Streszczenie

Rozprawa "O pewnych półgrupach zbiorów zwartych wypukłych oraz o minimalnych reprezentacjach elementów ich przestrzeni ilorazowych" bada półgrupy wielościanów o ustalonych kierunkach ścian.

Rozdział 1, który dotyczy podstawowych pojęć używanych w dalszych rozdziałach składa się z dwóch paragrafów. Pierwszy paragraf ma na celu ustalenie oznaczeń w przypadku, gdy te będą różniły się od formalnych oznaczeń stosowanych w literaturze. Paragraf 1.2 wprowadza podstawowe, powszechnie znane definicje w związku z niejednoznacznością niektórych z nich.

W Rozdziale 2 wprowadzamy definicje i twierdzenia analizy wypukłej odnoszące się do rodziny zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych. Rozdział ten składa się z czterech paragrafów. Celem Paragrafu 2.1 jest wprowadzenie w rodzinie zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych struktury półgrupy i abstrakcyjnego stożka wypukłego. Pokazujemy również, że w tej półgrupie spełnione jest porządkowe prawo skreśleń. W Paragrafie 2.2 wprowadzamy relację równoważności w iloczynie kartezjańskim powyższych półgrup. Konstruujemy przestrzeń Minkowskiego–Rådströma-Hörmandera będącą przestrzenią ilorazową względem tej relacji. Pokazujemy, że przestrzeń ta jest przestrzenią wektorową i określamy na niej częściowy porządek. Rozważamy również elementy tej przestrzeni nazywane ciałami wirtualnymi. Te klasy abstrakcji znajdują zastosowanie w rachunku quasiróżniczkowym. Quasiróżniczka funkcji jest bowiem elementem przestrzeni MRH. Istotnym zagadnieniem rachunku quasiróżniczkowego jest znalezienie minimalnej reprezentacji quasiróżniczki, co równoważne jest wskazaniu elementu minimalnego względem częściowego porządku wewnątrz ciała wirtualnego zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. W Paragrafie 2.3 formułujemy metody redukcji par zbiorów. Następnie ilustrujemy te metody na przykładzie w dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Celem Paragrafu 2.4 jest omówienie znanych kryteriów minimalności par zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. Formułujemy twierdzenia, które dla jednowymiarowej i dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej w pełni charakteryzują pary minimalne. Ze względu na fakt, że kryteria te nie mogą być zastosowane w wyższych wymiarach Paragraf 2.4 kończymy otwartymi pytaniami dotyczącymi minimalności, które stały się główną motywacją tej rozprawy.

Rozdział 3 ma na celu wprowadzenie do teorii wielościanów o ustalonych kierunkach ścian, czyli G-wielościanów oraz powtórzenie wyników z Rozdziału 2 dla rodziny G-wielościanów. Rozdział ten składa się z sześciu paragrafów. W Paragrafie 3.1 uzasadniamy motywacje stojące za badaniem tej rodziny. W Paragrafie 3.2 definiujemy podstawowe pojęcia związane z teorią G-wielościanów. Wskazujemy również powód, dla którego rodzina ta nie posiada, na ogół, struktury półgrupy z naturalnym działaniem sumy Minkowskiego. Paragraf 3.3 ma na celu omówienie reprezentacji wie-

lokątów i wprowadzenie analogicznych reprezentacji dla G-wielokątów. Reprezentacje te znajdują szerokie zastosowanie w dalszej części tego rozdziału ze względu na sformułowane wzory służące do przekształcenia jednej reprezentacji w inną. W Paragrafie 3.4 definiujemy zmodyfikowaną sumę Minkowskiego pozwalającą wprowadzić strukturę półgrupy w rodzinie G-wielościanów. Również w tym paragrafie wprowadzamy tę strukturę. W Paragrafie 3.5 definiujemy relację równoważności, względem której przeprowadzamy analogiczny schemat konstrukcji jak w przypadku przestrzeni MRH. Możemy po wprowadzeniu częściowego porządku wewnątrz klas abstrakcji rozważać metody redukcji i kryteria minimalności podobnie jak w Rozdziale 2. Poświęcony temu zagadnieniu w przypadku dwuwymiarowym jest Paragraf 3.6.

W Rozdziale 4 rozstrzygamy kwestię założeń, jakie muszą zostać spełnione, aby rodzina G-wielościanów z sumą Minkowskiego była półgrupą. Rozdział ten składa się z czterech paragrafów. Paragraf 4.1 dotyczy omówienia zagadnienia i sprowadzenia go do problemu związanego z tzw. szkieletami. W Paragrafie 4.2 rozstrzygamy geometryczny problem wskazania zbiorów o wewnętrznie przecinającym się szkielecie na płaszczyźnie. Nie jest to bezpośrednio związane z rodzinami G-wielościanów, jednak wypracowane w tym paragrafie twierdzenia znajdują zastosowanie w kolejnym paragrafie. Paragraf 4.3 posiada strukturę analogiczną do poprzedniego paragrafu. Definiujemy problem i związane z jego rozwiązaniem pojęcia, a następnie dowodzimy twierdzenia o strukturach zbiorów o wewnętrznie przecinającym się sferycznym szkielecie. To twierdzenie ma już bezpośrednie przełożenie na problem wewnętrzności działania sumy Minkowskiego w rodzinie G-wielościanów. W Paragrafie 4.4 wskazujemy na konkretne rodziny G-wielościanów, dla których nie ma konieczności modyfikacji sumy Minkowskiego.

Rozdział 5 dotyczy badania par G-wielościanów pod kątem ich G-minimalności i posiada trzy paragrafy. Pojęcie to jest istotnie różne od minimalności, gdyż para G-wielościanów, jako para zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych, może posiadać parę minimalną, która nie jest parą G-wielościanów. W Paragrafie 5.1 stawiamy pytania analogiczne do pytań znajdujących się na końcu Rozdziału 2. Również w tym paragrafie wykorzystujemy metody programowania liniowego do zdefiniowania metod redukcji i kryterium G-minimalności, co jest odpowiedzią na dwa, wcześniej sformułowane, pytania. Paragraf 5.2 zawiera podsumowanie, w formie algorytmu, rozważań zawartych w poprzednim paragrafie. Algorytm ten jest odpowiedzią na ostatnie z postawionych pytań. W Paragrafie 5.3 przedstawiamy działanie algorytmu wskazującego zbiór wszystkich par G-minimalnych na wybranej parze G-wielościanów.

W Rozdziale 6 wskazujemy możliwe zastosowania wypracowanych wcześniej wyników. Na ten rozdział składają się dwa paragrafy. W Paragrafie 6.1 formułujemy twierdzenia pozwalające wykorzystać G-minimalność do określenia minimalności pary wielościanów. Paragraf 6.2 dotyczy innych zastosowań teorii G-wielościanów i wskazuje dalsze możliwe kierunki badań.

Tomasz Stroiński