepsilon))}: z \in D, \varepsilon < c|r(z)|\Big\} < \infty. \tag{13}$$

dla pewnej stałej $c > 0$. W pracy J5 zostało pokazane, że jeżeli dodatnia miara borelowska μ określona na podrozmaitości A spełnia warunek (13), to

$$R_A\big[H^p(D)\big] \subset H^p(D \cap A, \mu). \tag{14}$$

Symbol R_A oznacza operator obcięcia do podzbioru $D \cap A$ określony dla wszystkich funkcji holomorficznych na obszarze D w następujący sposób:

$$R_A\colon H(D) \ni g \mapsto g|_{D\cap A} \in H(D \cap A).$$

Przez $H^p(D)$ oznaczyliśmy przestrzeń Bergmana, czyli

$$H^p(D) := \big\{g \in H(D)\colon \int_D |g|^p dV < \infty\big\}.$$

Wreszcie $H^p(D \cap A, \mu)$ jest przestrzenią wszystkich funkcji holomorficznych na $D \cap A$ całkowalnych z p-potęgą względem miary μ

$$H^p(D \cap A, \mu) := \big\{g \in H(D \cap A)\colon \int_{D\cap A} |g|^p d\mu < \infty\big\}.$$

Własność (14) mówi, że jeżeli funkcja holomorficzna $g \in H(D \cap A)$ rozszerza się do funkcji holomorficznej należącej do przestrzeni Bergmana, to g musi być całkowalna z p-tą potęgą względem miary μ, jeżeli miara ta spełnia warunek (13). Obserwacje te są treścią twierdzenia udowodnionego w J5.

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że D jest ograniczonym wypukłym obszarem o gładkim brzegu zawartym w $\mathbb{C}^n$. A niech będzie podrozmaitością*

$$A = \big\{z \in \tilde{V}\colon f(z) = 0\big\},$$

$D \cap A \neq \emptyset$, która jest zbiorem zer funkcji holomorficznej f takiej, że $\partial f \neq 0$ w zbiorze $\tilde{V} \supset \bar{D}$ oraz $\partial f \wedge \partial r \neq 0$ w pewnym otoczeniu brzegu obszaru D. Niech R_A będzie operatorem obcięcia do zbioru $D \cap A$. Wówczas

$$R_A[H^2(D)] \subset H^2(D \cap A, \mu)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup\Big\{\frac{\mu(P)}{V(P)}: P = P_{c|r(\zeta)|}(\zeta), \zeta \in D\Big\} < \infty. \tag{15}$$

Jeżeli zachodzi warunek (15), *to*

$$R_A[H^p(D)] \subset H^p(D \cap A, \mu),$$

$1 \leq p < \infty$.

Miarą, która spełnia warunek (15) jest $|\partial f|^2_{\mathcal{N}} dV_A$, gdzie $|\cdot|_{\mathcal{N}}$ jest uprzednio zdefiniowaną nieizotropową normą $(1,0)$-kowektora a dV_A oznacza miarę indukowaną przez formą objętości podrozmaitości A. Innymi słowy, przy przyjętych oznaczeniach

$$R_A(H^p(D)) \subset H^p(D \cap A, |\partial f|^2_{\mathcal{N}} dV_A).$$

Zatem funkcja holomorficzna na $D \cap A$, która rozszerza się do funkcji z przestrzeni Bergmana musi spełniać warunek

$$\int_{D \cap A} |g|^p |\partial f|^2_{\mathcal{N}} dV_A < \infty. \tag{16}$$

Otrzymujemy więc w ten sposób warunek konieczny interpolacji dla przestrzeni Bergmana. Pozostaje wykazać, że (16) jest także wystarczający. Jest to treścią twierdzeń udowodnionych w J5

Twierdzenie 7. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n, n > 1$ będzie ograniczonym obszarem wypukłym skończonego typu o gładkim brzegu. Załóżmy, że funkcja holomorficzna $f \colon \tilde{V} \to \mathbb{C}$ określona na zbiorze $\tilde{V} \supset \bar{D}$ spełnia następujące warunki:*

(i) $\partial f \neq 0$ *w zbiorze* $\tilde{V}$
(ii) $\partial f \wedge \partial r \neq 0$ *w pewnym otoczeniu* bD
(iii) $n = 2$ *lub istnieje zbiór otwarty U i stała $\epsilon > 0$ takie, że $A \cap bD \subset U$ oraz*

$$|Z_2^\varepsilon f(p)| \geq c > 0$$

dla $p \in U$ oraz $0 < \varepsilon < \epsilon$.

Niech

$$A := \{z \in \tilde{V} \colon f(z) = 0\},$$

$D \cap A \neq \emptyset$ będzie zbiorem zer funkcji f o niepustym przekroju z obszarem D.

Istnieje wówczas dodatnia, skończona miara borelowska μ na zbiorze $D \cap A$ taka, że następujący ciąg jest dokładny i rozstrzepia

$$0 \to \ker R_A \hookrightarrow H^p(D) \overset{R_A}{\to} H^p(D \cap A, \mu) \to 0,$$

$1 \leq p < \star$, gdzie $\star$ oznacza przestrzeń BMO. To ostatnie stwierdzenie oznacza, że istnieje liniowy operator rozszerzenia

$$E^N \colon H^p(D \cap A, \mu) \to H^p(D)$$
$$R_A E^N = id_{D \cap A}.$$

W konsekwencji, w kategorii przestrzeni Banacha

$$H^p(D) \cong H^p(D \cap A, \mu) \oplus \ker R_A.$$

Innymi słowy, przy założeniach twierdzenia funkcja $g \in H(D \cap A)$ rozszerza się do funkcji należącej do przestrzeni Bergmana $H^p(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_D |g|^p |\partial f|^2_{\mathcal{N}} dV_A < \infty.$$

Symbol Z_2^ε oznacza zespoloną pochodną kierunkową w kierunku drugiego wektora bazy ε-ekstremalnej w punkcie p

$$Z_2^\varepsilon f(p) := \frac{\partial}{\partial \lambda} f(p + \lambda u_2)|_{\lambda = 0}.$$

W pracy J5 udowodnione jest także twierdzenie, które przy innych założeniach dotyczących podrozmaitości A gwarantuje rozwiązanie problemu interpolacji w $H^1(D)$.

Twierdzenie 8. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n, n > 1$ będzie ograniczonym obszarem wypukłym skończonego typu o gładkim brzegu. Załóżmy, że funkcja holomorficzna $f \colon \tilde{V} \to \mathbb{C}$ spełnia następujące założenia*

(i) *$\partial f \neq 0$ w zbiorze $\tilde{V}$,*
(ii) *$\partial r \wedge \partial f \neq 0$ w pewnym otoczeniu bD,*
(iii) *$n = 2$ lub $n > 2$ i istnieje otwarte otoczenie U zbioru*

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}_r) := \Big\{p \in bD \colon \exists_{\xi \neq 0} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r(p)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k = 0\Big\}$$

i stała $\epsilon > 0$ taka, że dla dowolnego $p \in U \cap D \cap A$ oraz $2 \leq l \leq n$

$$|Z_l^\varepsilon f(p)| \geq c > 0$$

dla stałej c i $0 < \varepsilon < \epsilon$.

Niech

$$A = \{z \in \tilde{V} \colon f(z) = 0\},$$

$D \cap A \neq \emptyset$ będzie zbiorem zer funkcji f o niepustym przekroju z obszarem D. Wówczas istnieje dodatnia skończona miara borelowska na $A \cap D$ taka, że

$$0 \to \ker R_A \hookrightarrow H^1(D) \overset{R_A}{\to} H^1(D \cap A, \mu) \to 0$$

jest dokładny i rozstrzepia. To ostatnie stwierdzenie oznacza, że istnieje liniowy operator rozszerzenia

$$E^N \colon H^1(D \cap A, \mu) \to H^1(D)$$
$$R_A E^N = id_{D \cap A}.$$

W konsekwencji w kategorii przestrzeni Banacha

$$H^1(D) \cong H^1(D \cap A, \mu) \oplus \ker R_A.$$

Symbol Z_l^ε oznacza pochodną kierunkową w kierunku wektora l bazy ε-ekstremalnej.

Załóżmy, że g rozszerza się do funkcji G należącej do przestrzeni Bergmana $H^p(D)$. Dowód Twierdzenia 6 polega na konstrukcji lokalnie skończonego pokrycia $D \cap A$ (pokrycia Whitneya) składającego się z polidysków $P(z, \varepsilon)$ o promieniach jednostajnie porównywalnych z odległością od brzegu. Pozwala to wykorzystać własność wartości średniej, którą mają funkcje holomorficzne, aby oszacować

$$\int_{D \cap A} |g|^p d\mu$$

przez

$$C \sup\Big\{\frac{\mu(P \cap A)}{V(P)} \colon P = P(\zeta, c\varrho(\zeta)), \zeta \in D\Big\} \cdot \int_D |G|^p dV.$$

Liniowe operatory rozszerzenia, o których mowa w Twierdzeniach 7 oraz 8 to operatory skonstruowane w pracach [14] oraz [15] przez B. Berndtssona i M. Anderssona z funkcjami podpierającymi skonstruowanymi przez J. E. Fornaess i K. Diedericha w

[30]. Dowód wystarczalności warunku (16) polega więc na oszacowaniu odpowiednich operatorów całkowych wykorzystując oszacowania dla funkcji podpierających i odpowiednich form Leraya udowodnione w pracach [37], [31], [38].

Praca J6 dotyczy obszarów skończonego typu w $\mathbb{C}^2$. Jest to druga, obok obszarów wypukłych skończonego typu, klasa obszarów, badana w związku z $\bar{\partial}$-problemem Neumanna [25]. D. Catlin udowodnił [25], że w każdym punkcie z' tego obszaru funkcję definiującą taki obszar można zapisać w postaci kanonicznej

$$r(z') + \Re\zeta_2 + \sum_{\substack{j+k\le M\\ j,k>0}} a_{jk}(z')\zeta_1^j\bar{\zeta}_1^k + \mathcal{O}(|\zeta_1|^{M+1} + |\zeta_2||\zeta|). \tag{17}$$

Możliwość zapisania funkcji definiującej w postaci kanonicznej oznacza istnienie biholomorficznej zamiany zmiennych Φ takiej, że w nowych zmiennych funkcja definiująca jest w postaci (17). Zapisanie funkcji definiującej w tej postaci pozwala na konstrukcję polidysków, podobnie jak ma to miejsce w przypadku obszarów wypukłych, maksymalnych ze względu na objętość leżących między poziomicami funkcji definiującej obszar. Należy w tym celu przyjąć

$$A_l(z') := \max\{|a_{jk}(z')| : j+k=l\}$$
$$\tau(z',\delta) := \min\{(\delta/A_l(z'))^{1/l} : 2\le l\le M\}$$

oraz

$$R_\delta(z') := \{\zeta\in\mathbb{C}^2 : |\zeta_1| < \tau(z',\delta), |\zeta_2| < \delta\}.$$

Polidyski te (ich promienie) odzwierciedlają kształt obszaru w nowych zmiennych lub dokładniej to, do jakiego rzędu poziomica funkcji definiującej jest styczna do kiełków zbiorów analitycznych. Obrazy polidysków w oryginalnych współrzędnych tworzą na obszarze D strukturę typu jednorodnego.

$$Q_\delta(z') := \{\Phi(\zeta) : \zeta\in R_\delta(z')\}.$$

Oznacza to, że możliwe jest powtórzenie argumentów dowodzących warunek konieczny interpolacji. W pracy J6 udowodnione jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że $D\subset\mathbb{C}^2$ jest ograniczonym obszarem skończonego typu o gładkim brzegu. Niech A będzie podrozmaitością pewnego otoczenia $\tilde{V}$ zbioru $\bar{D}$ postaci*

$$A := \{z\in\tilde{V} : g(z) = 0\},$$

$D\cap A\neq\emptyset$. O funkcji holomorficznej g załóżmy, że

(i) *$\partial g\neq 0$ w zbiorze $\tilde{V}$,*

(ii) *$\partial g\wedge\partial r\neq 0$ w pewnym otoczeniu bD.*

Jeżeli $f\in H(D\cap A)$ rozszerza się do funkcji należącej do przestrzeni Bergmana $H^p(D), 1\le p<\infty$, to

$$\int_{D\cap A} |f(z)|^p dist_{D\cap A}[z, b(D\cap A)]^2|\partial g|^2_{\mathcal{N}} dV_A < \infty.$$

Podobnie jak w przypadku wypukłych obszarów skończonego typu wyrażenie $|\partial g|_{\mathcal{N}}$ oznacza nieizotropową normę kowektora ∂g odzwierciedlającą geometrię obszaru. dV_A oznacza miarę indukowaną przez element objętości A. Dowód Twierdzenia 9 polega na wykazaniu, że miara

$$\mathrm{dist}_{D\cap A}(z, b(D\cap A))^2|\partial g|^2_{\mathcal{N}} dV_A$$

spełnia analog warunku (13) oraz na udowodnieniu następującego twierdzenia

Twierdzenie 10. *Niech D będzie ograniczonym obszarem skończonego typu w $\mathbb{C}^2$ o gładkim brzegu oraz niech podrozmaitość A będzie określona tak jak poprzednio. Jeżeli*

$$\sup\Big\{\frac{\mu(Q_{c|r(z')|}(z')\cap A)}{V(Q_{c|r(z')|}(z'))} : z' \in U\cap D\cap A\Big\} < \infty,$$

to

$$R_A[H^p(D)] \subset H^p(D\cap A,\mu)$$

lub równoważnie

$$\int_{D\cap A} |f|^p d\mu \le C\int_D |f|^p dV.$$

W przypadku funkcji jednej zmiennej zbiór interpolacyjny dla przestrzeni Hardy'ego jest w szczególności zbiorem zer funkcji z tej klasy. Fakt ten jest motywacją wyniku zawartego w pracy J7. W pracy tej udowodnione jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że $D\subset\mathbb{C}^n, n>1$ jest ograniczonym wypukłym obszarem skończonego typu. Załóżmy, że podzbiór analityczny kowymiaru 1, V spełnia jednostajny warunek Blaschke'ego. Istnieje wówczas funkcja holomorficzna u taka, że $\log|u|$ należy do przestrzeni funkcji o ograniczonym wahaniu na brzegu, której zbiorem zer jest V.*

Mówimy, że dodatni $(1,1)$-prąd Θ (w szczególności prąd całkowania po zbiorze analitycznym kowymiaru 1, czyli w szczególności podzbiór analityczny kowymiaru 1) spełnia jednostajny warunek Blaschke'go, jeżeli $\operatorname{dist}(\cdot\,, bD)|\Theta|_{\mathcal{N}}$ jest miarą Carlesona [20]. Dowód twierdzenia 11 sprowadza się do oszacowania wzorów całkowych na rozwiązanie $\overline{\partial}$-problemu w normie przestrzeni $BMO(bD)$ analogicznie jak w [19]. Wzory takie zostały podane przez B. Berndtssona i M. Andersson [14].

Przypomnijmy, że faktycznie, aby udowodnić twierdzenie 11 należy rozwiązać następujące równanie

$$[V] = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f|, \tag{18}$$

gdzie $[V]$ jest prądem całkowania po zbiorze analitycznym V – jest to treścią twierdzenia Poincaré. Prąd taki działa na formę φ o zwartym nośniku w następujący sposób

$$\langle [V],\varphi\rangle := \int_V \varphi.$$

Pierwszy krok w rozwiązaniu równaniu (18) polega na rozwiązaniu równania $dw = [V]$, gdzie d oznacza operator pochodnej zewnętrznej. Odpowiednie twierdzenie zostało udowodnione w [20]. Faktycznie więc w pracy J7 udowodnione jest:

Twierdzenie 12. *Załóżmy, że $D\subset\mathbb{C}^n, n>1$ jest ograniczonym wypukłym obszarem skończonego typu o gładkim brzegu. Istnieje operator K taki, że dla dowolnej $\overline{\partial}$-gładkiej zamkniętej $(0,1)$-formy*

(i) $\overline{\partial}Kf = f$

(ii) $Kf \in BMO(bD)$,

jeżeli $|f|_{\mathcal{N}}dV$ jest miarą Carlesona.

Twierdzenie to poprawia wynik zawarty w [20]. Dodajmy, że problem konstrukcji funkcji z klasy Nevanlinny o zadanym zbiorze zer spełniającym warunek Blaschke'ego w $\mathbb{C}^n$ nazywany jest problemem Henkina-Skody. Został on rozwiązany przez tych matematyków w [48] oraz [65] dla ograniczonych zbiorów silnie pseudowypukłych. Rozwiązanie dla wypukłych obszarów skończonego typu i zbiorów spełniających warunek Blaschke'go (nie jednostajny warunek Blaschke'go) podane zostało przez J. Bruna, Ph. Charpentiera i Y. Dupain [19] (przy dodatkowym założeniu *strict type*, którego pozbył się K. Diederich i E. Mazzilli w [34]).

Pozostałe prace

J8 M. Jasiczak, *Universal divisors for Hardy spaces in the polydisk*, Ann. Polon. Math. **91** (2007), no. 1, 7184.

J9 M. Jasiczak, *Continuity of Bergman and Szeg projections on weighted-sup function spaces on pseudoconvex domains*, Arch. Math. (Basel) **87** (2006), no. 5, 436448.

J10 M. Jasiczak, *Multidimensional weak resolvents and spatial equivalence of normal operators*, Studia Math. **173** (2006), no. 2, 129147.

J11 M. Jasiczak, *On boundary behaviour of the Bergman projection on pseudoconvex domains*, Studia Math. **166** (2005), no. 3, 243261

J12 M. Jasiczak, *Interpolation from linear subvarieties for Bergman scale of spaces on convex domains*, praca przedstawiona do druku.

J13 M. Jasiczak, *Restriction of Hardy space to linear subvarieties*, praca przedstawiona do druku.

J14 M. Jasiczak, *On locally convex extension of H^∞ in the unit ball and continuity of the Bergman projection*, Studia Math. **156** (2003), no. 3, 261275.

Prace J14 (opublikowana przez doktoratem) oraz J11 i J9 dotyczą rzutu Bergmana. Przypomnijmy, że jest to rzut ortogonalny w $L^2(D)$ na podprzestrzeń wszystkich funkcji holomorficznych i całkowalnych z kwadratem. W pracy J14 pokazane jest, że rzut Bergmana odwzorowuje przestrzeń LW na kuli na podprzestrzeń HW. Jest to konsekwencją oszacowań udowodnionych przez Forelli'ego i Rudina [40]. Jest także pokazane, że LW jest najmniejszą przestrzenią zdefiniowaną przez ważone sup-seminormy zawierającą L^∞, na której rzut Bergmana jest ciągły. Metoda dowodu minimalności wykorzystuje konstrukcję tak zwanego operatora Bella ([11], [12]). Wyniki te motywowane były twierdzeniami uzyskanymi przez J. Taskinena dla dysku ([66]).

W pracy J11 wyniki te są uogólnione na obszary silnie pseudowypukłe (w tym przypadku niezależnie uzyskali je także M. Engliš, T. T. Hänninen oraz J. Taskinen [35]) a w J9 na wypukłe skończonego typu. Dowód ciągłości rzutu Bergmana w przypadku obszarów silnie pseudowypukłych opiera się na oszacowaniach jądra Bergmana udowodnionych przez C. Feffermana ([36]) oraz L. Boutet de Monvela i J. Sjöstranda ([18]). Dowód minimalności z kolei wykorzystuje konstrukcję funkcji szczytowej podaną przez G. Henkina ([46]). Dowód ciągłości rzutu Bergmana na LW w przypadku wypukłych obszarów skończonego typu wykorzystuje wyniki uzyskane przez J. D. McNeala i E. Steina w [59]. W pracy J9 udowodnione jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 13. *Załóżmy, że Ω jest ograniczonym, pseudowypukłym obszarem z gładkim brzegiem. Jeżeli rzut Bergmana jest ciągły na przestrzeni $\mathcal{E}W^m, m \geq 0$ zawierającej funkcje stałe, to dla dowolnej funkcji $w \in W$*

$$\sup_{z\in\Omega} w(z)\left|\log|r(z)|\right|^k < \infty$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Symbol $\mathcal{E}W^m$ oznacza uzupełnienie przestrzeni wszystkich gładkich funkcji spełniających warunek $\|f\|_{w,(m)} < \infty$ dla $w \in W$, gdzie

$$\|f\|_{w,(m)} = \sup\{\|Xf\|_{w,(m-1)}, \|f\|_{w,(m-1)} : \\ X \text{gładkie pole wektorowe na } \bar{\Omega} \text{ takie, że } \|X\|_\infty \leq 1\}$$

$$\|f\|_{w,0} = \|f\|_w = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|w(z).$$

oraz

$$\|\sum_{j=1}^{2n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\|_\infty = \max_{j=1,\dots,2n}\{\|a_j\|_\infty\}$$

O zbiorze wag W zakładamy tylko, że dla dowolnego zbioru zwartego K istnieje $w \in W$ taka, że $1_K \leq Cw$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz, że dla dowolnych $w_1, w_2 \in W$ istnieje $w_3 \in W$ taka, że $\max\{w_1, w_2\} \leq Cw_3$ dla pewnej stałej $C > 0$. Należy podkreślić, że każda waga jest radialna.

Dowód twierdzenia 13 podobnie jak dowód minimalności rozszerzenia LW wykorzystuje operator Bella i konstrukcję funkcji szczytowej podaną przez I. Grahama [43].

Praca J10 dotyczy tak zwanych słabych rezolwent, czyli funkcji postaci

$$\zeta \mapsto \langle C(A,\zeta)f, g\rangle,$$

gdzie $A = (A_1, \dots, A_n)$ jest układem przemiennych operatorów na przestrzeni Banacha a $C(z,\zeta)$ oznacza jądro Cauchy'ego

$$C(z,\zeta) = \frac{1}{(1-(z_1\zeta_1 + \dots + z_n\zeta_n))^n}.$$

W pracy badane są konsekwencje równości zbiorów słabych rezolwent dla dwóch przemiennych układów operatorów $A = (A_1, \dots, A_n)$ oraz $B = (B_1, \dots, B_n)$. Motywacją dla tych badań są prace E. A. Nordgrena, H. Radjaviego i P. Rosenthala [61] oraz C. K. Fonga, E. A. Nordgrena, H. Radjaviego i P. Rosenthala [39], w których badano słabe rezolwenty jednego operatora.

W J10 zostało pokazane, że jeżeli zbiory słabych rezolwent są równe, to algebry generowane przez te operatory są przestrzennie izomorficzne. Oznacza to, że odwzorowanie

$$p(A_1, \dots, A_n) \mapsto p(B_1, \dots, B_n), p \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$$

przedłuża się do izomorfizmu algebr generowanych przez $A_1, \dots, A_n$ oraz $B_1, \dots, B_n$. Co więcej, równość zbiorów słabych rezolwent implikuje, że odwzorowanie sprzężone odwzorowuje zbiór funkcjonałów elementarnych na zbiór funkcjonałów elementarnych. Zgodnie z oznaczeniami stosowanymi w pracy J10 równość zbiorów słabych rezolwent implikuje $\mathcal{P}(A) \approxeq \mathcal{P}(B)$. Przypomnijmy, że funkcjonał określony na algebrze generowanej przez układ operatorów $A_1, \dots, A_n$ nazywa się elementarnym jeżeli jest on postaci $X \mapsto \langle Xf, g\rangle$ dla pewnych wektorów f oraz g. W J10 badane są także konsekwencje istnienia izomorfizmu realizującego relację $\mathcal{C}(A) \approxeq \mathcal{C}(B)$ wtedy, gdy A i B są przemiennymi układami operatorów normalnych na przestrzeni Hilberta H. Symbol $\mathcal{C}(A)$ oznacza C^*-algebrę generowaną przez układ operatorów $A = (A_1, \dots, A_n)$. Okazuje się, że wtedy układy operatorów muszą być unitarnie podobne na pewnych podprzestrzeniach redukujących oraz między nieskończonymi inflacjami tych układów zachodzi relacja

$$p(A^\infty, A^{*\infty}) = V^* p(B^\infty, B^{*\infty}) V$$
$$p(B^\infty, B^{*\infty}) = W^* p(A^\infty, A^{*\infty}) W$$

$p \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$, gdzie V, W są izometriami na $\mathcal{H}^{(\infty)}$ czyli na sumie prostej przeliczalnie wielu kopii przestrzeni Hilberta. Dowody wykorzystują teorię krotności operatorów normalnych i twierdzenia o postaci operatorów normalnych na przestrzeni Hilberta [27].

W pracy J10 udowodnione jest także, że jeżeli $p(A, A^*) \mapsto p(B, B^*)$ przedłuża się do izomorfizmu C^*-algebr generowanych przez układy operatorów A oraz B, to domknięcia w topologii zbieżności niemal jednostajnej zbiorów słabych rezolwent muszą być sobie równe. Wynika to z twierdzenia Voiculescu-Arvesona [67], [10].

Wreszcie praca J13 podobnie jak praca J5 dotyczy problemu interpolacji dla przestrzeni Bergmana. Podobnie jak poprzednio załóżmy, że D jest ograniczonym wypukłym obszarem skończonego typu o gładkim brzegu. W J13 zostało pokazane, że funkcja $f \in H(D \cap A)$ holomorficzna na przekroju obszaru D i liniowej afinicznej podrozmaitości A rozszerza się do funkcji należącej do przestrzeni Bergmana $H^p(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{D \cap A} |f|^p |\partial g|^2_N dV_A < \infty,$$

gdzie

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n : g(z) = 0\}.$$

Dowód tego twierdzenie polega na wykorzystaniu twierdzenia 6 i oszacowaniu operatorów całkowych skonstruowanych przez B. Berndtssona [15].

W pracy J13 badane jest obcięcie przestrzeni Hardy'ego do liniowych afinicznych podrozmaitości. Wiadomo, że jeżeli D jest kulą to obcięcie przestrzeni Hardy'ego do liniowych afinicznych podprzestrzeni jest równe przestrzeni Bergmana na przekroju. Okazuje się, że własność ta charakteryzuje do pewnego stopnia obszary silnie pseudowypukłe.

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że D jest ograniczonym, wypukłym obszarem skończonego typu o gładkim brzegu. Jeżeli dla dowolnej liniowej afinicznej podrozmaitości A o niepustym przekroju z D zachodzi*

$$R_A[H^2(bD)] = H^2(D \cap A),$$

to multityp brzegu w każdym punkcie wynosi $(1, 2, \dots, 2)$.

Przypomnijmy definicję multitypu [23]. Niech Γ_n będzie zbiorem wszystkich układów $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ elementów uzupełnionej prostej rzeczywistej takich, że

(1) $-\infty < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \infty$
(2) dla dowolnego k albo λ_k jest równe ∞ albo istnieją nieujemne liczby całkowite $\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_k > 0$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j} = 1.$$

Zbiór Γ_n, nazywany zbiorem wag, może być uporządkowany leksykograficznie. Waga $\Lambda \in \Gamma_n$ jest nazywana wyróżnioną, jeżeli istnieją holomorficzne współrzędne $(z_1, \dots, z_n)$ w otoczeniu p, w których współrzędnymi p jest 0 i takie, że

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + \beta_j}{\lambda_j} < 1 \Longrightarrow \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} r(p)}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial \bar{z}_1^{\beta_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n} \partial \bar{z}_n^{\beta_n}} = 0.$$

Multityp bD w punkcie p jest na mocy definicji leksykograficznie najmniejszą wagą

$$\mathcal{M} = (m_1(p), \dots, m_n(p)) \in \Gamma_n$$

taką, że $\mathcal{M} \geq \Gamma$, dla każdej wyróżnionej wagi Γ. Multityp jest ważnym niezmiennikiem biholomorficznym w teorii problemu $\overline{\partial}$-Neumanna [23].

Dowód twierdzenia 14 polega na porównaniu wzrostu funkcji z przestrzeni Hardy'ego na obszarze D i przestrzeni Bergmana na przekroju. W tym drugim przypadku należy także wskazać funkcję z przestrzeni Bergmana o ekstremalnym wzroście. Jest nią oczywiście jądro Bergmana [58]. Obie wielkości, to znaczy oszacowania wzrostu funkcji z przestrzeni Hardy'ego i Bergmana na przekroju, wyrażone są w terminach objętości odpowiednich polidysków. Te z kolei zależą od multitypu [45]. Dowód wymaga także porównania multitypu bD i $b(D \cap A)$, gdzie A jest hiperpowierzchnią. Odpowiednie twierdzenie udowodnione jest w pracy J13.

Motywacją twierdzenia 14 są wyniki zawarte w pracy [33].

W pracy J8 udowodnione jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 15. *Jeżeli $\mathcal{Z}$ jest ciągiem interpolacyjnym dla $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ przestrzeni ograniczonych funkcji holomorficznych na polidysku, to istnieje uniwersalny diwizor dla $\mathcal{Z}$ i dowolnej przestrzeni Hardy'ego $H^p, 2 < p < \infty$.*

Przypomnijmy, że $B = (B_1, \dots, B_N) \in (H^\infty)^N$ jest uniwersalnym dywizorem (wymiaru N) dla $\mathcal{Z}$ i przestrzeni H^p jeżeli $B|_{\mathcal{Z}} = 0$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in H^p$ takiej, że $f|_{\mathcal{Z}} = 0$ istnieją funkcje $F \in (H^p)^N$ takie, że

$$f = \sum_{j=1}^{N} F_j B_j.$$

Motywacją dla twierdzenia 15 są wyniki uzyskane przez E. Amara w [4] oraz E. Amara i C. Meniniego w [5]. W pracach tych analizowany był przypadek kuli. Wyniki te motywowane są twierdzeniami dotyczącymi dysku i własnościami iloczynu Blaschke'go.

Dowód twierdzenia 15 wykorzystuje fakt, że grupa automorfizmów holomorficznych polidysku, podobnie jak grupa automorfizmów holomorficznych kuli, działa w sposób przechodni na polidysku. Dowód polega na rozwiązaniu odpowiednich $\overline{\partial}$-problemów w sposób analogiczny do rozwiązań H^p problemu korony na polidysku [54], [55].

LITERATURA

[1] Alexandre W., *Problémes d'extension dans les domains convexes de type fini*, Math. Z. **253** (2006), 263–380.

[2] Amar E., *Cohomologie complexe et applications*, J. London Math. Soc. **29** (1984), 127–140.

[3] Amar E., *Extension de fonctions holomorphes et courants*, Bull. Sci. Math. **107** (1983), 25–48.

[4] Amar E., *Interpolating sequences in the ball*, Ark. Mat. **38** (2000), 1–20.

[5] Amar E., Menini C., *Universal divisors in Hardy spaces*, Studia Math. **143** (2000), 1–21.

[6] Andersson M., *The H^2 corona problem and $\overline{\partial}_b$ in weakly pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **342** (1994), 241–255.

[7] Andersson M., Carlsson H., *Wolff type estimates and the H^p corona problem in strictly pseudoconvex domains*, Ark. Mat. **32** (1994), 255–276.

[8] Andersson M., Carlsson H., *Estimates of the solutions of the H^p and BMOA corona problem*, Math. Ann. **316** (2000), 83–102.

[9] Aroca J. M., Hironaka H., Vicente J. L., *Desingularization theorems*, Mem. Math. Inst. Jorge Juan, No 30, Madrid 1977.

[10] Arveson W. B., *Notes on extensions of C^*-algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), 329–355.

[11] Bell S. R., *Biholomorphic mappings and the $\overline{\partial}$-problem*, Ann. of Math. **114** (1981), 103–113.

[12] Bell S. R., *Representation theorem in strictly pseudoconvex domains*, Illonois J. Math. **26** (1982), 19–26.

[13] Bell S. R., Ligocka E., *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. **57** (1980), 283–289.

[14] Berndtsson B., Andersson M., *Henkin-Ramirez formulas with weight factors*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **32** (1982), 91110.

[15] Berndtsson B., *A formula for interpolation and division in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann. **263** (1983), 399–418.

[16] Bierstone E., Milman P., *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximum strata of a local invariant*, Invent. Math. **128** (1997), 207–302.

[17] Boas H. P., Straube E. J., *On equality of line and variety type of real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$*, J. Geom. Analysis **2** (1992), 95–98.

[18] Boutet de Monvel L., Sjöstrand J., *Sur la singularité des noyaux de Bergman et Szegö*, Astérisque 34–35 (1976), 123–164.

[19] Bruna J., Charpentier P., Dupain Y., *Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type*, Ann. of Math. **147** (1998), 391–415.

[20] Bruna J., Grellier S., *Zero sets of $\mathcal{H}^p$ functions in convex domains of strict finite type*, Complex Variables Theory Appl. **38** (1999), 243–261.

[21] Bruna J., Nagel A., Waigner S., *Convex hypersurfaces and Fourier transforms*, Ann. of Math. **127** (1988), 333–365.

[22] Carleson L., *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. **76** (1962), 547–559.

[23] Catlin D., *Boundary invariants of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **120** (1984), 529–586.

[24] Catlin D,, *Subelliptic estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **126** (1987), 131–191.

[25] Catlin D., *Estimates on invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. **200** (1989), 429–466.

[26] Chang S.-Y., *Carleson measure on a bidisc*, Ann. of Math. **109** (1979), 613–620.

[27] Conway J. B., *A course in operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[28] Cummenge A., *Extension dans des classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type "measures de Carleson"pour l'equation $\overline{\partial}$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), 59–97.

[29] D'Angelo J. P., *Real hypersurfaces, order of contact, and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), 615–637.

[30] Diederich K, Fornaess J. E., *Support functions for convex domains of finite type*, Math. Z. **230** (1999), 145–164.

[31] Diederich K, Fischer B, Fornaess J. E., *Hölder estimates on convex domains of finite type*, Math. Z. **232** (1999), 43–61.

[32] Diederich K., Mazzilli E., *Extension of bounded holomorphic functions in convex domains*, Manuscripta Math. **105** (2001), 1–12.

[33] Diederich K., Mazzilli E., *Extension and restriction of holomorphic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), 1079–1099.

[34] Diederich K., Mazzilli, E., *Zero varieties for the Nevanlinna class on all convex domains of finite type*, Nagoya Math. J. **163** (2001), 215–227.

[35] Engliš M., Hänninen T. T., Taskinen J., *Minimal L^∞-type spaces on strictly pseudoconvex domains on which the Bergman projection is continuous*, Houston J. Math. **32** (2006), 253–275.

[36] Fefferman C., *The Bergman kernel and biholomorhic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **16** (1974), 1–65.

[37] Fischer B., *L^p estimates on convex domains of finite type*, Math. Z. **236** (2001), 401–418.

[38] Fischer B., *Nonisotropic Hölder estimates on convex domains of finite type*, Michigan Math. J. **52** (2004), 219–239.

[39] Fong C. K., Nordgren E. A., Radjavi H., Rosenthal P., *Weak resolvents of linear operators II*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 67–83.

[40] Forelli F., Rudin W., *Projections on spaces of holomorphic functions in balls*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 593–602.

[41] Fornaess J. E., Øvrelid N., Vasiliadou S., *Semiglobal results for $\overline{\partial}$ on a complex space with arbitrary singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2377–2386.

[42] Gamelin T. W., *Wolff's proof of the corona theorem*, Isreal J. Math. **37** (1980), 113–119.

[43] Graham I., *Boundary behavior of the Caratheodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 219–240.

[44] Hefer T., *Hölder and L^p estimates for $\overline{\partial}$ on convex domains of finite type depending on Catlin's multitype*, Math. Z.**242** (2002), 367–398.

[45] Hefer T., *Extremal Bases and Hölder Estimates for $\overline{\partial}$ on convex domains of finite type*, Michigan Math. J. **52** (2004), 573–602.

[46] Henkin G. M., *Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications*, Math. USSR-Sb. **7** (1969), 597–616.

[47] Henkin G. M., *Continuation of bounded holomorphic functions from submanifolds in general position in a strictly pseudoconvex domain*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 540–567.

[48] Henkin G. M., *H. Lewy's equation, and analysis on pseudoconvex manifolds I*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), 57–118.

[49] Hörmander L., *Generators for some rings of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.

[50] Lieb I., Michel J., The Cauchy-Riemann complex. Integral formulae and Neumann problem., Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgeselschaft. Braunschweig/Wiesbaden 2002.

[51] Lieb I., Range R. M., *On integral representations and a priori Lipschitz estimates for the canonical solution of the $\overline{\partial}$-equation*, Math. Ann. **265** (1983), 221–251.

[52] Lieb I., Range R. M., *Estimates for a class of integral operators and applications to the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Inv. Math. **85** (1986), 415–438.

[53] Lieb I., Range R. M., *Integral representations and estimates in the theory of $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Ann. of Math. **123** (1986), 265–301.

[54] Lin K.-C., *H^p solutions for the corona problem on the polydisk in $\mathbb{C}^n$*, Bull. Sci. Math. **110** (1986), 69–84.

[55] Lin K.-C., *The H^p-corona theorem for the polydisk*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 371–375.

[56] Lojasiewicz S., *Sur la probléme de la division*, Studia Mathematica **8** (1959), 87–136.

[57] McNeal J. D., *Convex domains of finite type*, J. Funct. Anal. **108**(1992), 361–373

[58] McNeal J. D., *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Adv. Math. **109** (1994), 108–139.

[59] McNeal J. D., Stein E. M., *Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type*, Duke Math. J. **73** (1994), 177-199.

[60] McNeal J. D., Stein E. M., *The Szegö projection on convex domains*, Math. Z. **224** (1997), 519–553.

[61] Nordgren E. A., Radjavi H., Rosenthal P., *Weak resolvents of linear operators*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 913–934.

[62] Ortega J. M., Fabrega J., *Corona type decomposition in some Besov spaces*, Math. Scand. **78** (1996), 93–111.

[63] Ortega J. M., Fabrega J., *Pointwise multipliers and corona type decomposition in BMOA*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 111–137.

[64] Siu Y. T., *Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional non-compact complex manifold*, Pacific J. Math. **28** (1969), 407–411.

[65] Skoda H., *Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur $\overline{\partial}$, et caractérisation des zéroes des fonctions de la classe des Nevanlinna*, Bull Soc. Math. France **104** (1976), 225-299.

[66] Taskinen J., *On the continuity of the Bergman and Szegö projections*, Houston J. Math. **30** (2004), 171–190.

[67] Voiculescu D., *A non-commutative Weyl-von Neumann Theorem*, Rev. Romaine Math. Pures Appl. **21** (1976), 97–113.

Informacje dotyczące życia zawodowego

1. Wykształcenie:
    - 2004 doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, dysertacja doktorska *Własności brzegowe i asymptotyczne rzutów Bergmana i Szegö* przygotowana pod opieką prof. dr hab. A. Sołtysiaka,
    - 2000 magister matematyki, praca magisterska *Wielowymiarowe brzegi Szyłowa algebr funkcyjnych* przygotowana pod opieką prof. dr hab. A. Sołtysiaka,
    - 1999 magister ekonomii, praca magisterska *Równowaga w grach z ograniczoną informacją* napisana pod kierunkiem prof. dr hab. M. Matłoki.
2. Zatrudnienie:
    - 2008-2009 adiunkt, specjalne stanowisko badawcze, Instytut Matematyczny PAN,
    - od 2004 adiunkt, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
3. Stypendia:
    - 2006 Stypendium Zagraniczne Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej w ramach programu Kolumb,
    - 2003 Stypendium Polsko-Amerykańskiej Komisji Fulbrighta w kategorii junior grant,
    - 2003 Stypendium Fundacji Rodziny Kulczyków na rok akademicki 2003/04,
    - 1999-2000 Stypendium Ministra Edukacji Narodowej za wyniki w nauce i szczególne osiągnięcia w pracy naukowej,
    - 1990-1992 Stypendium Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci,
    - 1991-1992 Stypendium Funduszu Stypendialnego Krajowego Komitetu Narodowego Czynu Pomocy Szkole i Funduszu "Pomoc Szkole".
4. Staże i pobyty zagraniczne:
    - 09.2006–08.2007 University of Michigan, Ann Arbor jako visiting researcher,
    - 08.2003–01.2004 University of California at Berkeley jako visiting researcher pod opieką naukową prof. W. Arvesona.
5. Nagrody i wyróżnienia:
    - 2011 Nagroda II stopnia Rektora Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu,
    - 2007 Nagroda II stopnia Rektora Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu,
    - 2005 Nagroda Prezesa Rady Ministrów za rozprawę doktorską,
    - 2004 wyróżnienie rozprawy doktorskiej na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM,
    - 2000 Medal Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu za wybitne osiągnięcia w nauce,

- 1999 nagroda za zajęcie 1 miejsca w konkursie na najlepszą pracę magisterską przygotowaną w roku 1998/1999 na Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

6. Granty:
   - grant wspomagający Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej 2008–2009,
   - wykonawca grantu N N 201 2740 33 w latach 2007-2010,
   - badania zawarte w rozprawie doktorskiej były realizowane w ramach Grantu Promotorskiego przyznanego przez KBN *Własności rzutów Bergmana i Szegö* nr 0642/P03/2004/26.
7. Udział w programach międzynarodowych
   - The dbar-Neumann problem. Analysis, Geometry and Potential Theory. Erwin Schrödinger Institute 2009.
8. Konferencje z odczytem:
   - Function Spaces VI, Edwardsville, 2010 referat: *Carleson measures on convex finite type domains,*
   - Spaces of Analytic and Smooth Functions, Będlewo, 2009, referat: *Interpolation on finite type domains in* $\mathbb{C}^n$,
   - Functional Analysis & Complex Analysis, Istanbul 2007, referat: *A priori estimates for the* $\overline{\partial}$*-equation on Kähler manifolds,*
   - 2nd Joint Meeting of AMS, DMV and ÖMG, Mainz, Moguncja, 2005, referat: *Generators of the algebra of holomorphic functions with log-type growth,*
   - Second Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis, Seville 2005, referat: *Regularity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem on weighted-sup function spaces,*
   - Real Analytic and Complex Analytic Methods in Functional Analysis, Istambuł 2004, referat: *Regularity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem with applications to the* $\overline{\partial}$*-problem and the Bergman projection,*
   - The 20^{th} International Conference on Operator Theory, Timisoara 2004, referat: *Continuity of the Bergman and Szegö projections on weighted-sup function spaces,*
   - Topological Algebras, Applications and Related Topics, Będlewo, 2003, referat: *Multidimensional Weak Resolvents,*
   - Spaces of Analytic and Smooth Functions, Będlewo, 2003, referat: *On boundary behaviour of the Bergman projection,*
   - The Conference on Function Spaces, Edwardsville 2002, referat: *On continuity of the Bergman projection in the unit ball and locally convex extension of* H^∞.
9. Odczyty:
   - Seminarium Zakładu Analizy Funkcjonalnej Wydziału Matematyki i Informatyki UAM,
   - Seminarium z Analizy Funkcjonalnej IM PAN,
   - Seminarium Analizy Zespolonej UJ,
   - Seminarium Analizy Zespolonej UM Ann Arbor,
   - Seminarium Analizy Zespolonej Uniwersytetu w Wiedniu.
10. Doświadczenie dydaktyczne:
    - Wydział Matematyki i Informatyki UAM 2000-2012: Algebra, Teoria spektralna, Szeregi i całki Fouriera, Analiza funkcjonalna, Analiza

dla informatyków, Teoria miary i całki, Elementy ekonomii matematycznej, Równania różniczkowe cząstkowe, Równania różniczkowe zwyczajne, funkcje analityczne, Matematyka aktuarialna, Modelowanie finansowe, Metody numeryczne, Analiza matematyczna, Metody matematyczne w naukach biologicznych.

- Akademia Ekonomiczna w Poznaniu 1999-2002: Ekonomia matematyczna.
- Wyższa Szkoła Bankowa 2002: Ekonomia matematyczna.

11. Inna działalność zawodowa:
    - MathSciNet rewiever,
    - w latach 2004–2009 Członek Okręgowego Komitetu Olimpiady Matematycznej,
    - recenzent czasopism matematycznych,
    - w latach 2007–2010 członek jury nagrody im. K. Kuratowskiego,
    - koordynator w zawodach The Third Middle European Mathematical Olympiad MEMO 2009.