Wniosek o wszczęcie postępowania habilitacyjnego na podstawie osiągnięcia naukowego

O pewnych własnościach ciągów ortogonalnych, podprzestrzeni ortodopełnialnych i odwzorowań izometrycznych w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha

Albert Kubzdela

Załącznik 2 - Autoreferat

Osiągnięciem naukowym, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) jest cykl składający się z 8 publikacji naukowych:

[AKH-1] Kubzdela A., *On orthocomplemented subspaces in p-adic Banach spaces.* Indag. Math. New Ser. **16** (2005), 225-235 (IF 0.40)

[AKH-2] Kubzdela A., *On finite-dimensional normed spaces over* $\mathbb{C}_p$. Contemporary Mathematics (AMS) **384** (2005), 169-185

[AKH-3] Kubzdela A., *On maximal t-orthogonal sequences in* c_0. Bull. Belgian Math. Soc. **14** (2007), 961-968 (IF 0.17)

[AKH-4] Kubzdela A., *On non-Archimedean Hilbertian spaces.* Indag. Math. New Ser. **19** (2008), 601-610 (IF 0.33)

[AKH-5] Kubzdela A., *On some geometrical properties of linear subspaces of* l^∞. Contemporary Mathematics (AMS) **551** (2011), 157-161

[AKH-6] Kubzdela A., *On orthogonal properties of immediate extensions of* c_0. Indag. Math. New Ser. **21** (2011), 76-86 (IF 0.20)

[AKH-7] Kubzdela A., *Isometries, Mazur-Ulam theorem and Aleksandrov problem for non-Archimedean normed spaces.* Nonlin. Analysis **75** (2012), 2060-2068 (IF 1.64)

[AKH-8] Kubzdela A., Perez-Garcia C., *The finite-dimensional decomposition property in non-Archimedean Banach spaces.* Acta Math. Sinica **30** (2014), 1833–1845 (IF 0.42)

Tematyka publikacji zawartych w cyklu dotyczy niearchimedesowej analizy funkcjonalnej, a ściślej teorii przestrzeni unormowanych, określonych nad ciałem z niearchimedesową waluacją. Wyniki dotyczą przede wszystkim własności ciągów ortogonalnych i podprzestrzeni ortodopełnialnych w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha. Większość z prac cyklu była motywowana istotnymi problemami analizy niearchimedesowej, stawianymi przez specjalistów tej dziedziny, nierzadko wiele lat temu. W szczególności, wśród uzyskanych przeze mnie wyników znajdują się rozwiązania następujących problemów:

Problem 1 (Perez-Garcia, Schikhof, 1993 r., [36], [37]) *Czy każda słabo domknięta, ścisła $HB-$ podprzestrzeń w niearchimedesowej przestrzeni Banacha nad niesferycznie zupełnym ciałem niearchimedesowym $\mathbb{K}$ jest ortodopełnialna?*

Pokazałem, że postawione wyżej pytanie ma negatywną odpowiedź, podając konstrukcję przestrzeni skończenie wymiarowej nad niearchimedesowym ciałem niesferycznie zupełnym oraz jej ścisłej, słabo domkniętej $HB-$podprzestrzeni, która nie jest ortodopełnialna - prace [AKH-1] i [AKH-2] (omówienie w części 1.2 autoreferatu).

Problem 2 (van Rooij, Schikhof, 1992 r., [45]) *Czy każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha w której każda podprzestrzeń liniowa skończonego wymiaru posiada ortogonalną bazę jest przestrzenią hilbertowską?*

Problem 3 (Perez-Garcia, Schikhof, 1993r., Ochsenius, Schikhof, 2006r., [35],[33]) *Czy każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha nad niesferycznie zupełnym ciałem niearchimedesowym $\mathbb{K}$, będąca przestrzenią hilbertowską, posiada ortogonalną bazę?*

Dowiodłem, że każda domknięta podprzestrzeń liniowa niearchimedesowej przestrzeni Banacha l^∞, będąca bezpośrednim rozszerzeniem c_0 jest przestrzenią hilbertowską. Pokazałem, że wśród bezpośrednich rozszerzeń przestrzeni c_0, zawartych w l^∞, znajdują się takie, które nie posiadają bazy ortogonalnej, tym samym podałem przykłady przestrzeni hilbertowskich nie mających bazy ortogonalnej. Pokazałem również, że wśród bezpośrednich rozszerzeń c_0, które nie są zawarte w l^∞, są takie przestrzenie w których każda podprzestrzeń liniowa skończonego wymiaru posiada ortogonalną bazę, a które nie są hilbertowskie - prace [AKH-4], [AKH-5] i [AKH-6] (omówienie w części 1.5 autoreferatu).

Problem 4 (Schikhof, 2005 r.) *Czy istnieje takie $t \in (0,1)$, że każdy maksymalny ciąg $t-$ortogonalny w c_0 jest jednocześnie bazą Schaudera w c_0?*

Pokazałem, że w przestrzeni c_0 nad ciałem niearchimedesowym z gęstą waluacją, dla każdego $t \in (0,1)$ możemy skonstruować maksymalny ciąg $t-$ortogonalny, który nie jest bazą Schaudera - praca [AKH-3] (omówienie w części 1.3 autoreferatu).

Problem 5 (Perez-Garcia, Schikhof, 2012 r., [41]) *Czy w niearchimedesowej przestrzeni Banacha, posiadającej skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, każda domknięta podprzestrzeń liniowa również posiada skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny?*

W pracy [AKH-8], której jestem współautorem przedstawiliśmy konstrukcję przestrzeni Banacha, posiadającej skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny i jej domkniętej podprzestrzeni liniowej, kowymiaru jeden, która takiego rozkładu nie ma. Jednocześnie, udowodniliśmy, że w niearchimedesowej przestrzeni Banacha, posiadającej skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, która może być przedstawiona jako suma prosta podprzestrzeni skończenie wymiarowej i podprzestrzeni z bazą ortogonalną, posiadanie skończenie wymiarowego rozkładu ortogonalnego jest dziedziczne dla domkniętych podprzestrzeni liniowych o skończonym kowymiarze (omówienie w części 1.4 autoreferatu).

1 Omówienie uzyskanych wyników w cyklu publikacji składających się na osiągnięcie naukowe.

1.1 Wprowadzenie.

Analiza funkcjonalna niearchimedesowa została zainicjowana przez matematyka holenderskiego Antoine Monna w latach 40-tych i 50-tych ubiegłego wieku cyklem publikacji w Indagationes Mathematicae. Stan aktualnej wiedzy tej dziedziny na przestrzeni lat był wyznaczany treścią monografii Monny ([30]), Bachmana, Beckensteina i Narici ([6]), van Rooija ([46]), Prolli ([42]), Boscha, Güntzera i Remmerta ([9]), Roberta ([43]), Schneidera ([49]), Schikhofa i Perez-Garcii ([39] i [48]).

Jedną z motywacji do studiowania tej dyscypliny jest Twierdzenie Ostrowskiego mówiące, że każde ciało zupełne z waluacją, nieizomorficzne (algebraicznie i topologicznie) ani z $\mathbb{R}$ ani z $\mathbb{C}$ jest ciałem niearchimedesowym. Inną motywację mogą dostarczać pewne zastosowania analizy niearchimedesowej w fizyce matematycznej i mechanice kwantowej (patrz [51], [25] i [1]).

Waluacją określoną na ciele $\mathbb{K}$ nazywamy odwzorowanie $|.| : \mathbb{K} \to [0, \infty)$ takie, że

$$\begin{aligned} |\lambda| = 0 &\text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \lambda = 0, \\ |\lambda\mu| &= |\lambda| \cdot |\mu|, \\ |\lambda + \mu| &\leq |\lambda| + |\mu| \end{aligned}$$

dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Jeśli, ponadto, dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ waluacja spełnia warunek *mocnej nierówności trójkąta*:

$$|\lambda + \mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\}$$

to taką waluację nazywać będziemy *niearchimedesową*, a ciało z tak określoną waluacją *ciałem niearchimedesowym* (w dalszym ciągu autoreferatu, przez $\mathbb{K}$ oznaczać będę ciało niearchimedesowe, zupełne w metryce generowanej przez nietrywialną waluację).

Oznaczmy, $|\mathbb{K}| := \{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Waluację nazywać będziemy *dyskretną* jeśli 0 jest jedynym punktem skupienia zbioru $|\mathbb{K}|$; wówczas istnieje *element uniformizujący* $\rho \in \mathbb{K}$, $|\rho| < 1$ taki, że $|\mathbb{K}| = \{|\rho|^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Waluację, dla której $|\mathbb{K}|$ jest podzbiorem gęstym w $[0, \infty)$ nazywać będziemy *gęstą*.

Przestrzeń unormowaną E nad $\mathbb{K}$ nazywamy *przestrzenią niearchimedesową* jeśli na E można określić równoważną normę, zwaną *normą niearchimedesową,* spełniającą warunek mocnej nierówności trójkąta, tzn. dla której zachodzi $||x + y|| \leq \max\{||x||, ||y||\}$ dla dowolnych $x, y \in E$. W dalszym ciągu autoreferatu, pisząc o normie określonej na przestrzeni niearchimedesowej, będziemy zakładać, że jest niearchimedesowa. Warto zwrócić uwagę, że nie każda przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$ jest przestrzenią niearchimedesową, np. na $l^p(\mathbb{K})$, $p \geq 1$, przestrzeni wszystkich ciągów elementów ciała $\mathbb{K}$ zbieżnych do zera z normą $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$ nie można określić równoważnej normy niearchimedesowej.

Niech E będzie przestrzenią niearchimedesową. Zbiór $\{x_i\}_{i \in I} \subset E$, $(x_i \neq 0, i \in I)$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksów (niekoniecznie przeliczalnym) nazywać będziemy *ortogonalnym* jeśli

$$||\sum_{j \in J} \lambda_j x_j|| = \max_{j \in J}\{||\lambda_j x_j||\}$$

dla każdego skończonego $J \subset I$ i dowolnych $\lambda_j \subset \mathbb{K}$ $(j \in J)$. Jeśli, ponadto $\overline{\left[\{x_i\}_{i\in I}\right]} = E$ to zbiór $\{x_i\}_{i\in I}$ nazywać będziemy *bazą ortogonalną* przestrzeni E; wówczas, każdy $x \in E$ może być jednoznacznie przedstawiony jako $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{K},\ i \in I)$.

Zbiór ortogonalny $X \subset E$ nazywamy *maksymalnym* w E jeśli dla każdego $z \in E$, $z \neq 0$, zbiór $\{z\} \cup X$ nie jest ortogonalny. Podprzestrzenie liniowe D, D_0 przestrzeni E nazywamy *ortogonalnymi* jeśli $||x+y|| = \max\{||x||, ||y||\}$ dla dowolnych $x \in D$ i $y \in D_0$; własność tą oznaczać będziemy przez $D \perp D_0$. Element $x \in E$ nazywamy *ortogonalnym* do podprzestrzeni liniowej $D \subset E$, jeśli $[x] \perp D$.

Topologia generowana na przestrzeni liniowej E przez normę niearchimedesową jest zawsze topologią zerowymiarową. *Kulą domkniętą* w E nazywać będziemy zbiór $B_r(x) := \{y \in E : ||x-y|| \leq r\}$, zaś kulą *otwartą* zbiór $B_r^-(x) := \{y \in E : ||x-y|| < r\}$ $(r > 0, x \in E)$; topologicznie, obie kule są zbiorami domknięto-otwartymi. Z warunku mocnej nierówności trójkąta wynika, że każdy punkt kuli jest jej środkiem i jeśli dwie dowolne kule mają niepusty przekrój, to zawsze jedna z nich zawarta jest w drugiej. Przez $B_{\mathbb{K}}$ oznaczać będziemy domkniętą kulę jednostkową $B_1(0)$ w $\mathbb{K}$.

Ciąg kul $(B_{r_n}(x_n))_n$ zawartych w przestrzeni niearchimedesowej E nazywać będziemy *scentrowanym* jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$. Przestrzeń niearchimedesową E nazywać będziemy *sferycznie zupełną* jeśli każdy scentrowany ciąg kul domkniętych w E posiada niepusty przekrój. W szczególności, ciało $\mathbb{K}$ nazywać będziemy *sferycznie zupełnym* jeżeli każdy scentrowany ciąg kul domkniętych w $\mathbb{K}$ ma niepusty przekrój. Każde niearchimedesowe ciało zupełne z dyskretną waluacją, w szczególności każde ciało lokalnie zwarte jest sferycznie zupełne. Ciało $\mathbb{K}$, które nie jest sferycznie zupełne, nazywamy ciałem *niesferycznie zupełnym.*

Wśród ciał niearchimedesowych warto wskazać dwa ważne przykłady. Pierwszym z nich jest ciało liczb $p-$adycznych $\mathbb{Q}_p$, będące uzupełnieniem ciała liczb wymiernych w metryce generowanej przez waluację $p-$adyczną. Jest ono lokalnie zwarte, posiada dyskretną waluację i tym samym jest sferycznie zupełne. Drugim przykładem jest ciało $\mathbb{C}_p$, będące uzupełnieniem algebraicznego domknięcia ciała $\mathbb{Q}_p$. Ciało $\mathbb{C}_p$ nie jest sferycznie zupełne. Zarówno $\mathbb{Q}_p$ jak i $\mathbb{C}_p$ są ciałami ośrodkowymi.

Przez $l^\infty(I)$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksów oznaczać będziemy przestrzeń liniową nad $\mathbb{K}$ wszystkich ograniczonych odwzorowań $I \to \mathbb{K}$. Przestrzeń $l^\infty(I)$ z normą $||\left(\lambda^i\right)_{i\in I}|| := \sup_{i\in I}\left|\lambda^i\right|$ jest niearchimedesową przestrzenią Banacha. Przez $c_0(I)$ oznaczać będziemy domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $l^\infty(I)$ złożoną ze wszystkich $\left(\lambda^i\right)_{i\in I} \in l^\infty(I)$ takich, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór $J \subset I$, że $\left|\lambda^i\right| < \varepsilon$ dla wszystkich $i \in I \backslash J$. W szczególności, będziemy oznaczać $l^\infty := l^\infty(\mathbb{N})$, oraz $c_0 := c_0(\mathbb{N})$.

1.2 Własność Hahna-Banacha, ścisłość i ortodopełnialność domkniętych podprzestrzeni liniowych w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha.

W analizie niearchimedesowej, niektóre z własności przestrzeni unormowanych są w istotny sposób zależne od ciała $\mathbb{K}$, w szczególności są zależne od tego czy ciało $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, czy nie. Jednym z przykładów jest Twierdzenie Ingletona, będące niearchimedesowym odpowiednikiem klasycznego twierdzenia Hahna-Banacha. Mówi ono, że w przestrzeni niearchimedesowej E nad $\mathbb{K}$, każdy ciągły funkcjonał liniowy określony na dowolnej, domkniętej podprzestrzeni liniowej D przestrzeni E może być rozszerzony do ciągłego funkcjonału liniowego na całą przestrzeń E, z zachowaniem normy, wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne. Co więcej, w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni niearchimedesowej E nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ można skonstruować domkniętą podprzestrzeń liniową D, oraz wskazać ciągły funkcjonał liniowy określony na D, którego nie można rozszerzyć na całą przestrzeń E z zachowaniem normy (patrz [44]). Istnieje szereg przykładów niearchimedesowych przestrzeni Banacha nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ zawierających domknięte podprzestrzenie liniowe, które nie są słabo domknięte (patrz [13]). Z drugiej strony, zachodzi zależność: jeśli każda domknięta podprzestrzeń liniowa dowolnej, posiadającej totalny dual, niearchimedesowej przestrzeni Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$ jest słabo domknięta, to $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne (patrz [22]).

Niech D będzie dowolną domkniętą podprzestrzenią liniową niearchimedesowej przestrzeni Banacha E. Przez D^* i E^* oznaczać będziemy topologiczne duale, odpowiednio dla D i E. Rozważmy następujące własności podprzestrzeni D :

(1) D jest *ortodopełnialna* w E, jeśli istnieje podprzestrzeń liniowa $D_0 \subset E$ taka, że $D + D_0 = E$ i $D \perp D_0$;

(2) D jest $HB-$*podprzestrzenią* (D ma własność Hahna-Banacha), jeśli każdy $f_0 \in D^*$ posiada rozszerzenie $f \in E^*$ zachowujące normę;

(3) D jest *ścisła* (*strict*), jeśli dla każdego $x \in E \backslash D$ podprzestrzeń D jest ortodopełnialna w $[x] + D$ (warunek ten jest równoważny własności iż dla odwzorowania ilorazowego $\pi : E \rightarrow E/D$, dla każdego $x \in E/D$ istnieje $z \in E$ takie, że $\pi(z) = x$ i $||z|| = ||x||$);

(4) D jest *słabo domknięta*, jeśli jest domknięta w topologii $w(E, E^*)$.

Warunek (1) zawsze implikuje własności $(2), (3)$ i (4). Jeśli $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, to każda domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni E jest słabo domkniętą $HB-$ podprzestrzenią. Jednocześnie, znany jest przykład niearchimedesowej przestrzeni Banacha nad sferycznie zupełnym ciałem $\mathbb{K}$, oraz jej ścisłej domkniętej podprzestrzeni liniowej, która nie jest ortodopełnialna (patrz [36]).

Sytuacja różni się gdy ciało $\mathbb{K}$ nie jest sferycznie zupełne. Istnieją przykłady niearchimedesowych przestrzeni Banacha dla których posiadanie przez domkniętą podprzestrzeń liniową własności (2) lub (3) implikuje jej ortodopełnialność. Perez-Garcia i Schikhof pokazali, że każda jednowymiarowa, ścisła podprzestrzeń przestrzeni l^∞, oraz każda $HB-$podprzestrzeń kowymiaru jeden przestrzeni c_0 jest ortodopełnialna ([37]). W swojej pracy doktorskiej rozszerzyłem ten wynik, pokazując, że każda $HB-$podprzestrzeń przestrzeni c_0, oraz każda słabo domknięta, ścisła podprzestrzeń przestrzeni l^∞ jest ortodopełnialna (wyniki te szerzej omawiam w części 2.1).

Naturalnym w tym kontekście staje się Problem 1, sformułowany w 1993 roku przez Perez-Garcia i Schikhofa (patrz [36] i [37]), czy każda słabo domknięta, ścisła $HB-$ podprzestrzeń niearchimedesowej przestrzeni Banacha nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ jest ortodopełnialna?

W pracy [AKH-1] przedstawiłem rozwiązanie Problemu 1. Skonstruowałem unormowaną przestrzeń czterowymiarową E_4 nad ciałem $\mathbb{C}_p$, oraz jej ścisłą, słabo domkniętą $HB-$podprzestrzeń, która nie jest ortodopełnialna.

Konstrukcja takiej przestrzeni wymagała wybrania ciągu elementów w przestrzeni $\mathbb{C}_p^3$, o szczególnych własnościach. Było to możliwe dzięki posiadaniu przez ciało $\mathbb{C}_p$, oraz jego sferyczne uzupełnienie pewnych cech, opisanych i udowodnionych przeze mnie w pracach [AKH-1] i [AKH-2].

Sferycznym uzupełnieniem przestrzeni niearchimedesowej E nazywać będziemy sferycznie zupełną przestrzeń Banacha $\widehat{E}$ dla której istnieje liniowa izometria $T : E \to \widehat{E}$ taka, że $\widehat{E}$ nie zawiera żadnej właściwej, sferycznie zupełnej podprzestrzeni liniowej zawierającej $T(E)$. Dowolne dwa sferyczne uzupełnienia E są izometrycznie izomorficzne.

W szczególności, dla każdego niesferycznie zupełnego $\mathbb{K}$ istnieje sferyczne uzupełnienie $\widehat{\mathbb{K}}$ takie, że $\widehat{\mathbb{K}}$ jest sferycznie zupełnym ciałem niearchimedesowym z waluacją, będącej rozszerzeniem waluacji z $\mathbb{K}$. Wówczas, $\widehat{\mathbb{K}}$ jako przestrzeń unormowana (z normą określoną przez waluację) jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. $\widehat{\mathbb{K}}$ jako przestrzeń sferycznie zupełna, jest przestrzenią Banacha i posiada dość charakterystyczną własność, mianowicie, jeśli D jest podprzestrzenią liniową w $\widehat{\mathbb{K}}$, która nie jest przestrzenią jednowymiarową, to D nie ma bazy ortogonalnej. Element $1 \in \widehat{\mathbb{K}}$ generuje jednowymiarową podprzestrzeń liniową $\{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ przestrzeni $\widehat{\mathbb{K}}$, którą w dalszej części autoreferatu oznaczać będę przez $\mathbb{K}$.

Prace [AKH-1] i [AKH-2], motywowane Problemem 1, dostarczają szereg nowych wyników związanych z własnościami ośrodkowych niearchimedesowych ciał niesferycznie zupełnych, w szczególności ciała $\mathbb{C}_p$, oraz niearchimedesowych przestrzeni skończenie wymiarowych, określanych nad tymi ciałami.

Wybierając w niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ scentrowany ciąg kul domkniętych $(B_{r_n}(c_n))_n$ o pustym przekroju, możemy określić normę niearchimedesową na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^2$, definiując

$$||(x_1, x_2)||_v := \lim_{n\to\infty} |x_1 - x_2 c_n|, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Wówczas, przestrzeń unormowana $\left(\mathbb{K}^2, ||.||_v\right)$ nie posiada bazy ortogonalnej. Można by w tym miejscu zadać pytanie, czy dla $n > 2$ w przestrzeni skończenie wymiarowej $(\mathbb{K}^n, ||.||)$ (z normą $||(x_1, ..., x_n)|| = \max_i |x_i|$) możemy wybrać taki scentrowany ciąg kul domkniętych, który oprócz pustego przekroju będzie posiadał inne charakterystyczne cechy, pozwalające na określenie normy o pewnych szczególnych własnościach na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^{n+1}$. Odpowiedzią na to pytanie jest udowodnione przeze mnie Twierdzenie 6 w pracy [AKH-2], uogólniające wynik van Rooija z [44, Theorem 1.14]. Przypomnijmy, że jeśli E jest przestrzenią liniową, to podzbiór $L \subset E$ nazywamy *podrozmaitością liniową* jeśli istnieje podprzestrzeń liniowa $D \subset E$ i $x \in E$ takie, że $L = x + D$.

Twierdzenie 6 ([AKH-2, Theorem 2.10]) *Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$ i $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, istnieje scentrowany ciąg kul domkniętych $(B_{r_k}(c_k))_k$ w $\mathbb{K}^n$ taki, że dla każdej właściwej podrozmaitości liniowej $L \subset \mathbb{K}^n$ istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ dla którego $L \cap B_{r_{k_0}}(c_{k_0}) = \varnothing$.*

Wykorzystując Twierdzenie 6 i skonstruowany w jego dowodzie ciąg $(c_k)_k \subset \mathbb{K}^n$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$ i $r_k = ||c_k - c_{k+1}||$ $(k \in \mathbb{N})$, możemy znaleźć (patrz [AKH-1, Lemma 2] i [AKH-2, Proposition 2.12]) n ciągów $\left(c_k^i\right)_k \subset \widehat{\mathbb{K}}$ $(i = 1, ..., n)$ takich, że $c_k^i \in \mathbb{K} \subset \widehat{\mathbb{K}}$, $\left|c_k^i\right| = 1$ $(i = 1, ..., n,\ k \in \mathbb{N})$, oraz

(a) dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, oraz dla dowolnych $\lambda, \lambda_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, ..., n,\ j \neq i)$ istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left| c_k^i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j c_k^j - \lambda \right| > r_{k_0}$$

dla wszystkich $k > k_0$;

(b) jeśli $x_1, ..., x_n \in \widehat{\mathbb{K}} \backslash \mathbb{K}$ i $x_i \in \bigcap_k \{a \in \widehat{\mathbb{K}} : |a - c_k^i| \le r_k\}$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, to

$$dist\,(x_i, [x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n, 1]) = r$$

dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, gdzie $r = \lim_k r_k$.

Do konstrukcji przestrzeni E_4 wykorzystujemy trzy ciągi $\left(c_n^i\right)_n$ $(i = 1, 2, 3)$ wybrane z $\mathbb{C}_p$, spełniające warunki (a) i (b). Przyjmując oznaczenia $\lambda_n := c_n^1$, $\mu_n := c_n^2$, $\nu_n := c_n^3$ $(n \in \mathbb{N})$, określamy $u_1, u_2, u_3, u_4 \in l^\infty$ poprzez

$$\begin{aligned} u_1 \;&:= (1, 0, 1, 0, ...)\,, \\ u_2 \;&:= (0, 1, 0, 1, 0, ...)\,, \\ u_3 \;&:= (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3, ...)\,, \\ u_4 \;&:= (\nu_1, 0, \nu_2, 0, \nu_3, 0, ...)\,. \end{aligned}$$

Niech $\pi : l^\infty \to l^\infty / c_0$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Dla każdego $i \in \{1, ..., 4\}$ określamy $x_i := \pi(u_i)$, oraz definiujemy $E_4 := [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Wówczas, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ jest bazą przestrzeni E_4, tzn. każdy element $x \in E_4$ może być przedstawiony jednoznacznie jako $x = \sum_{i=1}^4 a_i x_i$ $(a_1, ..., a_4 \in \mathbb{K})$. Norma na E_4, indukowana z l^∞ / c_0 określa się jako

$$||x|| = \lim_{n \to \infty} \max \{|a_1 + a_3 \lambda_n + a_4 \nu_n|, |a_2 + a_3 \mu_n|\}.$$

W [AKH-1, Theorem 3] udowodniłem, że $D := [x_1, x_4]$ jest ścisłą, słabo domkniętą $HB-$podprzestrzenią przestrzeni E_4, która nie jest ortodopełnialna. Część dowodu, pokazująca, że D nie jest ortodopełnialna rozpoczyna się pokazaniem, że każdy maksymalny zbiór ortogonalny w E_4 składa się z dwóch elementów. Następnie, zakładam nie wprost, że D jest ortodopełnialna w E_4, tzn. istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń liniowa D_0 przestrzeni E, taka, że $E = D + D_0$ i $D \perp D_0$. Dowodzę wówczas, wykorzystując powyższe własności (a) i (b), że D_0 ma ortogonalną bazę. Tym samym wnioskuję, że E_4 zawiera zbiór ortogonalny składający się z trzech elementów, co przeczy wcześniejszej konkluzji i implikuje, że D nie jest ortodopełnialna. Posiadanie przez D własności Hahna-Banacha dowodzę bezpośrednio, biorąc dowolny $f_0 \in D^*$ znajduję jego rozszerzenie $f \in E^*$, zachowujące normę. Wykorzystując [44, Theorem 1.14], pokazuję, że podprzestrzeń D jest ścisła.

Jednocześnie pokazałem, że wymiar cztery jest najmniejszym możliwym dla którego taka konstrukcja może być przeprowadzona, gdyż, jak dowiodłem w [AKH-1, Remark 4], w dowolnej, unormowanej przestrzeni trójwymiarowej każda ścisła $HB-$podprzestrzeń jest ortodopełnialna.

W pracy [AKH-2] przedstawiłem kilka dalszych, dość szczególnych konstrukcji przestrzeni unormowanych skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}_p$, między innymi następujące przykłady ([AKH-2, Examples 3.3 i 3.4]):

- przestrzeni $n-$wymiarowej, nie posiadającej bazy ortogonalnej, w której każda podprzestrzeń właściwa taką bazę posiada;
- przestrzeni $n-$wymiarowej nie posiadającej żadnej podprzestrzeni z bazą ortogonalną.

Praca [AKH-2] jest cytowana w [40] i [41], wyniki [AKH-2, Theorem 2.10 i Proposition 2.12] w dość istotny sposób były przeze mnie wykorzystane w pracach [AKH-6] i [AKH-8].

1.3 Problem istnienia maksymalnego ciągu $t-$ortogonalnego w przestrzeni Banacha przeliczalnego typu, nie będącego bazą Schaudera.

Przestrzeń unormowaną E nad $\mathbb{K}$ nazywać będziemy przestrzenią *przeliczalnego typu*, jeśli zawiera ona zbiór przeliczalny, którego powłoka liniowa jest gęsta w E. Jeśli $\mathbb{K}$ jest ośrodkowe, to własność ta jest równoważna ośrodkowości E. Każda niearchimedesowa, nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha przeliczalnego typu jest liniowo homeomorficzna z c_0 ([46, Theorem 3.16]), tym samym posiada przeliczalną bazę, która jest bazą Schaudera ([39, Theorem 2.3.1]).

Niech $t \in (0, 1]$. Podzbiór przeliczalny $\{x_1, x_2, ...\} \subset E$ nazywać będziemy $t-$*ortogonalnym* jeśli dla każdego skończonego $J \subset \mathbb{N}$ i dowolnych $\{\lambda_i\}_{i \in J} \subset \mathbb{K}$ zachodzi

$$\left|\left|\sum_{i\in J} \lambda_i x_i\right|\right| \geq t \cdot \max_{i\in J} ||\lambda_i x_i|| \, .$$

Ciąg $(x_n)_n$ nazywać będziemy $t-$*ortogonalnym* jeśli $\{x_1, x_2, ...\}$ jest zbiorem $t-$*ortogonalnym.* Jeśli, ponadto $(x_n)_n$ jest bazą w E, to $(x_n)_n$ nazywać będziemy *bazą* $t-$*ortogonalną.*

Każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha przeliczalnego typu E posiada dla każdego $t \in (0, 1)$ bazę $t-$ortogonalną; każda baza Schaudera $(x_n)_n$ w przestrzeni E jest bazą $t-$ortogonalną dla pewnego $t \in (0, 1]$ ([39, Theorem 2.3.1]). Jeśli $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, to E posiada bazę ortogonalną ($t-$ortogonalną dla $t = 1$). Każdy ciąg $t-$ortogonalny $(x_n)_n \subset E$ jest ciągiem bazowym w E.

Niech $t \in (0, 1]$. Zbiór $t-$ortogonalny $\{z_1, z_2, ...\}$ w niearchimedesowej przestrzeni Banacha przeliczalnego typu E nazywać będziemy *maksymalnym*, jeśli dla każdego $z \in E$, $z \neq 0$, zbiór $\{z\} \cup \{z_1, z_2, ...\}$ nie jest $t-$ortogonalny. Ciąg $t-$*ortogonalny* $(x_n)_n \subset E$ nazywać będziemy *maksymalnym* w E jeśli $\{x_1, x_2, ...\}$ jest maksymalnym zbiorem $t-$*ortogonalnym.* Bezpośrednią konsekwencją Lematu Kuratowskiego-Zorna jest istnienie w każdej niearchimedesowej przestrzeni Banacha przeliczalnego typu maksymalnego przeliczalnego zbioru $t-$ortogonalnego.

Jeśli $\mathbb{K}$ posiada gęstą waluację, to nie każdy ciąg w przestrzeni c_0, będący maksymalnym zbiorem ortogonalnym w c_0, jest bazą Schaudera (patrz [46]). W 2005 roku Schikhof postawił problem (Problem 4), czy w przestrzeni c_0 istnieje takie $t \in (0, 1)$, że każdy maksymalny ciąg $t-$ortogonalny w c_0 jest jednocześnie bazą Schaudera? Odpowiedź na to pytanie zawarłem w pracy [AKH-3], udowadniając następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7 ([AKH-3, Theorem 1]) *Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem z gęstą waluacją. Wówczas, dla każdego $t \in (0, 1)$ istnieje maksymalny ciąg $t-$ortogonalny w przestrzeni c_0, który nie jest bazą Schaudera.*

Dowód Twierdzenia 7 zawiera konstrukcję żądanego ciągu. W dość szczególny sposób definiujemy przeliczalny zbiór $t-$ortogonalny $X_0 \subset c_0$, $e_1 \notin \overline{[X_0]}$, który jest maksymalnym zbiorem $t-$ortogonalnym w podprzestrzeni $\overline{[\{e_1\} \cup X_0]}$. Następnie, pokazujemy, że

$$c_0 = \overline{[\{e_1\} \cup X_0 \cup \{e_{3n-1} : n \in N\}]}$$

gdzie $(e_n)_n$ oznacza bazę przestrzeni c_0, złożoną z wektorów jednostkowych, oraz

$$\overline{[\{e_1\} \cup X_0]} \perp \overline{[\{e_{3n-1} : n \in N\}]}.$$

Stąd, wnioskujemy, że $X_m := X_0 \cup \{e_{3n-1} : n \in N\}$ jest maksymalnym zbiorem $t-$ortogonalnym w c_0. Ponieważ $e_1 \notin \overline{[X_m]}$, otrzymujemy tezę, że przestrzeń c_0 posiada maksymalny ciąg $t-$ortogonalny, który nie jest bazą Schaudera.

1.4 Rozkłady skończenie wymiarowe w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha.

Mówimy, że rzeczywista lub zespolona ośrodkowa przestrzeń Banacha X posiada *skończenie wymiarowy rozkład* (*finite-dimensional decomposition*) jeśli istnieje ciąg podprzestrzeni skończenie wymiarowych $(D_n)_n$ taki, że każdy $x \in X$ może być przedstawiony w sposób jednoznaczny jako $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, gdzie $x_n \in D_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Naturalnie, taki rozkład posiada każda przestrzeń Banacha z bazą Schaudera, ale znane są też przykłady przestrzeni ośrodkowych mających skończenie wymiarowy rozkład, które nie mają bazy Schaudera. Nie każda ośrodkowa przestrzeń Banacha posiada skończenie wymiarowy rozkład, a własność posiadania skończenie wymiarowego rozkładu nie jest własnością dziedziczną ze względu na podprzestrzenie domknięte (patrz [10]).

W przypadku niearchimedesowym sytuacja różni się zasadniczo. Każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha przeliczalnego typu ma bazę Schaudera, tym samym posiada skończenie wymiarowy rozkład (choć, jak pokazał Śliwa w [50], w niearchimedesowych przestrzeniach Frécheta sytuacja wygląda inaczej, istnieją przykłady przestrzeni Frécheta przeliczalnego typu, które nie mają skończenie wymiarowego rozkładu).

Dość naturalnym na niearchimedesowym gruncie wydaje się być sformułowanie innej definicji, mianowicie

Definicja 8 *Niearchimedesowa przestrzeń Banacha przeliczalnego typu E posiada* skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny *(*orthogonal finite-dimensional decomposition - OFDD*) jeśli może być przedstawiona jako ortogonalna suma prosta przeliczalnej liczby podprzestrzeni skończenie wymiarowych* $D_1, D_2, ...$, *tzn. dowolny* $x \in X$ *może być przedstawiony w sposób jednoznaczny jako* $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *gdzie* $x_n \in D_n$ $(n \in \mathbb{N})$, *oraz zachodzi* $||x|| = \max_n \{||x_n||\}$.

Jeśli $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, to każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha przeliczalnego typu nad $\mathbb{K}$ posiada bazę ortogonalną ([46, Lemma 5.5]) i tym samym skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny.

Gdy $\mathbb{K}$ nie jest sferycznie zupełne, istnieją przykłady niearchimedesowych przestrzeni Banacha przeliczalnego typu, nie mające skończenie wymiarowego rozkładu ortogonalnego, a także przykłady przestrzeni mających skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, lecz nie posiadające bazy ortogonalnej. Ilustracją, niech będzie poniższy przykład:

Przyklad 9 *Niech* D *i* F *będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni Banacha* $\widehat{\mathbb{K}}$ *(sferycznego uzupełniena ciała* $\mathbb{K}$*) takimi, że* D *jest domkniętą podprzestrzenią przeliczalnego typu, a* F *jest podprzestrzenią skończenie wymiarową.*

Wówczas, D nie posiada skończenie wymiarowego rozkładu ortogonalnego, gdyż w przeciwnym razie przestrzeń D zawierałaby przeliczalny ciąg ortogonalny.

Przestrzeń $F \oplus c_0$ jest przykładem przestrzeni, która ma skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, lecz nie posiada ortogonalnej bazy.

W 1974 roku Gruson udowodnił ([46, Theorem 5.9]), że posiadanie ortogonalnej bazy w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha jest dziedziczne ze względu na domknięte podprzestrzenie liniowe. Naturalnym staje się pytanie (Problem 5), sformułowane przez Perez-Garcia i Schikhofa w [41], czy podobna sytuacja ma miejsce w przypadku skończenie wymiarowego rozkładu ortogonalnego, tzn. czy każda domknięta podprzestrzeń liniowa D niearchimedesowej przestrzeni Banacha E, posiadającej skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, też taki rozkład posiada?

Perez-Garcia i Schikhof pokazali (patrz [41] i [40]), że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna jeśli D jest podprzestrzenią ortodopełnialną w E.

Praca [AKH-8], której jestem współautorem stanowi kontynuację badań własności przestrzeni posiadających skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$. W szczególności, zawiera rozwiązanie Problemu 5. Przedstawiliśmy w niej konstrukcję niearchimedesowej przestrzeni Banacha posiadającej skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, oraz jej domkniętej podprzestrzeni liniowej, kowymiaru jeden, ktora nie posiada takiego rozkładu. Konstrukcja opiera się na pewnych własnościach ciągów elementów w $\widehat{\mathbb{K}}$, sferycznym uzupełnieniu $\mathbb{K}$.

Wybieramy elementy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \widehat{\mathbb{K}} \backslash \mathbb{K}$ takie, że $|\lambda_k| = 1$ $(k \in \mathbb{N})$ i $dist\,(\lambda_k, \mathbb{K}) = dist\,(\lambda_1, \mathbb{K})$ dla wszystkich $k \geq 2$. Niech $r := dist\,(\lambda_1, \mathbb{K})$ i $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. W zbiorze Λ wprowadzamy relację równoważności $\sim$ określając

$$\lambda_i \sim \lambda_j \text{ jeśli istnieją } a, b \in \mathbb{K} \text{ takie, że } a\lambda_i + b \in B_r\,(\lambda_j)\,,$$

gdzie $B_r\,(\lambda_j) = \{x \in \widehat{\mathbb{K}} : |x - \lambda_j| \leq r\}$.

Niech $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ oznacza przestrzeń liniową nad $\mathbb{K}$ wszystkich ciągów ograniczonych, złożonych z elementów należących do $\widehat{\mathbb{K}}$, z normą supremalną, oraz niech $E_\Lambda := \overline{[e_1, \lambda_1 e_1, e_2, \lambda_2 e_2, \ldots]}$ będzie domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ ($e_1, e_2, \ldots$ oznaczają standardowe wektory jednostkowe w $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$; zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lambda_k e_k \notin [e_k]$, gdyż $\lambda_k \in \widehat{\mathbb{K}} \backslash \mathbb{K}$). Wówczas, E_Λ jest niearchimedesową przestrzenią Banacha przeliczalnego typu, posiadającą skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, gdyż $E_\Lambda = \bigoplus_k D_k$, gdzie $D_k = [e_k, \lambda_k e_k]$, $k \in \mathbb{N}$.

Zdefiniujmy $X_1 := \{e_1, e_2, \ldots\}$, $X_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3, \ldots\}$, oraz $D_\Lambda := \overline{[X_1 \cup X_2]}$. Wówczas, D_Λ jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni E_Λ, kowymiaru jeden, gdyż, jak łatwo sprawdzić, $\lambda_1 e_1 \notin D_\Lambda$ i $E_\Lambda = D_\Lambda + [\lambda_1 e_1]$.

Dla tak zdefiniowanych Λ, E_Λ i D_Λ udowodniliśmy:

Twierdzenie 10 ([AKH-8, Theorem 3.1]) *D_Λ ma skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie elementy Λ można zgrupować w skończenie wiele klas równoważności względem relacji $\sim$.*

W ([AKH-8, Example 3.2]) pokazaliśmy, że $\mathbb{C}_p$ jest przykładem ciała w którego sferycznym uzupełnieniu można wybrać dwa przeliczalne podzbiory Λ_1 i Λ_2 takie, że dla określonych jak wyżej $E_{\Lambda_1}, E_{\Lambda_2}, D_{\Lambda_1}, D_{\Lambda_2}$ podprzestrzeń D_{Λ_1} ma skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, zaś D_{Λ_2} takiego rozkładu nie posiada.

Drugim, zasadniczym wynikiem pracy jest określenie pewnej klasy niearchimedesowych przestrzeni Banacha, posiadających skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny, takich, że każda domknięta podprzestrzeń liniowa skończonego kowymiaru w przestrzeni należącej do tej klasy, również posiada skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny. Udowodniliśmy:

Twierdzenie 11 ([AKH-8, Theorem 4.1]) *Niech E będzie niearchimedesową przestrzenią Banacha przeliczalnego typu nad niesferycznie zupełnym ciałem $\mathbb{K}$ taką, że $E = F_E \bigoplus G_E$, gdzie F_E i G_E są domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni E, oraz G_E posiada bazę ortogonalną.*

Jeśli D jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni E taką, że $codim E = n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to istnieją $u_1, \ldots, u_n \in E$, oraz domknięte podprzestrzenie liniowe $F_D, G_D \subset E$ takie, że $F_D \subset F_E + [u_1, \ldots, u_n]$, G_D ma bazę ortogonalną i $D = F_D \bigoplus G_D$.

Z Twierdzenia 11 wynika następujący wniosek dotyczący dziedziczności posiadania skończenie wymiarowego rozkładu przez podprzestrzenie liniowe o skończonym kowymiarze:

Wniosek 12 ([AKH-8, Corollary 4.2]) *Niech E będzie niearchimedesową przestrzenią Banacha przeliczalnego typu nad niesferycznie zupełnym ciałem $\mathbb{K}$. Ponadto, niech $E = F_E \bigoplus G_E$ dla pewnych podprzestrzeni liniowych $F_E, G_E \subset E$ takich, że F_E jest skończenie wymiarową, a G_E jest domknięta i posiada bazę ortogonalną.*

Wówczas, E posiada skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny i dla każdej domkniętej podprzestrzeni liniowej skończonego kowymiaru $D \subset E$

(i) istnieją podprzestrzenie liniowe F_D, G_D, gdzie F_D jest skończenie wymiarowa, a G_D jest domknięta i posiada bazę ortogonalną, takie, że $D = F_D \bigoplus G_D$;

(ii) D posiada skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny.

1.5 Własności bezpośrednich rozszerzeń podprzestrzeni liniowych w przestrzeniach Banacha. Przestrzenie hilbertowskie.

Wśród niearchimedesowych przestrzeni Banacha nie jest możliwe znalezienie odpowiedników klasycznych przestrzeni Hilberta, tzn. takich nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha na których można określić iloczyn skalarny indukujący normę i w których każda domknięta podprzestrzeń liniowa byłaby ortodopełnialna. Naturalnym zatem, wydaje się być poszukiwanie pewnych innych klas niearchimedesowych przestrzeni Banacha, posiadających zbliżone (choć słabsze) własności do przestrzeni Hilberta. Rozważmy dwie takie klasy, przestrzeni hilbertowskich i kartezjańskich.

Przestrzeń niearchimedesową nazywamy *hilbertowską* (*hilbertian*), jeśli jej każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń liniowa jest ortodopełnialna. Warto zauważyć, że jeśli E jest hilbertowska i $||E|| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$ ($||E|| := \{||x|| : x \in E\}$) to na E możemy określić iloczyn skalarny indukujący normę ([32, Theorem 4.1]). Własności przestrzeni hilbertowskich były opisywane w szeregu pracach, między innymi w [33], [35], [38] i [46, Rozdziały 4 i 5].

Niearchimedesowa przestrzeń E w której każda podprzestrzeń liniowa skończonego wymiaru posiada ortogonalną bazę nazywamy przestrzenią *kartezjańską* (c*artesian*). Własności przestrzeni kartezjańskich dość szczegółowo opisane są w [9, Rozdział 2].

Rozważmy następujące własności niearchimedesowej przestrzeni E :

(1) E posiada ortogonalną bazę,

(2) E jest przestrzenią hilbertowską,

(3) E jest przestrzenią kartezjańską.

Implikacje (1) $\Longrightarrow$ (2) ([35, Proposition 3.5]), oraz (2) $\Longrightarrow$ (3) ([35, Theorem 3.1 i Proposition 3.5]) są zawsze prawdziwe. Jeśli $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, to wszystkie przestrzenie niearchimedesowe nad $\mathbb{K}$ są hilbertowskie ([46, Lemma 4.35]), stąd kartezjańskie; gdy $\mathbb{K}$ ma gęstą waluację możemy znaleźć szereg przykładów przestrzeni niearchimedesowych, które nie posiadają ortogonalnej bazy, np. przestrzeń l^∞.

W 1992 roku van Rooij i Schikhof pokazali, że implikacja (3) $\Longrightarrow$ (1) nie jest prawdziwa gdy $\mathbb{K}$ jest niesferycznie zupełne, formułując Problem 2 związany z implikacją (3) $\Longrightarrow$ (2) ([45, Problem 4]). Pytanie o implikację (2) $\Longrightarrow$ (1) (Problem 3) pojawiało się w pracach różnych autorów kilkakrotnie, między innymi w [35, Problem poprzedzony Proposition 3.5] i [33, Remark za Proposition 2.3.2].

W pracy [AKH-4] opisałem, co uważam za jeden z najistotniejszych swoich wyników, pewną klasę przestrzeni hilbertowskich nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$, będących jednocześnie podprzestrzeniami przestrzeni l^∞. Ponieważ opisana klasa nie ogranicza się tylko do przestrzeni mających ortogonalną bazę, pokazałem tym samym, że implikacja (2) $\Longrightarrow$ (1) nie jest prawdziwa w ogólnym przypadku. Warto odnotować, że przed uzyskaniem tego wyniku, jedynymi znanymi przestrzeniami hilbertowskimi nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ były przestrzenie z ortogonalną bazą.

Jeśli D i E_0 są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni niearchimedesowej E, to E_0 nazywać będziemy *bezpośrednim rozszerzeniem* (*immediate extension*) podprzestrzeni D jeśli $D \subset E_0$ i E_0 nie zawiera żadnego niezerowego elementu ortogonalnego do D; innymi słowy, dla każdego $x \in E_0 \backslash D$ zachodzi warunek $dist\,(x, D) < ||x - d||$ dla każdego $d \in D$. Bezpośrednie rozszerzenie E_0 podprzestrzeni D nazywać będziemy *maksymalnym* w E, jeśli nie istnieje podprzestrzeń liniowa $G \subset E$ taka, że $E_0 \subsetneq G$, i G byłaby bezpośrednim rozszerzeniem podprzestrzeni D.

Podprzestrzeń liniową E przestrzeni l^∞, zawierającą c_0 i będącą bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0 będziemy nazywać bezpośrednim rozszerzeniem c_0, zawartym w l^∞.

W pracy [AKH-4] w dość szczegółowy sposób opisałem własności bezpośrednich rozszerzeń przestrzeni c_0, zawartych w l^∞. Pokazałem, między innymi:

Fakt 13 ([AKH-4, Proposition 2.8]) *Niech $E_0 \subset l^\infty$ będzie bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, $x = (x_1, x_2, ...) \in l^\infty$ i $m \in \mathbb{N}$. Oznaczmy*

$$M_m(x) := \{n \in \mathbb{N} : n > m \ i \ |x_n| = \sup_{k>m} |x_k|\}.$$

Jeśli $x \in E_0$, to $M_m\,(x)$ jest zbiorem niepustym i skończonym; ponadto, jeśli $x \notin c_0$, definiując $y_n := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $(n \in \mathbb{N})$, otrzymujemy $dist\,(x, c_0) = \lim_{n\to\infty} ||x - y_n||$.

Fakt 14 ([AKH-4, Proposition 2.10]) *Niech $E_0 \subset l^\infty$ będzie maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0 i niech $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ściśle malejącym ciągiem liczb rzeczywistych takich, że $\inf_{n\in N} p_n > 0$ i $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset |\mathbb{K}|$. Wówczas, istnieje $x = (x_1, x_2, ...) \in E_0$ taki, że $|x_n| = p_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Udowodniłem twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny by przestrzeń niearchimedesowa była hilbertowska:

Twierdzenie 15 ([AKH-4, Theorem 3.5]) *Przestrzeń niearchimedesowa E jest hilbertowska wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego niezerowego $x \in E$ istnieje podzbiór $\{w_i\}_{i\in I} \subset E$ taki, że $\{x\} \cup \{w_i\}_{i\in I}$ jest maksymalnym zbiorem ortogonalnym w E i $E = [x] + D$, gdzie D jest bezpośrednim rozszerzeniem podprzestrzeni $\overline{[\{w_i\}_{i\in I}]}$.*

Wykorzystując Fakty 13 i 14, oraz kluczowe w udowodnieniu własności bycia przestrzenią hilbertowską Twierdzenie 15, otrzymałem:

Twierdzenie 16 ([AKH-4, Theorem 3.6]) *Jeśli E_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni l^∞, będącą maksymalnym, bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, to E_0 jest przestrzenią hilbertowską, która nie jest przeliczalnego typu i która nie posiada bazy ortogonalnej.*

Dość żmudny i skomplikowany technicznie dowód Twierdzenia 16 przebiega w kilku etapach. W pierwszym, ustalamy dowolny $a = (a_1, a_2, ...) \in E_0$. Następnie, wykorzystując Fakt 13 wybieramy $i_0 \in M_m(a)$. Określając $X_0 := \{e_1, ..., e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, ...\}$, oraz oznaczając przez D podprzestrzeń liniową przestrzeni E_0, będącą maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem podprzestrzeni $\overline{[X_0]}$ w E_0, pokazujemy, że $X_0 \cup \{a\}$ jest maksymalnym zbiorem ortogonalnym w E_0, a także, że zachodzi $E_0 = [a] + D$. Następnie, wykorzystując Twierdzenie 15, wnioskujemy, że przestrzeń E_0 jest hilbertowska. W kolejnym kroku znajdujemy nieprzeliczalny podzbiór przestrzeni E_0, który jest $\frac{1}{2}-$ortogonalny. Tym samym dowodzimy, że E_0 nie jest przestrzenią przeliczalnego typu. Ponieważ z [46, Theorem 5.2] wynika, że każdy maksymalny zbiór ortogonalny w E_0 jest przeliczalny, wnioskujemy, że E_0 nie posiada bazy ortogonalnej.

Z Twierdzenia 16 wypływają dalsze konkluzje:

Wniosek 17 ([AKH-4, Corollary 3.8]) *Każde bezpośrednie rozszerzenie przestrzeni c_0, zawarte w l^∞, jest przestrzenią hilbertowską.*

Wniosek 18 ([AKH-4, Corollary 3.9]) *Każde bezpośrednie rozszerzenie przestrzeni c_0, zawarte w l^∞, które jest przeliczalnego typu, posiada bazę ortogonalną.*

Niech $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ oznaczać będzie, podobnie jak w części 1.4, przestrzeń Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$ wszystkich ciągów ograniczonych, złożonych z elementów należących do $\widehat{\mathbb{K}}$ z normą supremalną (w pracy [AKH-6] posłużyłem się oznaczeniem $l^\infty_{\widehat{K}}$) i niech $c_{0_{\widehat{K}}} := \{a = (a_1, a_2, ...) \in l^\infty(\widehat{\mathbb{K}}) : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

W naturalny sposób $c_0 \subset c_{0_{\widehat{K}}} \subset l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ i $c_0 \subset l^\infty \subset l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$. Można wówczas pokazać, że $c_{0_{\widehat{K}}}$ jest bezpośrednim rozszerzeniem c_0 ([AKH-6, Proposition 6]). Ponieważ przestrzeń $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ jest sferycznie zupełna, zawiera podprzestrzenie liniowe będące sferycznymi uzupełnieniami, odpowiednio dla c_0 i $c_{0_{\widehat{K}}}$.

Kolejny fakt pokazuje kiedy bezpośrednie rozszerzenie przestrzeni c_0 jest jednocześnie bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni $c_{0_{\widehat{K}}}$:

Fakt 19 ([AKH-6, Proposition 6 i Corollary 7]) *1). Podprzestrzeń liniowa $G \subset l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ jest bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni $c_{0_{\widehat{K}}}$ wtedy i tylko wtedy gdy G jest bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0 i $c_{0_{\widehat{K}}} \subset G$.*

2). Niech $x = (x_1, x_2, ...) \in l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$. Jeśli $[x] + c_{0_{\widehat{K}}}$ jest bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni $c_{0_{\widehat{K}}}$, to $[x] + c_0$ jest bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0.

Z Wniosku 17 wynika, że wszystkie bezpośrednie rozszerzenia przestrzeni c_0, zawarte w l^∞ są hilbertowskie. Wśród podprzestrzeni liniowych przestrzeni $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ można bez trudu znaleźć bezpośrednie rozszerzenia przestrzeni c_0 które hilbertowskimi nie są, np. $c_{0_{\widehat{K}}}$ (gdyż $c_{0_{\widehat{K}}}$ zawiera podprzestrzeń izomorficzną z $\widehat{\mathbb{K}}$, tym samym zawiera podprzestrzenie liniowe skończonego wymiaru niemające bazy ortogonalnej).

Zasadniczym wynikiem pracy [AKH-6] jest Twierdzenie 20, określające kiedy podprzestrzeń $[x]+E_0 \subset l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$, gdzie E_0 jest maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, zawartym w l^∞, jest kartezjańska, a jednocześnie nie jest hilbertowska, pokazujące tym samym, że wynikanie (3) $\Longrightarrow$ (2) nie jest prawdziwe w ogólnym przypadku.

Twierdzenie 20 ([AKH-6, Theorem 12]) *Niech $x = (x_1, x_2, ...) \in l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ i niech $E_0 \subset l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ będzie maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, zawartym w l^∞. Jeśli*

- $x_k \in \widehat{\mathbb{K}} \backslash \mathbb{K}$, $|x_k| > |x_{k+1}|$, *oraz* $dist(x_k, \mathbb{K}) = r$ $(k \in \mathbb{N})$,*dla pewnego* $r > 0$,
- $\lim_{k\to\infty} |x_k| = r$,
- *dla każdego skończonego podzbioru* $\{k_1, k_2, ..., k_n\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *(gdzie* $x_0 = 1$*)*

$$dist\left(x_{k_i}, \left[x_{k_1}, ..., x_{k_{i-1}}, x_{k_{i+1}}, x_{k_n}\right]\right) \geq r \;\; (i = 1, ..., n)\,,$$

to $[x] + E_0$ jest przestrzenią kartezjańską, która nie jest hilbertowska.

Warto zaznaczyć, że z udowodnionych w [AKH-2] własności ciała $\mathbb{C}_p$, wynika że przyjmując $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$ możemy znaleźć element $x \in l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ spełniający założenia Twierdzenia 20.

W duży prostszy technicznie sposób pokazałem:

Twierdzenie 21 ([AKH-6, Proposition 14]) *Niech E_0 i $\widehat{c_0}$ będą oznaczać podprzestrzenie liniowe przestrzeni $l^\infty(\widehat{\mathbb{K}})$ takie, że E_0 jest maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, zawartym w l^∞, a $\widehat{c_0}$ jest sferycznym uzupełnieniem przestrzeni c_0, zawierającym E_0. Niech $x = (x_1, x_2, ...) \in \widehat{c_0} \backslash E_0$.*

Jeśli $dist(x, E_0) = dist(x, c_0) = r$ i zbiór $N_0 = \{k : dist(x_k, \mathbb{K}) = r\}$ jest niepusty i skończony, to $E_0 + [x]$ nie jest przestrzenią kartezjańską.

Dwa dalsze wyniki związane z tą tematyką udowodniłem w pracy [AKH-5]. Pokazałem:

Twierdzenie 22 ([AKH-5, Theorem 3.3]) *Niech E_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni l^∞ i niech $\{x_i\}_{i\in I}$ będzie maksymalnym zbiorem ortogonalnym (niekoniecznie przeliczalnym) w E_0. Wówczas, jeśli E_0 jest maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem podprzestrzeni $\overline{\left[\{x_i\}_{i\in I}\right]}$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *E_0 jest hilbertowska;*

2. *E_0 jest kartezjańska;*

3. *dla każdego $u = (u_1, u_2, ...) \in E_0$ istnieje* $\max_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Twierdzenie 23 ([AKH-5, Theorem 3.9]) *Jeśli E_0 jest maksymalnym bezpośrednim rozszerzeniem przestrzeni c_0, zawartym w l^∞, to przestrzeń ilorazowa E_0/c_0 jest przestrzenią sferycznie zupełną.*

Ponieważ topologiczny dual każdej sferycznie zupełnej przestrzeni niearchimedesowej nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ jest zerowy, z Twierdzenia 23 wynika, że c_0, jako podprzestrzeń E_0, jest $w(E_0, E_0^*)$ −gęsta w E_0, podobnie jak c_0 jest $w(l^\infty, c_0)$ −gęsta w l^∞ (patrz [46, Corolary 4.3]; jeśli $\mathbb{K}$ jest niesferycznie zupełne to topologicznym dualem przestrzeni l^∞ jest przestrzeń c_0).

Praca [AK-4] jest cytowana w [41], gdzie Twierdzenie 16 było w dość istotny sposób wykorzystane przez Perez-Garcia i Schikhofa do pokazania, że klasa niearchimedesowych przestrzeni Banacha posiadających własność metrycznej aproksymacji (definiowanej następująco: dla każdego $\varepsilon > 0$ i skończonego podzbioru $X \subset E$ istnieje operator $T : E \to E$ taki, że $||T|| \leq 1$, $dim T(E) < \infty$ i $||Tx - x|| < \varepsilon$ dla każdego $x \in X$) nie ogranicza się tylko do przestrzeni posiadających skończenie wymiarowy rozkład ortogonalny.

1.6 Izometrie w przestrzeniach niearchimedesowych skończonego wymiaru.

Opisane w poprzednich częściach autoreferatu wyniki zostały uzyskane przy konkretnych założeniach dotyczących ciała $\mathbb{K}$. W części 1.3 była to własność posiadania gęstej waluacji, w pozostałych częściach, niesferyczna zupełność ciała $\mathbb{K}$. W ostatnim składniku cyklu publikacji, dotyczącym, podobnie jak część 1.2, przestrzeni skończenie wymiarowych, rozważamy sytuację, gdy ciało $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte (Twierdzenie 24 i Wniosek 25), lub gdy $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne i ciało reszt $\Bbbk$ jest skończone (Twierdzenie 26).

Dowody prezentowanych w tej części twierdzeń są typowo niearchimedesowe, choć zasadniczo różnią się od dowodów prezentowanych we wcześniejszych częściach autoreferatu. Dla przykładu, dowód Twierdzenia 24 wykorzystuje własności niearchimedesowej przestrzeni skończonego wymiaru E jako lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej, zerowymiarowej, w szczególności fakt, że dla ustalonych $r_1 > r_0 > 0$, dla dowolnego $x \in E$ każda kula domknięta $B_{r_1}(x) \subset E$ zawiera tylko skończenie wiele różnych kul o promieniach większych od r_0.

Zagadnienie, przy jakich założeniach odwzorowanie $T : E \to E$, określone na przestrzeni metrycznej E zachowujące odległość jednostkową jest izometrią (zwane w literaturze Problemem Aleksandrowa) w klasycznym przypadku było przedmiotem badań wielu specjalistów; dla przypadku niearchimedesowego problem ten był rozważany wcześniej między innymi w [31].

W pracy [AKH-7] rozważałem odwzorowanie $T : E \to E$ określone na niearchimedesowej przestrzeni skończonego wymiaru E, spełniające następujące własności:

(1) T jest suriekcją,

(2) T spełnia *warunek Lipschitza*, tzn. $||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||$ dla wszystkich $x, y \in E$,

(3) T ma *mocną własność zachowywania odległości jednostkowej* (*the strong distance one preserving property* - SDOPP), tzn. dla dowolnych $x, y \in E$ warunek $||x-y|| = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $||T(x) - T(y)|| = 1$;

(4) $T(0) = 0$.

Udowodniłem, że bycie izometrią przez odwzorowanie T, spełniające warunki $(1)-(4)$ zależy istotnie od ciała $\mathbb{K}$:

Twierdzenie 24 ([AKH-7, Theorem 5]) *Jeśli ciało $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte to każde odwzorowanie $T : E \to E$ spełniające warunki $(1)-(4)$ jest izometrią.*

Jednocześnie, skonstruowałem dwa przykłady odwzorowań $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ spełniających warunki $(1)-(4)$, lecz niebędących izometriami gdy

- $\mathbb{K}$ ma dyskretną waluację i ciało reszt $\Bbbk$ (definiowane jako $\Bbbk := B_{\mathbb{K}}/B_{\mathbb{K}}^{-}$) ma nieskończenie wiele elementów,
- $\mathbb{K}$ ma gęstą waluację.

Ponieważ $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte wtedy i tylko wtedy gdy ma dyskretną waluację i ciało reszt $\Bbbk$ jest skończone, otrzymujemy następującą konkluzję:

Wniosek 25 ([AKH-7, Corollary 11]) *Każde odwzorowanie $T : E \to E$ spełniające warunki $(1)-(4)$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte.*

Kolejny wynik, zawarty w pracy [AKH-7], dotyczy surjektywności izometrii określonych na niearchimedesowych przestrzeniach skończenie wymiarowych. Udowodniłem następujący fakt (rozszerzając wynik Schikhofa uzyskany dla izometrii $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, patrz [47]):

Twierdzenie 26 ([AKH-7, Theorem 12]) *Każda izometria $T : E \to E$ jest surjektywna wtedy i tylko wtedy gdy ciało $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne i ciało reszt $\Bbbk$ jest skończone.*

W [AKH-7, Theorem 2] pokazałem również, że twierdzenie Mazura-Ulama nie jest prawdziwe w przypadku niearchimedesowym, rozszerzając wyniki otrzymane przez Moslehiana i Sadeghi w [31].

Praca [AKH-7] jest cytowana w [53] i [34], oraz w Review ZbMath dla pracy [52].

2 Omówienie pozostałych wyników.

Oprócz wymienionych w paragrafie 1 i zaliczonych do cyklu habilitacyjnego 8 publikacji jestem autorem, lub współautorem 12 dalszych artykułów matematycznych (dwa z nich mają status przyjętych do druku, pozostałe są opublikowane). Dwie spośród pozostałych prac ([AK-16] i [AK-19]) dotyczą własności rzeczywistych przestrzeni Frécheta, pozostałe analizy niearchimedesowej.

Prócz tego jestem współautorem 4 prac opublikowanych w czasopismach inżynierskich, prezentujących pewne zastosowania matematyki w zagadnieniach geotechniki i mechaniki gruntów.

Pozostałe publikacje naukowe (matematyczne):

[AK-9] Kubzdela A., *The Mackey topology for locally convex modules over a valuation ring.* Bull. Pol. Acad. Sci., Math. 47 (1999), 27-36

[AK-10] Kubzdela A., *Some remarks on duality of locally convex B_K-modules.* Lecture Notes Pure Appl. Math. (Marcel Dekker) 207 (1999), 179-187

[AK-11] Kubzdela A., *Finite dimensional orthocomplemented subspaces of l^∞.* Indag. Math., New Ser. 13 (2002), 515-521 (IF 0.32)

[AK-12] Kubzdela A., *The Hahn-Banach subspaces of Banach spaces with base.* Contemporary Mathematics (AMS) 319 (2003), 179-189

[AK-13] Kubzdela A., *Non-Archimedean $K-$spaces.* Banach Center Publications 68 (2005), 87-93

[AK-14] Kubzdela A., *On multi-orthogonal bases in finite-dimensional non-Archimedean normed spaces.* Indag. Math. New Ser. 18 (2007), 435-446 (IF 0.33)

[AK-15] Kąkol J., Kubzdela A., Sliwa W., *Non-archimedean Dugundji extension theorem.* Czech. Math. Journal 63 (2013), 157-164 (IF 0.30)

[AK-16] Angosto C., Kąkol J., Kubzdela A., Lopez-Pellicer M., *A quantitative version of Krein's theorem for Fréchet spaces.* Arch. Math. 101 (2013), 65–77 (IF 0.48)

[AK-17] Kąkol J., Kubzdela A., *Non-Archimedean quantitative Grothendieck and Krein's Theorems.* Journal of Convex Analysis 20 (2013), 233-242 (IF 0.62)

[AK-18] Angosto C., Kąkol J., Kubzdela A., *Measures of weak noncompactness in non-Archimedean Banach spaces.* Journal of Convex Analysis 21 (2014), 833-849 (IF 0.59)

[AK-19] Gabriyelyan S. S., Kąkol J., Kubzdela A., Lopez-Pellicer M., *On topological properties of Fréchet locally convex spaces with the weak topology.* Topology and Appl. (przyjęta do druku) (IF 0.59)

[AK-20] Kąkol J., Kubzdela A., *On non-Archimedean quantitative compactness theorems.* Contemporary Mathematics (AMS) (przyjęta do w druku)

(inżynierskie):

[AKI-21] Kania M., Kubzdela A., *Dyskretne modelowanie przestrzennej struktury niejednorodnego podłoża gruntowego.* Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej 40 (1995), 117-132

[AKI-22] Kania M., Kubzdela A., *Analiza przemieszczeń pala w sprężystym ośrodku trójwarstwowym przy użyciu funkcji MARS.* Górnictwo i geoinżynieria 35 (2011), 319-324

[AKI-23] Florkiewicz A., Kubzdela A., *Safety Assessment of two piling designs for foundation of a bridge pylon.* FCEE 14 (2011), 63-71

[AKI-24] Florkiewicz A., Kubzdela A., *Factor of safety in limit analysis of slopes.* Geomechanics and Engineering 5 (2013), 485-497 (IF 0.35)

2.1 Prace opublikowane przed uzyskaniem doktoratu.

Najważniejszymi wynikami, uzyskanymi w tym okresie są twierdzenia dotyczące charakteryzacji podprzestrzeni ortodopełnialnych w niearchimedesowych przestrzeniach c_0, $c_0(I)$, oraz l^∞ i $l^\infty(I)$ (prace [AK-11] i [AK-12]). Pewną kontynuacją tego kierunku badań jest praca [AKH-1], omawiana w części 1.2.

W pracy [AK-12] udowodnione zostało twierdzenie charakteryzujące podprzestrzenie ścisłe w niearchimedesowych przestrzeniach Banacha nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$:

Twierdzenie 27 ([AK-12, Theorem 2.4]) *Jeśli E jest niearchimedesową przestrzenią Banacha, a G jej domkniętą podprzestrzenią liniową to G jest ścisła w E wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej podprzestrzeni liniowej $L \subset G$ jej każde bezpośrednie rozszerzenie w E zawarte jest w G.*

Następnie, w oparciu o Twierdzenie 27, oraz pokazane w pracach [AK-11] i [AK-12] własności przestrzeni $l^\infty(I)$, udowodniłem następujące charakterystyki podprzestrzeni ortodopełnialnych w konkretnych przestrzeniach Banacha nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$:

- każda słabo domknięta $HB-$podprzestrzeń D przestrzeni $c_0(I)$, będąca przestrzenią przeliczalnego typu, lub dla której $c_0(I)/D$ jest przeliczalnego typu, jest ortodopełnialna ([AK-12, Theorem 3.8 i Corollary 3.10]);
- każda $HB-$podprzestrzeń przestrzeni c_0 jest ortodopełnialna ([AK-11, Theorem 7]);
- każda ścisła podprzestrzeń skończonego wymiaru przestrzeni $l^\infty(I)$ jest ortodopełnialna ([AK-12, Theorem 3.4]);
- każda słabo domknięta, ścisła podprzestrzeń przestrzeni l^∞ jest ortodopełnialna ([AK-12, Corollary 3.5]),

oraz bardziej ogólny fakt:

- każda skończenie wymiarowa, posiadająca ortogonalną bazę, ścisła $HB-$podprzestrzeń dowolnej niearchimedesowej przestrzeni Banacha jest ortodopełnialna ([AK-12, Proposition 4.3]).

W pracach [AK-9] i [AK-10] zajmowałem się badaniem własności topologii lokalnie wypukłych określanych na $B_{\mathbb{K}}-$modułach.

Praca [AK-11] jest cytowana w [38], prace [AK-9] i [AK-10] są cytowane w [39].

2.2 Bazy multiortogonalne w skończenie wymiarowych przestrzeniach niearchimedesowych.

Niech E będzie $n-$wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ na której określono normy niearchimedesowe $||.||_1, ..., ||.||_k$. Zbiór $\{x_1, ..., x_n\} \subset E$ nazywać będziemy bazą *multiortogonalną w E* jeśli jest on bazą ortogonalną względem każdej z norm $||.||_1, ..., ||.||_k$.

van Rooij i Schikhof pokazali w [45], że jeśli $||.||_1, ||.||_2$ są niearchimedesowymi normami zdefiniowanymi na przestrzeni liniowej skończonego wymiaru E takimi, że $(E, ||.||_1)$ i $(E, ||.||_2)$ mają bazy ortogonalne, to E osiada bazę multiortogonalną. Jednocześnie postawili pytanie, czy podobny fakt zachodzi dla trzech lub więcej norm określonych na E.

W [AK-14, Theorem 5] pokazałem, że na przestrzeni $\mathbb{K}^2$ można zdefiniować trzy normy niearchimedesowe $||.||_1$, $||.||_2$, $||.||_3$, takie, że dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$ przestrzeń $\left(\mathbb{K}^2, ||.||_i\right)$ posiada ortogonalną bazę, lecz $\mathbb{K}^2$ nie posiada bazy multiortogonalnej (względem norm $||.||_1, ||.||_2$ i $||.||_3$). Pokazałem również, że posiadanie bazy multiortogonalnej przez przestrzeń skończonego wymiaru nie jest dziedziczne ze względu na podprzestrzenie liniowe ([AK-14, Example 6]), oraz udowodniłem następujące twierdzenie, określające warunki istnienia bazy multiortogonalnej względem trzech niearchimedesowych norm określonych na danej przestrzeni $n-$wymiarowej:

Twierdzenie 28 ([AK-14, Theorem 9]) *Niech $||.||_1, ||.||_2$ będą niearchimedesowymi normami określonymi na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej E i niech $\{e_1, ..., e_n\}$ będzie bazą multiortogonalną względem norm $||.||_1$ i $||.||_2$. Wówczas, następujące warunki są równoważne:*

1. $\frac{||e_1||_1}{||e_1||_2} = ... = \frac{||e_n||_1}{||e_n||_2} = p$;
2. $\frac{||x||_1}{||x||_2} = p$ *dla każdego niezerowego $x \in E$;*
3. *dla każdej niearchimedesowej normy $||.||_3$ określonej na E, każda 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa przestrzeni E posiada bazę multiortogonalną względem norm $||.||_1, ||.||_2$ i $||.||_3$;*
4. *dla każdej niearchimedesowej normy $||.||_3$ określonej na E, E posiada bazę multiortogonalną względem norm $||.||_1, ||.||_2$ i $||.||_3$.*

2.3 Niearchimedesowe K-przestrzenie.

Pojęcie (rzeczywistej lub zespolonej) $K-$przestrzeni zostało wprowadzone przez Kaltona i Pecka w 1979 (patrz [23], [24]). Dla przyjętej niearchimedesowej definicji:

Definicja 29 *Przestrzeń Banacha E nad $\mathbb{K}$ nazywać będziemy* $K-$przestrzenią *jeśli dla dowolnej przestrzeni quasi-Banacha X i jednowymiarowej podprzestrzeni liniowej $L \subset X$ takiej, że X/L jest izomorficzne z E, podprzestrzeń L jest dopełnialna w X.*

Martinez-Maurica i Perez-Garcia udowodnili ([27, Theorem 5] i [26, Theorem 3]), że niearchimedesowa przestrzeń Banacha E nad $\mathbb{K}$ jest $K-$przestrzenią jeśli $\mathbb{K}$ jest sferycznie zupełne, lub jeśli E posiada (niekoniecznie przeliczalną) bazę, a każda przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, która nie jest niearchimedesowa, jest $K-$przestrzenią jeśli posiada bazę Schaudera (stąd, w szczególności, w przeciwieństwie do przypadku rzeczywistego, przestrzeń l^1 nad $\mathbb{K}$ jest $K-$przestrzenią).

Przypomnijmy, że podprzestrzeń liniowa $D \subset E$ posiada *słabą własność rozszerzania*, jeśli każdy $f_0 \in D^*$ ma rozszerzenie $f \in E^*$. W pracy [AK-13] pokazałem dalsze własności niearchimedesowych $K-$przestrzeni:

Fakt 30 ([AK-13, Proposition 4]) *Niech E oznacza niearchimedesową przestrzeń Banacha nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$, która jest $K-$przestrzenią. Wówczas, E ma totalny dual, każda domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni E jest $K-$przestrzenią, oraz każda domknięta podprzestrzeń liniowa $D \subset E$, posiadająca słabą własność rozszerzania jest słabo domknięta.*

Następnie, pokazując, że przestrzeń l^∞ nad niesferycznie zupełnym $\mathbb{K}$ posiada domkniętą, słabo gęstą i mającą słabą własność rozszerzania podprzestrzeń właściwą, wykorzystując Fakt 30, dowiodłem:

Twierdzenie 31 ([AK-13, Theorem 5, Corollary 6]) *Jeśli $\mathbb{K}$ nie jest sferycznie zupełne to każda niearchimedesowa przestrzeń Banacha zawierającą kopię l^∞ (podprzestrzeń liniowo homeomorficzną z l^∞) nie jest $K-$przestrzenią. W szczególności, przestrzeń l^∞ nie jest $K-$przestrzenią.*

2.4 Twierdzenie o extenderze. Retrakcje w przestrzeniach ultraregularnych.

Niech X oznaczać będzie przestrzeń topologiczną normalną, Y jej podprzestrzeń domkniętą, a $C^*(X, \mathbb{R})$ przestrzeń funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych na X. Twierdzenie Tietzego-Urysohna pozwala na konstrukcję liniowego extendera $T : C^*(Y, \mathbb{R}) \to C^*(X, \mathbb{R})$, tzn. odwzorowania liniowego takiego, że $T(f)|Y = f$ dla każdego $f \in C^*(Y, \mathbb{R})$. Naturalnym staje się wówczas pytanie, czy można tak skonstruować odwzorowanie T by było ono ciągłe. Znany jest fakt (patrz [5], [14], [28]) mówiący, że jeśli X jest przestrzenią metryzowalną, a Y jej podprzestrzenią domkniętą, to istnieje ciągły liniowy extender $T : C^*(Y, \mathbb{R}) \to C^*(X, \mathbb{R})$ gdy obie przestrzenie $C^*(Y, \mathbb{R})$ i $C^*(X, \mathbb{R})$ wyposażone są w topologię generowaną przez normę supremalną (wówczas T jest izometrią), topologię zwarto-otwartą, lub topologię zbieżności punktowej. Znane są również przykłady przestrzeni niemetryzowalnych (np. $X = \beta\mathbb{N}$ i $Y = \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$), dla których takiego ciągłego liniowego extendera skonstruować nie można.

Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczną Hausdorffa w której każdy punkt posiada fundamentalny system otoczeń złożony ze zbiorów domknięto-otwartych nazywamy *ultraregularną*; przestrzeń topologiczna Hausdorffa w której dla dowolnych zbiorów domkniętych V, W istnieje zbiór domknięto-otwarty $C \subset X$ taki, że $V \subset C$ i $C \cap W = \varnothing$) nazywana jest przestrzenią *ultranormalną*.

W pracy [AK-15] udowodnione zostało następujące twierdzenie:

Twierdzenie 32 ([AK-15, Theorem 2]) *Jeśli $\mathbb{K}$ ma dyskretną waluację, X jest przestrzenią ultranormalną, a Y jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni X i przynajmniej jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- *X jest kolektywnie normalna;*
- *Y jest przestrzenią Lindelöfa;*
- *$\mathbb{K}$ jest ośrodkowe*

  to istnieje izometryczny, liniowy extender $T : C^*(Y, \mathbb{K}) \to C^*(X, \mathbb{K})$.

W dowodzie Twierdzenia 32 wykorzystuje się fakt, że $C^*(Y,\mathbb{K})$ posiada bazę ortonormalną $(f_i)_{i\in I}$, złożoną z funkcji lokalnie stałych. Przy spełnieniu jednego z pierwszych dwóch warunków, dla każdego $i \in I$ wybieramy rozłączne pokrycie podprzestrzeni Y podzbiorami domknięto-otwartymi $(U_j)_{j\in I_i}$ takimi, że każda z funkcji f_i przyjmuje stałe wartości na każdym elemencie pokrycia, tzn. $f_i(x) = \lambda_{i,j}$ (dla pewnego $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$) jeśli $x \in U_j$ $(j \in I_i)$. Następnie, tworzymy rozłączne pokrycie $(V_j)_{j\in I_i}$ przestrzeni X, którego elementami sa zbiory domknięto-otwarte w taki sposób, że $V_j \cap Y = U_j$ dla każdego $j \in I_i$. Wówczas, dla każdego $i \in I$ określamy wartości funkcji F_i, będącej rozszerzeniem f_i na przestrzeń X, podstawiając $F_i(x) := \lambda_{i,j}$ jeśli $x \in V_j$ $(j \in I_i)$. Ostatecznie, definiujemy extender następująco: $T : f = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i \longmapsto T(f) = \sum_{i\in I} \lambda_i F_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{K})$.

Ponadto, w pracy [AK-15] przedstawiliśmy nowy dowód znanego faktu, mówiącego, że każda zwarta, metryzowalna podprzestrzeń Y przestrzeni ultraregularnej X jest jej retraktem ([AK-15, Theorem 3]), w którym również wykorzystuje się istnienie w $C(Y,\mathbb{K})$ bazy ortonormalnej, w tym przypadku złożonej z funkcji charakterystycznych kul domkniętych przestrzeni metryzowalnej Y. Konkluzją [AK-15, Theorem 3] jest:

Wniosek 33 ([AK-15, Corollary 6]) *Jeśli X jest przestrzenią ultraregularną, a $C_p(X,\mathbb{K})$ jest przestrzenią ściśle przeliczalnego typu to każda zwarta podprzestrzeń Y przestrzeni X jest jej retraktem.*

2.5 Kwantytatywne twierdzenia o zwartości.

W ostatnich latach dla szeregu klasycznych twierdzeń o zwartości zostały udowodnione ich kwantytatywne odpowiedniki, twierdzenia których tezami są nierówności dla konkretnych miar niezwartości, a z których wynikają klasyczne rezultaty (patrz np. [2], [3], [11], [16], [21]).

Jednym z przykładów takich twierdzeń jest twierdzenie Grothendiecka, które w klasycznej wersji mówi że jeśli X jest przestrzenią zwartą, to dowolny podzbiór ograniczony H przestrzeni Banacha $C(X,\mathbb{R})$, jest relatywnie zwarty w topologii zbieżności punktowej i jednostajnie ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy jest relatywnie słabo-zwarty (patrz [17, Theorem 4.2]). Kwantytatywny odpowiednik tego faktu dowiedli Angosto i Cascales ([2, Theorem 3.5]), otrzymując nierówność

$$\gamma_X(H) \le \gamma(H) \le 2\gamma_X(H), \tag{*}$$

dla miar niezwartości γ i γ_X zdefiniowanych następująco:

$$\begin{aligned}\gamma(H) &: = \sup\{|\lim_m \lim_n z_m^*(x_n) - \lim_n \lim_m z_m^*(x_n)| : (z_m^*)_m \subset B_{C(X,\mathbb{R})^*}, (x_n)_n \subset H\},\\ \gamma_X(H) &: = \sup\{|\lim_m \lim_n f_m(x_n) - \lim_n \lim_m f_m(x_n)| : (f_m)_m \subset H, (x_n)_n \subset X\},\end{aligned}$$

gdzie suprema przebiegają po wszystkich takich ciągach, że wszystkie odpowiednie granice istnieją; $B_{C(X,\mathbb{R})^*}$ w definicji miary γ oznacza kulę jednostkową w dualu. Ponieważ $\gamma_X(H) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy H jest relatywnie zwarty w topologii zbieżności punktowej, oraz $\gamma(H) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy H jest relatywnie słabo-zwarty, nierówności (*) implikują klasyczne twierdzenie Grothendiecka.

W pracy [AK-17] pokazaliśmy, że nierówności (*) nie są prawdziwe dla przestrzeni funkcji ciągłych $C(X,\mathbb{K})$, gdzie X jest zwartą przestrzenią topologiczną zero-wymiarową, a $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte; co więcej, pokazaliśmy, że twierdzenie Grothendiecka nie ma swojego dokładnego odpowiednika w analizie niearchimedesowej ([AK-17, Theorem 2.1]). W pracy [AK-17] udowodniliśmy trochę słabszą tezę, wzmocnioną później w [AK-20] warunkiem kwantytatywnym:

Twierdzenie 34 ([AK-17, Theorem 2.8],[AK-20, Theorem 3]) *Jeśli X jest zwartą przestrzenią topologiczną zero-wymiarową, a $\mathbb{K}$ jest lokalnie zwarte, to dla dowolnego jednostajnie ograniczonego podzbioru $H \subset C(X, \mathbb{K})$ zachodzi warunek*

$$\gamma_X(acoH) = \gamma(H).$$

W szczególności, ograniczony podzbiór $H \subset C(X, \mathbb{K})$ jest relatywnie słabo-zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $acoH$ jest relatywnie zwarty w topologii zbieżności punktowej i jednostajnie ograniczony.

$acoH$ oznacza absolutnie wypukłą powłokę zbioru H, definiowaną jako

$$acoH = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B_{\mathbb{K}}, x_1, \ldots, x_n \in H\}.$$

W pracy [AK-18], rozważając miary niezwartości γ, oraz k i ω (miara de Blasiego), definiowane następująco

$$\omega(M) := \inf\{\varepsilon > 0 : M \subset K_\varepsilon + B_{E,\varepsilon};\ K_\varepsilon \text{ jest } \ w(E, E^*) - \text{zwarty}\},$$

$$k(M) := \sup_{x^{**} \in \overline{M}^{w(E^{**}, E^*)}} dist(x^{**}, E),$$

udowodniliśmy kwantytatywny, niearchimedesowy odpowiednik twierdzenia Kreina:

Twierdzenie 35 ([AK-18, Corollary 3.9 i Theorem 3.10]) *Jeśli M jest podzbiorem ograniczonym niearchimedesowej przestrzeni Banacha E nad lokalnie zwartym $\mathbb{K}$ to*

$$\begin{aligned} \gamma(M) &\le k(M) \le k(acoM) \le \omega(M) = \omega(acoM) \le |\rho|^{-1}\gamma(M), \\ \gamma(M) &\le \gamma(acoM) \le \frac{1}{|\rho|}\gamma(M), \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza element uniformizujący ciała $\mathbb{K}$.

W szczególności, otrzymaliśmy:

Wniosek 36 ([AK-18, Theorem 3.10]) *Jeśli $|\mathbb{K}| = \{||x|| : x \in E\}$ to dla dowolnego podzbioru ograniczonego M niearchimedesowej przestrzeni Banacha E nad lokalnie zwartym $\mathbb{K}$ mamy*

$$\gamma(M) = \gamma(acoM) = k(M) = k(acoM) = \omega(M) = \omega(acoM).$$

Z Twierdzenia 35 wynika, że miara γ, oraz wprowadzona przez de Blasiego miara ω są równoważne (co nie jest prawdą w przypadku rzeczywistym).

Dodatkowo, pokazaliśmy dalsze własności, oraz dodatkowe wzory dla miary ω ([AK-18, Propositions 3.5 i 3.7] i [AK-20, Corollary 2]), w szczególności określając

- $\omega(M) = \sup\{\overline{\lim}_m dist(x_m, [x_1, \ldots, x_{m-1}]) : (x_m) \subset M\}$ dla dowolnego podzbioru ograniczonego $M \subset E$ ([AK-18, Proposition 3.5]);
- $\omega(M) = \max\{\varepsilon : (u_n)_n \subset acoM$ jest ciągiem ortogonalnym takim, że $||u_n|| = \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})\}$ dla dowolnego podzbioru ograniczonego $M \subset c_0(I)$ ([AK-20, Corollary 2]).

Ponadto, w pracy [AK-20] udowodniliśmy niearchimedesowy, kwantytatywny odpowiednik twierdzenia Schaudera (Gantmachera), pokazując:

Twierdzenie 37 ([AK-20, Theorem 5 i Corolary 7]) *Jeśli E i F są niearchimedesowymi przestrzeniami Banacha, $T : E \to F$ ciągłym operatorem liniowym, a $T^* : F^* \to E^*$ operatorem sprzężonym do T, to*

$$|\rho| \cdot \omega(TB_E) \leq \omega(T^* B_{F^*}) \leq \frac{1}{|\rho|}\omega(TB_E)$$

i

$$|\rho|^2 \cdot \gamma(TB_E) \leq \gamma(T^* B_{F^*}) \leq \frac{1}{|\rho|^2}\gamma(TB_E).$$

Jeśli, ponadto $|\mathbb{K}| = \{||x|| : x \in E\} = \{||x|| : x \in F\}$, to

$$\omega(TB_E) = \omega(T^* B_{F^*})$$

i

$$\gamma(TB_E) = \gamma(T^* B_{F^*}).$$

W pracy [AK-16], kontynuując zainicjowany w [3] kierunek badań dotyczący kwantytatywnych twierdzeń o zwartości w rzeczywistych przestrzeniach Frécheta, udowodniliśmy kilka kwantytatywnych odpowiedników twierdzenia Krein'a. Między innymi, określając dla ograniczonego podzbioru H przestrzeni Frécheta E miarę

$$k(H) := \sup\left\{d(h, E) : h \in \overline{H}^{\sigma(E'', E')}\right\},$$

gdzie

$$d(x, y) := \sum_n 2^{-n}\|x - y\|_n(1 + \|x - y\|_n)^{-1}$$

i

$$d(x^{**}, y^{**}) := \sum_n 2^{-n}\|x^{**} - y^{**}\|_n(1 + \|x^{**} - y^{**}\|_n)^{-1}$$

określają $F-$normy definiowane odpowiednio na E i $(E^{**}, \beta(E^{**}, E^*))$ dla ciągu seminorm $(||.||_n)_n$, zaś $d(h, E) = \inf\{d(h, x) : x \in E\}$, pokazaliśmy:

Twierdzenie 38 ([AK-16, Theorem 3.5]) *Jeśli H jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni Frécheta E i $n \in \mathbb{N}$, to*

$$k(coH) < (2^{n+1} - 2)k(H) + \frac{1}{2^n},$$

oraz

Wniosek 39 ([AK-16, Corollary 3.6]) *Jeśli H jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni Fré–cheta E, takim, że $k(H) > 0$, to*

$$k(coH) < \sqrt{k(H)}\,(3 - 2\sqrt{k(H)}).$$

Praca [AK-16] jest cytowana w [4].

2.6 Własności przestrzeni lokalnie wypukłych nad ciałem $\mathbb{R}$, będących $\aleph_0-$przestrzeniami w topologii słabej.

Praca [AK-19] koncentruje się na własnościach przestrzeni lokalnie wypukłych, w szczególności przestrzeni Frécheta, dla których topologia słaba ma własność bycia $\aleph_0-$przestrzenią lub przestrzenią kosmiczną (*cosmic*). Pojęcia $\aleph_0-$przestrzeni i przestrzeni kosmicznej zostały wprowadzone przez Michaela w [29], stanowią pewne uogólnienia metryzowalności dla ośrodkowych przestrzeni topologicznych. Zarówno $\aleph_0-$przestrzenie jak i przestrzenie kosmiczne posiadają dość dobre własności dziedziczenia, między innymi dla podprzestrzeni oraz przeliczalnych produktów i przeliczalnych sum prostych.

Przestrzeń topologiczna X nazywana jest $\aleph_0-$*przestrzenią* jeśli jest regularna i posiada przeliczalną $k-$sieć (rodzina $\mathcal{N}$, podzbiorów X nazywaną jest $k-$*siecią* jeśli dla dowolnych podzbiorów X, zwartego K i otwartego U zachodzi $K \subset \bigcup \mathcal{F} \subset U$ dla pewnej skończonej podrodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$).

Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią *kosmiczną* jeśli jest regularna i posiada przeliczalną sieć (rodzina $\mathcal{N}$ podzbiorów X nazywaną jest *siecią* jeśli dla dowolnego $x \in U \subset X$, gdzie U jest podzbiorem otwartym, istnieje $N \in \mathcal{N}$ taki, że $x \in N \subset U$). Oba pojęcia, $\aleph_0-$przestrzeni i przestrzeni kosmicznej są przykładem wykorzystania sieci podzbiorów w badaniu przestrzeni topologicznych, metodą stosowaną również w badaniu własności topologii określanych na przestrzeniach lokalnie wypukłych (patrz np. [12]).

Pierwszym, udowodnionym w pracy [AK-19] ogólnym wynikiem jest:

Twierdzenie 40 ([AK-19, Proposition 1.4]) *Jeśli E jest przestrzenią lokalnie wypukłą, która jest $\aleph_0$-przestrzenią w słabej topologii, to jej silny dual $(E^*, \beta(E^*, E))$ (z topologią jednostajnej zbieżności na ograniczonych podzbiorach E) jest trans-ośrodkowy wtedy i tylko wtedy gdy każdy ograniczony podzbiór E ma własność Frécheta-Urysohna w słabej topologii $w(E, E^*)$.*

Przypomnijmy, że lokalnie wypukła przestrzeń E jest *trans-ośrodkowa* wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego otoczenia zera $U \subset E$ istnieje przeliczalny podzbiór $N \subset E$ taki, że $E = N + U$. Gdy E jest metryzowalna, własność ta jest równoważna ośrodkowości. Przestrzeń topologiczna X ma własność *Frécheta-Urysohna* jeśli dla każdego $A \subseteq X$ i każdego $x \in \overline{A}$, istnieje ciąg $(x_n)_n \subset A$, który jest zbieżny do x.

Następnie, z wykorzystaniem Twierdzenia 40 pokazaliśmy następujące zależności:

Twierdzenie 41 ([AK-19, Theorem 1.5]) *Jeśli E jest przestrzenią Frécheta, a E^* jej silnym dualem, to*

- *jeśli przestrzeń dualna E^* jest ośrodkowa, to E jest $\aleph_0$-przestrzenią w słabej topologii;*
- *jeśli E jest $\aleph_0$-przestrzenią w słabej topologii nie zawierającą kopii l_1 (tzn. podprzestrzeni liniowo homeomorficznej z l_1), to przestrzeń dualna E^* jest trans-ośrodkowa.*

oraz

Twierdzenie 42 ([AK-19, Theorem 1.6]) *Jeśli E jest przestrzenią Frécheta, posiadającą własność gęstości Heinricha (Heinrich density condition, patrz [8]) i nie zawierającą kopii l_1, to E jest $\aleph_0$-przestrzenią w słabej topologii wtedy i tylko wtedy gdy silny dual E^* jest ośrodkowy.*

W szczególności, dla każdej przestrzeni Banacha E nie zawierającą kopii l_1 jej (normowy) dual E^* jest ośrodkowy wtedy i tylko wtedy gdy E jest $\aleph_0$-przestrzenią w słabej topologii.

W kolejnym twierdzeniu pokazaliśmy szereg własności dla konkretnych typów przestrzeni:

Twierdzenie 43 ([AK-19, Theorem 4.5]) *Dla lokalnie wypukłej przestrzeni E zachodzą następujące własności:*

(i) $(E, w(E, E^*))$ *jest kosmiczna wtedy i tylko wtedy gdy* $(E^*, w(E^*, E))$ *jest kosmiczna.*

(ii) Jeśli E jest metryzowalna i $(E^*, \beta(E^*, E))$ *jest ośrodkowa, to E jest* $\aleph_0-$*przestrzenią w topologii słabej.*

(iii) Jeśli E jest metryzowalna i ośrodkowa, to $(E^*, w(E^*, E))$ *jest kosmiczna. Jeśli, ponadto E jest beczkowa, to* $(E^*, w(E^*, E))$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią.*

(iv) Jeśli E jest (DF)*-przestrzenią dla której silny dual jest ośrodkowy, to E jest* $\aleph_0-$*przestrzenią w topologii słabej.*

(v) Jeśli E jest ośrodkową (LF)*-przestrzenią, to* $(E^*, w(E^*, E))$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią. Jeśli, ponadto E jest refleksywna, to* $(E, w(E, E^*))$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią.*

(vi) Jeśli E jest ścisłą (strict) (LF)*-przestrzenią, której silny dual jest ośrodkowy, to E jest* $\aleph_0-$*przestrzenią w topologii słabej.*

Dla przestrzeni topologicznej X, będącej zupełną w sensie Čecha otrzymaliśmy następujące własności przestrzeni funkcji ciągłych $C_c(X, \mathbb{R})$ z topologią zwarto-otwartą:

Fakt 44 ([AK-19, Proposition 4.7]) *Dla przestrzeni topologicznej X, zupełnej w sensie Čecha następujące warunki są równoważne:*

(i) X jest przestrzenią polską (ośrodkową, metryzowalną i zupełną).

(ii) $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią.*

(iii) $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest przestrzenią kosmiczną.*

(iv) $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią w topologii słabej i X jest przestrzenią Lindelöfa.*

(v) $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest ośrodkowa i X jest przestrzenią Lindelöfa.*

(vi) **słaby dual* $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest* $\aleph_0-$*przestrzenią i X jest przestrzenią Lindelöfa.*

(vii) **słaby dual* $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest przestrzenią kosmiczną i X jest przestrzenią Lindelöfa.*

(viii) $C_c(X, \mathbb{R})$ *jest dziedzicznie ośrodkowa.*

Praca [AK-19] jest cytowana w trzech, jeszcze nieopublikowanych artykułach: [18], [19] i [20].

2.7 Prace inżynierskie.

Tematyka czterech prac, opublikowanych w czasopismach inżynierskich, których jestem współautorem dotyczy wybranych, konkretnych zagadnień geotechniki i mechaniki gruntów. Moim wkładem w przygotowanie artykułów było zastosowanie odpowiedniego do opisu zjawiska i znalezienia rozwiązań aparatu matematycznego. W przypadku prac [AKI-21], [AKI-23] i [AKI-24] wiązało się to również z opracowaniem, opartego na modelu matematycznym programu komputerowego.

Praca [AKI-21] przedstawia zastosowanie funkcji sklejanych do budowy modelu 2D i 3D warstw i przekrojów geotechnicznych podłoża gruntowego na podstawie informacji uzyskanych z otworów wiertniczych. W pracy [AKI-22] zajmowaliśmy się problemami oszacowania wpływu różnych czynników geometrycznych i materiałowych na pionowe przemieszczenia pali fundamentowych w wielowarstwowym podłożu gruntowym. Dane doświadczalne opracowano przy zastosowaniu metod statystycznych, wykorzystując parametryczne (GLM - ogólny model liniowy) i nieparametryczne (MARS - Multivariate Adaptive Regression Splines) modele regresji wielorakiej.

Prace [AKI-23] i [AKI-24] dotyczą zagadnień określania i wykorzystania miar i współczynników bezpieczeństwa w analizie stateczności zboczy i nośności fundamentów. W pracy [AKI-23] przedstawiono analizę stateczności fundamentów, wyznaczając prawdopodobieństwo awarii i wartości współczynników bezpieczeństwa dla projektu mostu o konstrukcji wantowej, podwieszanej na dwóch pylonach. Praca [AKI-24] dotyczy sposobów określania współczynników bezpieczeństwa w analizie stateczności zboczy; dla stosowanych w praktyce i nowo zdefiniowanych miar bezpieczeństwa, rozważając je jako zmienne losowe, przeprowadzono ich analizę probabilistyczną.

3 Podsumowanie.

Łącznie, jestem autorem lub współautorem 20 prac matematycznych, 4 z nich zostały opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora, a w przypadku 13 prac jestem jedynym ich autorem. Ponadto, jestem współautorem 4 prac inżynierskich. Spośród wszystkich prac, 15 artykułów jest zamieszczonych w czasopismach cytowanych w Journal Citation Reports. Sumarycznie, IF = 6,7.

Wg mojej wiedzy wyżej wymienione prace były cytowane 25 razy (16 autocytowań, 9 cytowań w pracach innych autorów: [AKH-7] - 2 razy, [AKH-2] - 2 razy, [AKH-4], [AKH-10], [AK-8], [AK-9], [AK-16] - 1 raz). Ponadto, praca [AK-19] jest cytowana w trzech, jeszcze nieopublikowanych artykułach (Baza Web of Science nie pokazuje wszystkich cytowań).

Indeks Hirscha wg Web of Science wynosi 2, wg GoogleSchoolar wynosi 3.

Literatura

[1] Albeverio, S., Khrennikov, A. Yu., Shelkovich, V. M., *Theory of p-adic distributions. Linear and nonlinear models.* Cambridge University Press, 2010.

[2] Angosto, C., Cascales, B., *Measures of weak noncompactness in Banach spaces.* Topology Appl. **156** (2009), 1412–1421.

[3] Angosto C., Kąkol J., Lopez-Pellicer M., *A quantitative approach to weak compactness in Fréchet spaces and spaces $C(X)$.* J. Math. Anal. Appl. **403** (2013), 13-22.

[4] Angosto C., Lopez-Pellicer M., *Compactness and Distances to Spaces of Continuous Functions and Fréchet Spaces.* w Descriptive Topology and Functional Analysis., Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **80** (2014), 75-93.

[5] Arens, R., *Extension of functions on fully normal spaces.* Pacific J. Math. **2** (1952), 11–22.

[6] Bachman, G., Beckenstein, E., Narici, L., *Functional analysis and valuation theory.* Marcel Dekker, New York, 1971.

[7] Bayod, J., *The space $l_1(\mathbb{K})$ is not ultrametrizable.* Lecture Notes in pure and applied mathematics 137, Marcel Dekker, New York (1992), 221-225.

[8] Bierstedt, K. D., Bonet, J., *Density conditions in Fréchet and (DF)-spaces*, Rev. Mat. Complut. **2** (1989), 59–75.

[9] Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R., *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry.* Springer Verlag. Berlin, 1984.

[10] Casazza, P. G., *Approximation properties.* w Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 2001, 271-316

[11] Cascales, B., Marciszewski, W., Raja, M., *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), 2303-2319.

[12] Cascales, B., Orihuela, J., *A biased view of topology as a tool in functional analysis* Accepted: Recent Progress in Topology III (2013), 93–165.

[13] De Grande-De Kimpe, N., Perez-Garcia, C., *Weakly closed subspaces and the Hahn-Banach extension property in p-adic analysis.* Indag. Math. **50** (1988), 253-261.

[14] Dugundji, J., *An extension of Tietze's theorem.* Pacific J. Math. **1** (1951), 353–357.

[15] Ellis, R. L., *Extension of continuous functions on zero-dimensional spaces.* Math. Ann. **186** (1970), 114–122.

[16] Fabian, M., Hájek, P., Montesinos, V., Zizler, V., *A quantitative version of Krein's theorem.* Rev. Mat. Iberoam. **21** (2005), 237-248.

[17] Floret, K., *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Math. **801**, Springer, Berlin, 1980.

[18] Gabriyelyan S. S., Kąkol J., *On topological spaces and topological groups with certain local countable networks.* arXiv:1412.1497

[19] Gabriyelyan S. S., Kąkol J., Kubiś W., Marciszewski W., *Networks for the weak topology of Banach and Fréchet spaces.* arXiv:1412.1748

[20] Gabriyelyan S. S., Kąkol J., Zdomskyy L., *On topological properties of the weak topology of a Banach space.* arXiv:1502.00178

[21] Granero, A. S., Hájek, P., Montesinos, V., *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces.* Math. Ann. **328** (2004), 625-631.

[22] Kąkol, J., *Remarks on spherical completeness of non-archimedean valued fields.* Indag. Mathem., N.S. **5** (1994), 321-323.

[23] Kalton, N.J., Peck, N.T., *Quotients of* $L_p(0,1)$ *for* $0 \leq p < 1$. Studia Math. **64** (1979), 65-75.

[24] Kalton, N.J., Peck, N.T., Roberts, J.W., *An F-space sampler.* Cambridge University Press, 1984.

[25] Khrennikov, A.Yu., *$p-$adic valued distributions in mathematical physics.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1994

[26] Martinez-Maurica, J., Perez-Garcia, C., *Non-Archimedean $K-$spaces.* Houston J. Math. **14** (1988), 529-534.

[27] Martinez-Maurica, J., Perez-Garcia, C., *The three-space problem for a class of normed spaces.* Bull. Soc. Math. Belg. **39**, Ser. B (1987), 209-214 .

[28] Michael, E., *Some extension theorem for continuous functions.* Pacific J. Math. **3** (1953), 789–806.

[29] Michael, E., $\aleph_0$*-spaces*, J. Math. Mech. **15** (1966), 983–1002.

[30] Monna, A. F., *Analyse Non-Archimedienne.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[31] Moslehian, M. S., Sadeghi, G. *A Mazur-Ulam theorem in non-Archimedean normed spaces.* Nonlinear Anal. **69** (2008), 3405-3408.

[32] Narici, L., Beckenstein, E., *A non-Archimedean inner product.* Contemp. Math. **384** (2005), 187-202.

[33] Ochsenius H., Schikhof, W.H., *Norm Hilbert spaces over Krull valued fields.* Indag. Mathem., N.S. **17** (2006), 65-84.

[34] Park, C., Alaca, C., *An introduction to 2-fuzzy n-normed linear spaces and a new perspective to the Mazur-Ulam problem.* Journal of Inequalities and Appl. (2012), 1-17.

[35] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *Orthocomplementation in $p-$adic Banach spaces.* Katholieke Universiteit Nijmegen, Report 9312 (1993).

[36] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *Orthocomplemented subspaces in* l^∞. Katholieke Universiteit Nijmegen, Report 9313 (1993).

[37] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *Finite-dimensional subspaces of the $p-$adic space l^∞*. Canad. Math. Bull. **38** (1995), 360-365.

[38] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *Finite-dimensional orthocomplemented subspaces in $p-$adic normed spaces.* Contemp. Math. 319, (2003), 281-298.

[39] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields.* Cambridge Univ. Press (2010).

[40] Perez-Garcia, C., *The Grothendieck approximation theory in non-Archimedean Functional Analysis.* Contemp. Math., **596** (2013), 243-268.

[41] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H., *The metric approximation property in non-Archimedean normed spaces.* Glas. Mat. Ser. III, **49** (2014), 407-419.

[42] Prolla, J.B., *Topics in Functional Analysis over valued division rings.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1982.

[43] Robert, A., *A Course in p-adic Analysis.* Springer Verlag, New York, 2000.

[44] van Rooij, A. C. M., *Notes on p-adic Banach spaces.* Katholieke Universiteit Nijmegen, Report 7633 (1976).

[45] van Rooij, A.C.M., Schikhof, W.H., *Open Problems.* Lecture Notes in pure and applied mathematics 137, Marcel Dekker, New York (1992), 209-219.

[46] van Rooij, A.C.M., *Non-Archimedean Functional Analysis.* Marcel Dekker, New York, 1978.

[47] Schikhof, W. H., *Isometrical embeddings of ultrametric spaces into non-Archimedean valued fields.* Indag. Math. **46** (1984), 51-53.

[48] Schikhof, W. H., *Ultrametric Calculus.* Cambridge University Press, 1984.

[49] Schneider, P., *Nonarchimedean functional analysis.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, 2002.

[50] Śliwa, W., *Examples of non-Archimedean nuclear Fréchet spaces without a Schauder basis.* Indag. Math. (N.S.), **11** (2000), 607-616.

[51] Vladimirov, V.S., Volovich, I.V., Zelenov, E.I., *$p-$adic analysis and mathematical physics.* World Scientific Publ., Singapore, 1993.

[52] Wang, Danping., Liu, Yubo., Song, Meimei., *The Aleksandrov problem on non-Archimedean normed space.* Arab J. Math. Sci. **18** (2012), 135-140.

[53] Xu, Tian Zhou, Xu, *On the Mazur-Ulam theorem in non-Archimedean fuzzy n-normed spaces.* ISRN Math. Anal. (2013), 1-7.