Prof. dr hab. Mariusz WOŹNIAK
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
Katedra Matematyki Dyskretnej

Kraków, dnia 12 maja 2014 r.

Ocena rozprawy doktorskiej
pani mgr Katarzyny Mieczkowskiej
pt: *Matchings in hypergraphs*

Głównym przedmiotem pracy są problemy dotyczące skojarzeń w hipergrafach, a dokładniej problemy związane z hipotezą Erdősa o największej możliwej liczbie krawędzi jaką może mieć hipergraf rzędu n, jeśli wiadomo, że najliczniejsze skojarzenie ma s elementów. Zarówno ww. hipoteza jak i sama praca dotyczą hipergrafów k-jednolitych. W przypadku grafów (tj. dla $k = 2$) odpowiednie twierdzenie zostało udowodnione przez Erdősa i Gallaia w 1959 roku. Sama hipoteza pochodzi z 1965 r. i mimo licznych prób ciągle pozostaje otwarta.

W rozdziale pierwszym Autorka omawia krótko cel i zawartość pracy.

Rozdział drugi zawiera podstawowe definicje. Szczególnie dokładnie Autorka omawia operację *kompresji*. Po wielokrotnym jej zastosowaniu otrzymujemy graf *skompresowany*. Okazuje się, że w wielu przypadkach zagadnienia ekstremalne dotyczące skojarzeń w hipergrafach wystarczy rozważać dla grafów skompresowanych. Metoda ta była już zastosowana przez Erdősa, Ko i Rado w latach 60-tych.

W rozdziale trzecim, Autorka formułuje hipotezę Erdősa. Mówi ona nie tylko o maksymalnym rozmiarze k-jednolitego hipergrafu rzędu n, którego najliczniejsze skojarzenie ma s elementów, ale także o tym jaka jest postać hipergrafów ekstremalnych. Potwierdzenie tej hipotezy dla $k = 3$ oraz dostatecznie dużych n jest głównym wynikiem pracy. Rozdział ten zawiera też sformułowanie tzw. „ułamkowej" wersji hipotezy Erdősa.

Rozdział czwarty, pod skromnym tytułem *Preliminary results*, wydaje się jednak zawierać dwa kluczowe elementy dowodu hipotezy Erdősa dla $k = 3$ oraz dostatecznie dużych n. Chodzi wpierw o serię twierdzeń (zakończonych twierdzeniem 4.6) pokazujących, że dowód wystarczy przeprowadzić dla grafów skompresowanych. Następnie, o twierdzenie 4.11, które pozwala na przejście od grafów ekstremalnych do grafów do nich „zbliżonych". O ile użycie grafów skompresowanych jest techniką od dawna znaną, to zastosowanie opisanego wyżej przejścia, w tym kontekście, wydaje się pomysłem nowym i kluczowym.

Rozdział piąty zawiera przede wszystkim dowód głównego twierdzenia.

Powyższy opis zawartości pracy uwypuklał te elementy. które dotyczyły bezpośrednio głównego wyniku, za jaki uważam potwierdzenie hipotezy Erdősa dla $k = 3$ oraz dostatecznie dużych n. Praca zawiera jednak także kilka innych wartościowych wyników. Wymieńmy: potwierdzenie ww. hipotezy dla $n > \frac{2k^2 s}{\log k}$ (rozdział 5.1), nowy dowód w przypadku grafów, oparty na twierdzeniu Tutte'a (rozdział 6.1), a także związki hipotezy Erdősa z hipotezą Samuelsa (rozdział 6.2).

Praca jest bardzo dobrze napisana, jakkolwiek miejscami nieco zbyt lakonicznie, w stylu artykułów naukowych, na których zresztą się opiera. W przypadku pracy doktorskiej oczekiwałbym nieco więcej wyjaśnień. Parę rysunków (szczególnie w rozdziale czwartym) z pewnością ułatwiłoby lekturę.

Z innych zauważonych drobnych błędów i usterek (także $\TeX$-nicznych) wymieńmy przykładowo:

Strona 7, wiersz 16 od dołu: nie uważam oznaczenie $|G|$ na rozmiar grafu za dobry pomysł, tym bardziej, że w bardzo popularnej książce R. Diestela $|G|$ oznacza rząd grafu. Rozmiar jest oznaczany tam przez $||G||$.

Strona 8, wiersz 16 od dołu: książka dwóch autorów (E.D.Neringa i A.W.Tuckera) nie powinna być cytowana jako „Nering *et al.*".

Strona 9, wiersz 12 od dołu: definicja $\mathrm{Sh}(G)$ budzi pewne wątpliwości z formalnego punktu widzenia. Możnaby ich uniknąć wskazując np. porządek kolejnych kompresji. Wtedy $\mathrm{Sh}(G)$ byłoby dobrze zdefiniowanym grafem.

Strona 12: rodziny grafów ekstremalnych powinny by raczej oznaczane przez $\mathrm{Cov}_k(n, s)$ i $\mathrm{Cl}_k(n, s)$ (a nie przez $Cov_k(n, s)$ i $Cl_k(n, s)$).

Strona 12, wiersz 1 od dołu: zamiast równości powinno być zawieranie, gdyż, z reguły jedynie jedna ze wskazanych rodzin tworzy graf ekstremalny. Ta sama uwaga odnosi się też do równości na stronie 40, wiersz 14 od dołu.

Strona 20, wiersz 14 od góry: zamiast „$\mathrm{sh}_{i,j}$ powinno być „$\mathrm{sh}_{i,j}(G)$".

Strona 39: Autorka pisze w pierwszym akapicie (odnośnie twierdzenia Erdősa-Gallaia), że „...some other proofs, much shorter and more elegant, have been presented". Nie podaje jednak żadnego odnośnika do literatury. Podobnie, twierdzenie 6.2 jest przytoczone bez podania źródła. Wprawdzie chodzi tu o znane twierdzenie Tutte'a, ale z reguły podawane jest ono w innej postaci.

Chciałbym podkreślić, że ww. drobne usterki nie umniejszają mojego przekonania, że mamy do czynienia z pracą wybitną. Praca świadczy bardzo dobrze o wyrobieniu matematycznym Autorki, jej pomysłowości i znajomości zagadnień związanych z tematyką rozprawy. Zauważmy, że spora część literatury nie jest jeszcze opublikowana w czasopismach. Dowód twierdzenia 5.3 budzi najwyższe uznanie.

Reasumując, uważam, że praca w pełni zasługuje na przyjęcie jej jako rozprawy doktorskiej pani Katarzyny Mieczkowskiej. Stawiam zatem wniosek zarówno o dopuszczenie pani mgr Katarzyny Mieczkowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego, jak i o wyróżnienie pracy.

Mariusz Woźniak