dr hab. Piotr Wojtylak, prof UO
Instytut Matematyki i Informatyki UO

Opole, 5 czerwca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Lidii Typańskiej
Krata rozszerzeń logiki relewantnej E

W ostatnich dwudziestu latach napisano kilkanaście monografii poświęconych logikom relewantnym, setki prac. Tematyka rozprawy dotyczy zagadnień współcześnie badanych, modnych, którymi zajmują się najwybitniejsi logicy na całym świecie. Stwierdzenie, iż **E**, jeden z bazowych systemów relewantnych, posiada nieskończenie wiele premaksymalnych rozszerzeń jest rezultatem oryginalnym, wartościowym i może nawet nieoczekiwanym, gdyż pokrewny system **R** ma tych rozszerzeń skończenie wiele (K.Świrydowicz). Zarówno sama tematyka rozprawy, jak i osiągnięte rezultaty, nie mogą zatem wzbudzać najmniejszych zastrzeżeń; gorzej z jej stroną formalną.

Uwagi szczegółowe.

1. Wstęp historyczny, umieszczony na początku rozprawy, byłby może właściwy pół wieku temu. Przedstawianie współczesnej logiki relewantnej jako dociekań nad wyborem właściwej aksjomatyki dla trzech jej systemów: **E, R** i **RM** jest już dalece niewłaściwe. Niektóre nowsze wyniki badań są wspomniane w rozprawie, choćby na stronie 10, ale nie zawsze wiarygodnie (czy nawet koherentnie!).

2. Podoba mi się dowód twierdzenia 6 (str 16), o pełności logiki **E**, mimo pewnej niekompletności. **E**-algebry definiowane są na dwa różne sposoby: Definicja 1 (str.15-16) i Definicja 8 (str. 18). Zasadniczo druga z definicji powinna być twierdzeniem tyle, że równoważność obu pojęć nie została w pełni przeprowadzona. Zgadzam się na pełność logiki **E** względem rozmaitości algebr Definicji 1, także na pełność względem quasi-rozmaitości definiowanej (nie)równościami Definicji 1 (czy Definicji 8) uzupełnionymi równoważnością

$$(\star) \qquad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \exists_{x_1} \ldots \exists x_k \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} (x_i \to x_i) \leq (x \to y) \Big)$$

Zgadzam się, że algebra Lindenbauma Lind_E należy do obu rozmaitości **E**-algebr, w sensie Definicji 1 i Definicji 8, i będzie algebrą wolną quasi-rozmaitości. Brakuje mi dowodu, że równości wyznaczone przez logikę **E** będą prawdziwe w obu tych rozmaitościach, a zatem nie wiem czemu Lind_E miała by być ich algebrą wolną. Sądzę jednak, że najistotniejszy dla **E**-algebr jest, ustalony przez Doktorantkę, fakt że quasi-rozmaitość

E-algebr (wyznaczona przez warunek ($\star$)) nie jest rozmaitością; a więc **E**-algebry nie mają takiej ładnej teorii, jak **R**-algebry.

3. Lemat 22 (na str.21) to duże wyzwanie dla recenzenta. Inaczej sformułowany niż dowodzony, brak kwantyfikatorów utrudnia jego zrozumienie, ale najgorsze, że nie wiadomo po co on jest. Wniosek 23 na następnej stronie jest i tak prostą konsekwencją Lematu 20(3) i, na dodatek, teza wniosku zachodzi bez żadnych założeń odnośnie algebry A. (Tak na marginesie, Lemat 22 jest znakomitą ilustracją braku relewancji w matematyce). Lemat 22 miał może przybliżać znaczenie warunku ($\star$), który jest ważny dla **E**-algebr, jednak zachodzenie ($\star\star$) w pewnych **E**-algebrach mało co wyjaśnia. Dodatkowo mam problem z dowodem implikacji $\Rightarrow$ warunku ($\star$), czyli właściwie z dowodem wniosku 14 (ze strony 19). Wydaje mi się, że użycie prawa monotoniczności $x \leq y \Rightarrow x \to x \leq x \to y$ jest ukrytą formą użycia ($\star$), a więc mamy klasyczny przykład błędnego koła w rozumowaniu.

4. Doceniam przykłady i kontrprzykłady ze strony 22-24, gotów jestem nawet uznać je za najważniejsze w całej rozprawie.

5. O ile mi wiadomo, logika klasyczna jest jedynym maksymalnym niesprzecznym rozszerzeniem logiki **R**. Nie wiem czy podobną własność ma **E** i uważam, że kwestia ta powinna być rozstrzygnięta przed jakąkolwiek próbą opisu pre-maksymalnych rozszerzeń **E**. Lematy 24 i 25 na stronie 26 sugerują, że logika klasyczna jest jedynym maksymalnym niesprzecznym rozszerzeniem **E**. Ale to pewno tylko niezręczność redakcyjna, gdyż **E**-algebry nie muszą posiadać elementu największego, czy najmniejszego, wbrew temu co tam jest napisane.

6. Bardzo chciałbym wiedzieć na jakiej podstawie wszystkie algebry A_n rozdziału trzeciego są **E**-algebrami; Twierdzenie 26 strona 35. Nie to abym w to wątpił, ale może jest jakieś nieznane mi twierdzenie charakteryzujące kraty dystrybutywne, które mogą być rozszerzone do **E**-modeli. Sformułowanie i udowodnienie takiego twierdzenia przebiłoby wszystkie wyniki zamieszczone w rozprawie. Zastanawia mnie skąd wynika pewność Doktorantki, że przykładowo, uzupełniając właściwie tabelkę na stronie 29, musi uzyskać **E**-algebrę. To, że w puste kratki nie można wpisać pewnych wartości nie oznacza automatycznie, że inne wartości zagwarantują nam spełnienie wszystkich **E**-równości.

7. Przypuśćmy, że to widać, że algebry A_n są proste i nie mają właściwej podalgebry poza **2**. Czemu jednak logiki tych algebr są premaksymalne? Gdyby tu chcieć użyć twierdzenia Jonssona, to trzeba by wcześniej wykazać, że pewne rozmaitości **E**-algebr są kongruentnie dystrybutywne. Nie znajduję w rozprawie prób wykazania tego faktu. Co gorsza przykłady ze strony 22-24 dowodzą, że na ogół brak jest izomorfizmu kraty kongruencji algebry z kratą jej filtrów; co chyba bardzo utrudni dowód dystrybutywności kraty kongruencji **E**-algebr. Możliwe, że pre-maksymalność logik wynika z innych twierdzeń algebry, albo ad hoc argumentacji, tylko nic o tym Doktorantka nie pisze.

8. Przypadek algebr nieskończonych, rozdział czwarty, jest jeszcze trudniejszy. Nawet zakładając, że spełnione są założenia Twierdzenia Jonssona, stwierdzenie, że jedyną ultrapotęgą (nieskończonej) algebry A_i będzie ona sama (ostatnie zdanie rozdziału 4) jest czystą nieprawdą. Przyznaję, że algebry są pomysłowo konstruowane, ale (tak jak w przypadku skończonym) wolałbym mieć pewność, iż będą one **E**-algebrami.

9. Znajduję w rozprawie tak wiele błędów typograficznych i literowych, że nie podejmuję się ich wykazania. Wspomnę jedynie, że błędnie podane są już strony w spisie treści na stronie 3.

Konkluzja recenzji.

Wszystkie dostrzeżone mankamenty i podniesione zastrzeżenia nie mają wpływu na moją pozytywną ocenę rozprawy. Uważam, że Doktorantka znacząco uzupełnia listę znanych, negatywnych cech logiki **E** (takich jak niealgebraizowalność) nowymi faktami; (1) quasi-rozmaitość naturalnych **E** modeli nie będzie rozmaitością; (2) logika **E** posiada nieskończenie wiele maksymalnych, czy pre-maksymalnych rozszerzeń; (3) znika jednoznaczna odpowiedniość między kongruecjami i filtrami **E** algebr. Przed rozpoczęciem badań można było mieć nadzieję, że **E**, podobnie jak **R**, wykaże się szeregiem ładnych formalnych własności. Dość zaskakującym wnioskiem z badań jest stwierdzenie, że logika relewantna **E**, w przeciwieństwie do **R**, będzie mało odpowiednim obiektem do głębszych rozważań formalnych.

Stwierdzam, że recenzowana rozprawa omawia istotne kwestie poruszane we współczesnej literaturze naukowej i zawiera oryginalne rezultaty. Spełnia ona wszelkie wymogi stawiane przed rozprawami doktorskiego. W szczególności stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną Doktorantki i jej umiejętność samodzielnej pracy naukowej. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgr. Lidii Typańskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego, a w szczególności o dopuszczenie do publicznej obrony rozprawy.