AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Katarzyna Agnieszka Filipiak
2. Specjalność naukowa: statystyka matematyczna
3. Dyplomy i stopnie naukowe:
   2000 – magister inżynier
   Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania
   Politechnika Poznańska
   kierunek: Matematyka
   Tytuł pracy magisterskiej:
   Rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu za pomocą szeregów potęgowych
   Promotor: dr Marian Liskowski.

   2004 – doktor nauk matematycznych
   Wydział Matematyki i Informatyki
   Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
   Tytuł rozprawy:
   Optymalne układy doświadczalne w modelach współoddziaływania
   Promotor: prof. Augustyn Markiewicz.
4. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu:
   Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
   Akademia Rolnicza w Poznaniu / Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu
   2000 – 2004 – doktorant
   2001 – 2005 – asystent
   2005 – obecnie – adiunkt
5. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595, z późn. zm.):
   Jednotematyczny cykl 6 prac pt.
   Optymalność kołowych układów eksperymentalnych w modelach współoddziaływania

6. Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników

6.1. Wprowadzenie

Intensywne badania optymalności układów doświadczalnych zostały zapoczątkowane około lat 60-tych. Pierwsze prace skupiały się nad szczególnymi kryteriami optymalności, aby przerodzić się w dobrze rozwiniętą teorię zajmującą szczególne miejsce w teorii eksperymentu.

Optymalne zaplanowanie doświadczenia pozwala zminimalizować (w pewnym sensie) macierz wariancji-kowariancji najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora nieznanych efektów obiektowych, a co za tym idzie, pozwala zwiększyć efektywność eksperymentu jak również zmniejszyć koszty jego przeprowadzenia.

Warto zauważyć, że charakterystyka układów optymalnych zależy od przyjętego modelu statystycznego doświadczenia. Pukelsheim (1993) zebrał istniejące w literaturze wyniki dotyczące modeli liniowych, ujednolicił terminologię oraz pokazał, że problemy charakteryzowania układów optymalnych rozwiązywane są m.in. z użyciem zaawansowanych narzędzi algebry liniowej oraz analizy wypukłej.

Układy eksperymentalne i ich analiza mają niezwykle istotne znaczenie statystyczne i cieszą się nadal dużym zainteresowaniem, co ma swoje odzwierciedlenie w licznych konferencjach (m.in. cykl konferencji *MODA - Model Oriented Data Analysis* czy *DAE - Design and Analysis of Experiments*) i programach badawczych poświęconych tej tematyce (np. Design and Analysis of Experiments, organizowany w Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, Wielka Brytania, do udziału w którym zostałam zaproszona).

Jednymi z najpowszechniejszych eksperymentów są doświadczenia założone w układach blokowych, dla których model statystyczny uwzględnia, obok efektów obiektowych, również efekty blokowe. Układy blokowe charakteryzują się tym, że obiekty doświadczalne rozmieszczone są na niejednorodnych jednostkach eksperymentalnych, pogrupowanych w jednorodne bloki. Liczba obiektów, bloków i jednostek eksperymentalnych nazywane są parametrami układu. Zagadnieniu wyznaczania optymalnych układów blokowych poświęcona jest bardzo bogata literatura, a kryterium uniwersalnej optymalności sformułowane przez Kiefera (1975) m.in. dla układów blokowych z powodzeniem może być stosowane również dla modeli bardziej złożonych. W modelach takich uwzględnia się dodatkowe efekty zakłócające, jak np. efekty rezydualne w modelach doświadczeń z powtarzanymi pomiarami czy efekty sąsiedztwa w modelach współoddziaływania (będących przedmiotem moich badań). Modele te są stosowane do statystycznego opisu eksperymentów, w których obserwację z zadanej jednostki doświadczalnej mogą zakłócać obiekty rozmieszczone na sąsiadujących jednostkach, przy czym może to być sąsiedztwo w czasie lub przestrzeni (na przykład w doświadczeniach rolniczych, ogrodniczych, leśnych, medycznych, w serologii). W przeciwieństwie do doświadczeń, w których jedynymi efektami zakłócającymi są efekty blokowe, stosowanie metod numerycznych do wyznaczenia układów optymalnych jest efektywne tylko dla bardzo małej liczby obiektów. Dlatego scharakteryzowanie i konstrukcja układów optymalnych w modelach współoddziaływania i modelach doświadczeń z powtarzanymi pomiarami są niezwykle istotne.

W obu przypadkach w literaturze dostępne są wyniki dotyczące optymalności układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo, przy czym optymalność układów z powtarzanymi pomiarami z efektami rezydualnymi pierwszego rzędu zebrana została w monografii Shah i Sinha (1989). Przedmiotem zainteresowania badaczy są głównie układy uniwersalnie optymalne, tzn. optymalne ze względu na wszystkie kryteria z szerokiej klasy kryteriów optymalności. Oznacza to, że układy uniwersalnie optymalne są m.in. A-, D- i E-optymalne (porównaj np. Pukelsheim, 2006). Wiele znanych układów uniwersalnie optymalnych zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo spełniać musi dość restrykcyjny warunek ortogonalności efektów sąsiedztwa (zobacz np. Kunert, 1983), co powoduje, że mogą one istnieć tylko dla bardzo szczególnych kombinacji parametrów układu. Układy takie nazywane są układami silnie zrównoważonymi ze względu na sąsiedztwo. W przypadkach, gdy w układzie eksperymentalnym obiekty nie są swoimi własnymi sąsiadami, warunek ten nie może być spełniony. Przykłady takich układów podał m.in. Hedayat i Afsarinejad (1978) dla układów niekołowych (ang. „without preperiod"), a Cheng i Wu (1980, 1983) oraz Kunert (1984b) pokazali ich uniwersalną optymalność w pewnych klasach układów eksperymentalnych. Stufken (1991) skonstruował pewne układy uniwersalnie optymalne w oparciu o tablice ortogonalne I-go typu, natomiast Jones i in. (1992) udowodnili uniwersalną optymalność pewnych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w modelu doświadczeń z powtarzanymi pomiarami, w którym efekty rezydualne są losowe. Kunert (1983) wykazał uniwersalną optymalność pewnych uogólnionych kwadratów łacińskich oraz uogólnionych układów Youdena w pewnych szczególnych klasach układów niekołowych oraz kołowych przy założeniu modelu doświadczeń z powtarzanymi pomiarami. Magda (1980) i Kunert (1984a) pokazali uniwersalną optymalność pewnych kołowych układów zrównoważonych i silnie zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w szczególnych klasach układów eksperymentalnych. Katalog kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo dla pewnych szczególnych parametrów układu podany zostały w pracy Azaïs i in. (1993). Warto zauważyć, że w większości rozważanych w literaturze eksperymentów zakładano, że liczba obiektów jest taka sama jak liczba powtórzeń (jednostek eksperymentalnych w blokach).

Uniwersalna optymalność kołowych układów eksperymentalnych w modelach współoddziaływania z efektami sąsiedztwa jest przedmiotem badań począwszy od końca lat 90-tych ubiegłego wieku. Druilhet (1999) wykazał uniwersalną optymalność kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w modelu z jedno- lub dwustronnymi efektami sąsiedztwa. Filipiak i Markiewicz (2003) uogólnili te wyniki na model, w którym efekty sąsiedztwa są losowe. Metoda wyznaczania układów uniwersalnie optymalnych zaproponowana przez Kushnera (1997), a następnie zmodyfikowana przez Kunerta i Martina (2000) do scharakteryzowania niekołowych układów uniwersalnie optymalnych w modelu współoddziaływania, byłą inspiracją do uogólnienia wyników uzyskanych w pracy Filipiak i Markiewicza (2003) na szerszą klasę układów eksperymentalnych, zaprezentowanych w pracy Filipiak i Markiewicza (2007). Metoda ta została również wykorzystana do wykazania uniwersalnej optymalności kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w modelu współoddziaływania z jednostronnymi efektami sąsiedztwa, w którym obserwacje są skorelowane zależnością kołowego procesu autoregresji I-go rzędu (Filipiak i Markiewicz, 2005), a także w modelu współoddziaływania, w którym efekty lewego i prawego sąsiedztwa są takie same (Filipiak, 2012). Bailey i Kunert (2006) zastosowali wspomnianą metodę do uogólnienia uzyskanych numerycznie przez Kemptona i in. (2001) układów uniwersalnie optymalnych w modelu, w którym efekty sąsiedztwa (jednostronne) są proporcjonalne do efektów obiektowych.

Wyniki zaprezentowane w wymienionych pracach dotyczą sytuacji, w których interesującymi badacza parametrami mogą być efekty obiektowe lub efekty sąsiedztwa (oddzielnie). Przedmiotem zainteresowania badacza mogą być również tzw. efekty całkowite (ang. „total effects"), tzn. sumy efektów obiektowych i odpowiadających im efektów będących wynikiem współoddziaływania obiektów. W takich przypadkach optymalność układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo pokazana została m.in. w pracach Bailey i Druilhet (2004), Ai i in. (2007), Ai i in. (2009), a konstrukcja wybranych układów podana została przez Bailey (2003).

Zanim zainteresowano się własnościami optymalności układów eksperymentalnych, za niezwykle ważne uważano zagadnienie konstrukcji układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w przypadku, gdy efekty lewego i prawego sąsiedztwa są takie same. Problem konstrukcji takich układów został zainicjowany przez Reesa (1967). Rozważał on eksperymenty serologiczne, w których obiekty rozmieszczone były na kołowych płytkach w taki sposób, że każdy obiekt miał lewego i prawego sąsiada, jednakże efekty blokowe nie były tu istotne. Układy Reesa (1967) były i nadal są szeroko analizowane w literaturze i uogólniane m.in. w pracach Lawless (1971), Hwang (1973), Rosa i Huang (1975), Das i Saha (1976), Hwang i Lin (1977), Bermond i in. (1978), Misra i in. (1991), Azaïs i in. (1993), Chaure i Misra (1996), Jacroux (1998), Mishra (2007), Ahmed i Akhtar (2008, 2009, 2011), Akhtar i Ahmed (2009), Ahmed i in. (2009), Hamad (2010), Akhtar i in. (2010), ZafarYab i in. (2010), Shehzad i in. (2011a, 2011b), Iqbal i in. (2009) czy Iqbal i in. (2012). O ile jednak istnieją w literaturze metody konstrukcji różnego rodzaju układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo, o tyle niewiele jest prac opisujących ich własności statystyczne, jak np. optymalność. Dlatego we wspólnej pracy z Markiewiczem (praca wysłana do redakcji w tym roku) zebraliśmy i uzupełniliśmy wyniki dotyczące uniwersalnej optymalności rozważanych w literaturze układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w różnego rodzaju modelach współoddziaływania, w których efekty blokowe są lub nie są istotne.

Warto zauważyć, że nie tylko kołowe układy zrównoważone ze względu na sąsiedztwo, zdefiniowane m.in. przez Druilhet (1999), są uniwersalnie optymalne w modelu współoddziaływania z jedno- lub dwustronnymi efektami sąsiedztwa. Filipiak i Markiewicz (2004) wykazali uniwersalną optymalność tablic ortogonalnych I-go typu w uogólnionym modelu współoddziaływania ze skorelowanymi obserwacjami, którego szczególnym przypadkiem jest model z jedno- lub dwustronnymi efektami sąsiedztwa (zobacz np. Druilhet, 1999, Kunert i Martin, 2000), model z efektami rezydualnymi pierwszego i drugiego rzędu (zobacz np. Collombier i Merchermek, 1993), czy też model doświadczeń z powtarzanymi pomiarami (zobacz np. Kunert, 1984a).

Istnienie układów zrównoważonych jak i silnie zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo wymaga dość restrykcyjnych warunków nałożonych na parametry układu, a co za tym idzie dużej liczby jednostek eksperymentalnych. W takich sytuacjach założenie eksperymentu w układzie zrównoważonym może być kosztowne lub wręcz niemożliwe ze względu na dostępność materiału doświadczalnego. Dlatego w pracy Filipiak i Markiewicza (2012) zdefiniowane zostały kołowe układy słabo zrównoważone ze względu na sąsiedztwo, w których liczba jednostek eksperymentalnych niezbędnych do ich istnienia może być znacznie zredukowana (o połowę lub więcej) w stosunku do układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo. Ponadto wykazana została uniwersalna optymalność zdefiniowanych układów w modelu współoddziaływania z jednostronnym efektem sąsiedztwa oraz podana została metoda ich konstrukcji dla pewnych szczególnych kombinacji parametrów układów. W pracy Filipiak i Markiewicza (2014) pokazana została uniwersalna optymalność tych układów eksperymentalnych w modelu, w którym efekty współoddziaływania są losowe. Następnie, we współpracy z Bailey, Cameronem, Kunertem i Markiewiczem powstała praca wysłana w tym roku do redakcji, w której wykazaliśmy uniwersalną optymalność i podaliśmy metody konstrukcji układów słabo zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w modelu doświadczeń z powtarzanymi pomiarami.

Jeśli dla zadanej liczby obiektów i jednostek eksperymentalnych nie istnieją układy uniwersalnie optymalne, rozważa się optymalność ze względu na zadane kryteria optymalności. Literatura bogata jest w wyniki dotyczące m.in. A-, D- i E-optymalności układów eksperymentalnych w modelach, w których jedynymi efektami zakłócającymi są efekty blokowe, natomiast brak jest rezultatów dla różnego rodzaju modeli współoddziaływania z efektami sąsiedztwa czy też modeli doświadczeń z powtarzanymi pomiarami. Dlatego wraz z kolegami podjęłam próbę wypełnienia tej luki i w pracy Filipiak i Różańskiego (2005) oraz Filipiak i in. (2008) scharakteryzowane zostały układy E-optymalne w modelu współoddziaływania z jednostronnymi efektami sąsiedztwa, a następnie w pracy Filipiak i Różańskiego (2013) otrzymane wyniki uogólnione zostały na model współoddziaływania, w którym efekty sąsiedztwa są losowe. Podobnie w pracy Filipiak i in. (2012) podana została charakterystyka układów D-optymalnych, a następnie w pracy Filipiak i Markiewicza (2012) udowodniona została ich D-optymalność w modelu współoddziaływania, w którym efekty sąsiedztwa są losowe.

6.2 Publikacje stanowiące osiągnięcie naukowe

[H1] Filipiak, K. i A. Markiewicz (2014). On the optimality of circular block designs under a mixed interference model. *Communications in Statistics - Theory and Methods 43*, 4534–4545.

[H2] Filipiak, K. i R. Różański (2013). On the E-optimality of complete block designs under a mixed interference model. *Journal of Statistical Planning and Inference 143*, 583–592.

[H3] Filipiak, K. i A. Markiewicz (2012). On universal optimality of circular weakly neighbor balanced designs under an interference model. *Communications in Statistics - Theory and Methods 41*, 2356–2366.

[H4] Filipiak, K. (2012). Universally optimal designs under an interference model with equal left- and right-neighbor effects. *Statistics and Probability Letters 82*, 592–598.

[H5] Filipiak, K., A. Markiewicz i R. Różański (2012). Maximal determinant over a certain class of matrices and its application to D-optimality of designs. *Linear Algebra and Its Applications 436*, 874–887.

[H6] Filipiak, K., R. Różański, A. Sawikowska i D. Wojtera-Tyrakowska (2008). On the E-optimality of complete designs under an interference model. *Statistics and Probability Letters 78*, 2470–2477.

6.3 Notacja i definicje

Niech $\mathcal{D}_{t,b,k}$ będzie zbiorem układów doświadczalnych, w których t obiektów rozmieszczonych zostało na bk niejednorodnych jednostkach eksperymentalnych pogrupowanych w b bloków. Model współoddziaływania z efektami lewego i prawego sąsiedztwa dla układu $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ można zapisać w następującej postaci

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_d\boldsymbol{\tau} \ + \mathbf{L}_d\boldsymbol{\lambda} \ + \mathbf{R}_d\boldsymbol{\rho} \ + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} \ + \boldsymbol{\varepsilon} \ , \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\lambda}$ i $\boldsymbol{\rho}$ są t-wymiarowymi wektorami efektów obiektowych, efektów lewego i prawego sąsiedztwa, odpowiednio, $\boldsymbol{\beta}$ jest b-wymiarowym wektorem efektów blokowych, natomiast $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest bk-wymiarowym wektorem błędów losowych, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}_{bk}, \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_{bk})$, przy czym $\mathbf{0}_{bk}$ jest bk-wymiarowym wektorem zer, $\mathbf{I}_{bk}$ jest $bk \times bk$ macierzą jednostkową i σ_ε^2 jest stałe (załóżmy, że równe 1). Jeśli przez $\mathbf{T}_{du}$ zdefiniujemy macierz układu dla efektów obiektowych w u-tym bloku, $1 \leqslant u \leqslant b$, to $\mathbf{T}_d = (\mathbf{T}'_{d1} : \cdots : \mathbf{T}'_{db})'$ jest macierzą układu dla efektów obiektowych. Dla każdego u zdefiniujmy $\mathbf{L}_{du} = \mathbf{H}_k\mathbf{T}_{du}$ i $\mathbf{R}_{du} = \mathbf{H}'_k\mathbf{T}_{du}$, gdzie $\mathbf{H}_k$ jest $k \times k$ macierzą incydencji lewego sąsiedztwa, tzn. element $h_{i,j}$ macierzy $\mathbf{H}_k$ jest równy 1 jeżeli $i - j = 1$, $h_{1,k} = 1$, i 0 w przeciwnym przypadku. Wówczas $\mathbf{L}_d = (\mathbf{L}'_{d1} : \cdots : \mathbf{L}'_{db})' = (\mathbf{I}_b \otimes \mathbf{H}_k)\mathbf{T}_d$ i $\mathbf{R}_d = (\mathbf{R}'_{d1} : \cdots : \mathbf{R}'_{db})' = (\mathbf{I}_b \otimes \mathbf{H}'_k)\mathbf{T}_d$ są macierzami układu dla efektów lewego i prawego sąsiedztwa odpowiednio, $\mathbf{B} = \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{1}_k$ jest macierzą układu dla efektów blokowych, symbol $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera, a $\mathbf{1}_k$ jest k-wymiarowym wektorem jedynek.

Przedmiotem mojego zainteresowana są układy kołowe czyli takie, w których każdy obiekt ma lewego i prawego sąsiada. W przypadku, gdy obiekty rozmieszczone są na jednostkach eksperymentalnych liniowo, efekt układu kołowego można uzyskać poprzez dodanie na końcach każdego bloku jednostek brzegowych, przy czym obiekt przyporządkowany jednostce brzegowej musi być taki sam jak obiekt na przeciwległym końcu bloku. Jednostki brzegowe są wprowadzane w celu zapewnienia istnienia efektów lewego i prawego sąsiedztwa dla każdego obiektu, lecz nie biorą udziału w analizie doświadczenia.

W swoich pracach rozważam dwa podmodele modelu (1), mianowicie model współoddziaływania, w którym efekty prawego sąsiedztwa nie występują:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_d\boldsymbol{\tau} \ + \mathbf{L}_d\boldsymbol{\lambda} \ + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} \ + \boldsymbol{\varepsilon} \ , \tag{2}$$

oraz model, w którym efekty lewego i prawego sąsiedztwa są takie same (powiedzmy, że równe $\boldsymbol{\eta}$):

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_d\boldsymbol{\tau} \; + \mathbf{L}_d\boldsymbol{\eta} \; + \mathbf{R}_d\boldsymbol{\eta} \; + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} \; + \boldsymbol{\varepsilon} \; . \tag{3}$$

W modelu (2) zakłada się, że wektor nieznanych efektów lewego sąsiedztwa $\boldsymbol{\lambda}$ może być wektorem losowym. Wówczas przyjmuje się, że $\mathrm{E}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}_{\mathrm{t}}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_L^2\mathbf{I}_t$ oraz $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Theta}_{bk}$, gdzie σ_L^2 jest znaną stałą i $\boldsymbol{\Theta}_{bk}$ jest $bk \times bk$ macierzą zer.

Głównym zagadnieniem rozważanym w pracach jest scharakteryzowanie układów uniwersalnie optymalnych ze względu na estymację efektów obiektowych, tzn. układów, dla których macierz wariancji-kowariancji najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora wektora $\boldsymbol{\tau}$ jest, w pewnym sensie, najmniejsza. Kryterium uniwersalnej optymalności w zależności od macierzy informacji układu doświadczalnego, będącej odwrotnością macierzy wariancji-kowariancji (porównaj np. Pukelsheim, 2006), zostało sformułowane w pracy Kiefera (1975). Załóżmy zatem, że klasa $\mathcal{C} = \{\mathbf{C}_d : d \in \mathcal{D}_{t,b,k}\}$ określonych nieujemnie macierzy informacji o zerowych sumach wierszowych i kolumnowych zawiera macierz $\mathbf{C}_{d^*}$, która jest kompletnie symetryczna i której ślad jest maksymalny wśród układów $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$. Wówczas układ d^* jest uniwersalnie optymalny w sensie Kiefera w klasie $\mathcal{D}_{t,b,k}$. Przypomnijmy, że macierzą kompletnie symetryczną nazywamy macierz, której elementy na głównej przekątnej są takie same oraz elementy pozadiagonalne są takie same.

Istotną rolę w moich pracach odgrywają następujące układy doświadczalne zrównoważone lub słabo zrównoważone ze względu na sąsiedztwo.

Definicja 1 (Druilhet, 1999)**.** *Kołowy układ binarny $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$, zrównoważony ze względu na efekty blokowe, w którym każda uporządkowana para obiektów występuje dokładnie ℓ razy na jednostkach wewnętrznych jako najbliżsi sąsiedzi, nazywamy* **kołowym układem zrównoważonym ze względu na sąsiedztwo** (CNBD)*.*

Definicja 2 (Druilhet, 1999)**.** *Kołowy układ zrównoważony ze względu na sąsiedztwo I-go stopnia, w którym każda uporządkowana para obiektów występuje dokładnie ℓ razy na jednostkach wewnętrznych jako sąsiedzi II-go stopnia,* *nazywamy* **kołowym układem zrównoważonym ze względu na sąsiedztwo pierwszego i drugiego stopnia** (CNBD2).

Jeżeli przez $\mathbf{S}_d$ oznaczymy iloczyn $\mathbf{T}'_d\mathbf{L}_d$, to zdefiniować można następujące układy doświadczalne, których optymalność jest przedmiotem moich badań.

Definicja 3 ([H3])**.** *Niech* $(p-1)(t-1) < b \leqslant p(t-1)$, $p \in \mathbb{N}$. *Kołowy układ binarny* $d \in \mathcal{D}_{t,b,t}$, *dla którego elementy pozadiagonalne macierzy* $\mathbf{S}_d$ *należą do zbioru* $\{p-1, p\}$ *oraz dla którego macierz* $\mathbf{S}_d\mathbf{S}'_d$ *jest kompletnie symetryczna, nazywamy* **kołowym układem słabo zrównoważonym ze względu na sąsiedztwo** (CWNBD).

Warto zauważyć, że jeżeli $b = p(t-1)$ to układ CWNBD staje się układem CNBD.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zdefiniowane powyżej układy istnieją tylko dla określonych kombinacji parametrów t, b i k. Stąd, w przypadku gdy układy uniwersalnie optymalne nie mogą istnieć, rozważa się optymalność ze względu na zadane kryteria optymalności. W swoich pracach skupiłam się na kryterium D- oraz E-optymalności układów eksperymentalnych, zdefiniowanych za pomocą macierzy informacji w następujący sposób.

Dla układu $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ niech $\mu_1(\mathbf{C}_d) \geqslant \mu_2(\mathbf{C}_d) \geqslant \cdots \geqslant \mu_t(\mathbf{C}_d) = 0$ będą wartościami własnymi jego macierzy informacji $\mathbf{C}_d$.

Układ $d^* \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ nazywamy *układem D-optymalnym* w klasie $\mathcal{D}_{t,b,k}$ jeżeli $\prod_{i=1}^{t-1} \mu_i(\mathbf{C}_{d^*}) \geqslant \prod_{i=1}^{t-1} \mu_i(\mathbf{C}_d)$ dla wszystkich układów $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ (porównaj np. Pukelsheim, 2006). Układ D-optymalny minimalizuje uogólnioną wariancję najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora dowolnego zbioru ortonormalnego $t-1$ kontrastów.

Układ $d^* \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ nazywamy *układem E-optymalnym* w klasie $\mathcal{D}_{t,b,k}$ jeżeli $\mu_{t-1}(\mathbf{C}_{d^*}) \geqslant \mu_{t-1}(\mathbf{C}_d)$ dla wszystkich układów $d \in \mathcal{D}_{t,b,k}$ (porównaj np. Constantine, 1981). Układ E-optymalny minimalizuje największą wariancję najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora znormalizowanych kontrastów obiektowych.

Zauważmy, że układy uniwersalnie optymalne są także D- i E-optymalne, natomiast relacja odwrotna nie zachodzi; porównaj np. Pukelsheim (2006).

6.4. Uniwersalna optymalność

W literaturze w ostatnich latach pojawiło się szereg prac dotyczących uniwersalnej optymalności układów eksperymentalnych w modelach współoddziaływania. Większość z nich dotyczy optymalności kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo (CNBD) - np. Druilhet (1999), Filipiak i Markiewicz (2003, 2007). Cechą charakterystyczną takich układów jest fakt, iż macierz $\mathbf{S}_d$ odgrywająca kluczową rolę w macierzy informacji zależącej m.in. od iloczynu $\mathbf{S}_d\mathbf{S}'_d$, musi być macierzą kompletnie symetryczną. Łatwo stąd zauważyć, że układy CNBD mogą istnieć tylko dla wybranych kombinacji parametrów t, b i k. Celem pracy [H3] było scharakteryzowanie i konstrukcja układów uniwersalnie optymalnych innych niż CNBD dla eksperymentów, w których liczba jednostek eksperymentalnych w blokach jest równa liczbie obiektów, przy założeniu modelu (2). Układy te nazwane zostały *kołowymi układami słabo zrównoważonymi ze względu na sąsiedztwo* (CWNBD). Warto zauważyć, że liczba bloków niezbędna do skonstruowania układu CWNBD jest zdecydowanie mniejsza niż dla układu CNBD.

W pracy [H3] wyprowadzony został warunek konieczny istnienia układów typu CWNBD mówiący o tym, że wyrażenie $(b - 2p + 1)$ musi być podzielne przez $t - 1$, gdzie p jest dowolną liczbą naturalną i $(p - 1)(t - 1) < b \leqslant p(t - 1)$.

Udowodnione zostały następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1 ([H3]). *Jeżeli istnieje układ* CWNBD $\in \mathcal{D}_{t,b,t}$ *o liczbie bloków* $b \leqslant t - 1$, *to układ ten jest uniwersalnie optymalny w modelu współoddziaływania (2) w klasie* $\mathcal{D}_{t,b,t}$, $b \leqslant t - 1$.

Twierdzenie 2 ([H3]). *Jeżeli istnieje układ* CWNBD $\in \mathcal{D}_{t,b,t}$ *o liczbie bloków* $b > t - 1$, *to układ ten jest uniwersalnie optymalny w modelu współoddziaływania (2) w klasie układów równoreplikowalnych z* $\mathcal{D}_{t,b,t}$, $b > t - 1$, *takich, że żaden obiekt nie jest swoim własnym sąsiadem.*

Ponieważ dla $b = p(t-1)$ układ CWNBD jest układem CNBD, Twierdzenie 1 jest spełnione również dla tej szczególnej liczby bloków (zobacz np. Druilhet, 1999).

W pracy [H3] podana została również metoda konstrukcji układów CWNBD w przypadku, gdy liczba obiektów jest liczbą pierwszą, a także przykład układu CWNBD $\in \mathcal{D}_{8,10,8}$ wyznaczony numerycznie. Idea konstrukcji układów CWNBD oparta jest o dekompozycję macierzy $\mathbf{S}_d$ na sumę b jednocyklowych macierzy permutacyjnych (nieredukowalnych macierzy permutacyjnych) stopnia t. Ponieważ liczba macierzy permutacyjnych gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem liczby obiektów, numeryczne zdekomponowanie macierzy $\mathbf{S}_d$ staje się praktycznie niemożliwe już przy stosunkowo małej liczbie obiektów ($t > 10$). W pracy [H3] pokazano, że wystarczy ograniczyć się do potęg macierzy incydencji lewego sąsiedztwa $\mathbf{H}_t$. Tabela 2 w [H3] przedstawia wartości odpowiednich potęg macierzy $\mathbf{H}_t$ pozwalających na konstrukcję układów CWNBD dla $t < 20$, gdzie t jest liczbą pierwszą.

W pracy [H3] zauważono również, że w przypadku gdy t jest liczbą pierwszą i $b < t-1$, alternatywną metodą konstrukcji układu CWNBD jest usunięcie $t-1-b$ dowolnych (różnych) bloków z układu CNBD$\in \mathcal{D}_{t,t-1,t}$.

Praca nad konstrukcją układów CWNBD jest kontynuowana a uzyskane do tej pory wyniki zostały zamieszczone w przedstawionej do publikacji pracy Bailey, Cameron, Filipiak, Kunert i Markiewicz (*On optimality and construction of circular repeated-measurements designs*).

Pokazanie uniwersalnej optymalności układów CWNBD w modelu (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa są losowe było jednym z celów pracy [H1]. Udowodniono m.in. następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 ([H1])**.** *W modelu współoddziaływania (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa mogą być losowe, układ* CWNBD $\in \mathcal{D}_{t,b,t}$ *jest uniwersalnie optymalny w klasie układów równoreplikowalnych z* $\mathcal{D}_{t,b,t}$ *jeżeli* $b < t-1$*, i w klasie układów równoreplikowalnych bez autosąsiedztw z* $\mathcal{D}_{t,b,t}$ *jeżeli* $b > t-1$.

W wielu eksperymentach obiekty mogą oddziaływać na swoich sąsiadów z tą samą siłą w obu kierunkach (np. w eksperymentach serologicznych, porównaj Rees, 1967). Właściwym modelem takich doświadczeń jest model (3). W pracy [H4] scharakteryzowane zostały układy uniwersalnie optymalne ze względu na estymację efektów obiektowych w modelu (3). Do podania warunków dostatecznych optymalności układów kołowych wykorzystana została zmodyfikowana metoda zaprezentowana przez Kunerta i Martina (2000). Pokazane zostało, że zarówno kołowe układy zrównoważone ze względu na sąsiedztwo pierwszego i drugiego stopnia (CNBD2) jak i pewne układy sąsiedztwa zdefiniowane w pracy Reesa (1967) spełniają wyprowadzony warunek dostateczny.

Niech $\mathbf{U}_d = \mathbf{L}_d'\mathbf{R}_d$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([H4]). *Jeżeli istnieje układ binarny $d^* \in \mathcal{D}_{t,b,k}$, zrównoważony ze względu na efekty blokowe, dla którego macierze $\mathbf{S}_{d^*} + \mathbf{S}_{d^*}'$ oraz $\mathbf{U}_{d^*} + \mathbf{U}_{d^*}'$ są kompletnie symetryczne, to d^* jest uniwersalnie optymalny w modelu współoddziaływania (3) w klasie układów z $\mathcal{D}_{t,b,k}$ takich, że żaden obiekt nie jest swoim własnym sąsiadem.*

Z powyższego wynika bezpośrednio następujący wniosek.

Wniosek 1 ([H4]). *Układ CNBD2 jest uniwersalnie optymalny w modelu (3) w klasie układów z $\mathcal{D}_{t,b,k}$ takich, że żaden obiekt nie jest swoim własnym sąsiadem.*

W pracy pokazałam również, że jeżeli $t = k$ jest liczbą pierwszą, to układ złożony z $(t-1)/2$ dowolnych (różnych) bloków układu CNBD2 $\in \mathcal{D}_{t,t-1,t}$ również spełnia warunki Twierdzenia 4.

6.5. E-optymalność

Jeżeli w klasie układów o liczbie obiektów równej liczbie jednostek eksperymentalnych w blokach (układów kompletnych) o zadanej liczbie bloków istnieje układ uniwersalnie optymalny CNBD, to na pewno taki układ nie istnieje jeżeli zmniejszymy lub zwiększymy liczbę bloków o 1. Celem pracy [H6] było scharakteryzowanie układów E-optymalnych ze względu na estymację efektów obiektowych w modelu (2) w klasach układów $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$ oraz $\mathcal{D}_{t,t,t}$. Zaprezentowane wyniki uzyskane zostały w oparciu o własności algebraiczne macierzy informacji.

Niech $\mathbf{K}_d = \mathbf{S}_d - \frac{b}{t}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t'$. W klasie układów binarnych $\mathcal{B}_{t,b,t} \subset \mathcal{D}_{t,b,t}$ warunek E-optymalności zapisać można jako

$$\mu_1(\mathbf{K}_{d^*}\mathbf{K}_{d^*}') \leqslant \mu_1(\mathbf{K}_d\mathbf{K}_d') \quad \text{dla każdego} \quad d \in \mathcal{B}_{t,b,t}.$$

Ponieważ dla macierzy $\mathbf{A}$ określonej nieujemnie $\sqrt{\mu_1(\mathbf{AA}')} = \sigma_1(\mathbf{A})$ gdzie $\sigma_1(\mathbf{A})$ jest normą spektralną macierzy $\mathbf{A}$, aby wyznaczyć układ E-optymalny d^* należy znaleźć macierz $\mathbf{K}_{d^*}$ o najmniejszej normie spektralnej wśród macierzy $\mathbf{K}_d$, $d \in \mathbf{B}_{t,b,t}$.

Dla każdego $d \in \mathcal{B}_{t,b,t}$ zdefiniujmy następujący zbiór macierzy $\mathbf{K}_d$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_b \quad = \quad & \{\mathbf{K}_d = (k_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant t} \colon \mathbf{K}_d\mathbf{1}_t = \mathbf{K}_d'\mathbf{1}_t = \mathbf{0}_t, \\ & \qquad k_{ij} \in \left\{-\tfrac{b}{t}, 1-\tfrac{b}{t}, \ldots, b-\tfrac{b}{t}\right\}, k_{ii} = -\tfrac{b}{t}\right\}.\end{aligned}$$

W pracy [H6] pokazane zostało, że macierz $\mathbf{K}_{d^*}$ o minimalnej normie spektralnej w klasie $\mathcal{K}_b$ należy do zbioru

$$\widetilde{\mathcal{K}}_t = \left\{\mathbf{K}_d \in \mathcal{K}_t\colon\ \mathbf{K}_d = \mathbf{P}_d - \mathbf{I}_t,\ \mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t\right\} \quad \text{jeżeli} \quad b = t$$

oraz

$$\widehat{\mathcal{K}}_{t-2} = \left\{\mathbf{K}_d \in \mathcal{K}_t\colon\ \mathbf{K}_d = \frac{2}{t}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t - \mathbf{P}_d,\ \mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t\right\} \quad \text{jeżeli} \quad b = t-2,$$

odpowiednio, gdzie $\overline{\mathcal{P}}_t$ jest klasą $t \times t$ macierzy permutacyjnych o elementach diagonalnych równych 0 („derangement matrices”).

W pracy pokazano również, że E-optymalny układ d^* w klasie $\mathcal{B}_{t,b,t}$, tzn. układ dla którego $\mathbf{K}_{d^*}$ ma najmniejszą normę spektralną w $\mathcal{K}_b$, jest E-optymalny w klasie $\mathcal{D}_{t,b,t}$.

Macierz $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$, gdzie $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_t$ jest $t \times t$ macierzą permutacyjną, nazywamy macierzą permutacyjnie podobną do $\mathbf{A}$. Następujące twierdzenia algebraiczne zostały udowodnione pomocniczo w pracy [H6].

Twierdzenie 5 ([H6])**.** *Macierz $\mathbf{K}_{d^*}$ o najmniejszej normie spektralnej w $\mathcal{K}_t$ jest permutacyjnie podobna do macierzy:*

(i)	$\mathbf{H}_t - \mathbf{I}_t$	*jeżeli*	$t = 2,\ 7;$
(ii)	$\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2 - \mathbf{I}_4$ *lub* $\mathbf{H}_4 - \mathbf{I}_4$	*jeżeli*	$t = 4;$
(iii)	$\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3 - \mathbf{I}_t$	*jeżeli*	$t = 3m,\ m \in \mathbb{N};$
(iv)	$\mathrm{diag}(\mathbf{I}_i \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}_5) - \mathbf{I}_t$	*jeżeli*	$t = 5$ *lub* $t \geqslant 8$ *i* $t \neq 3m,\ m \in \mathbb{N},$

gdzie $t = 3i + 5j$ *dla pewnych* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j \in \mathbb{N}$.

Ponadto, w przypadku (iii) $\sigma_1(\mathbf{K}_{d^*}) = \sqrt{3}$ *oraz spektrum* $\mathbf{K}_{d^*}\mathbf{K}_{d^*}'$ *ma postać* $\{\underbrace{0,\ 0, \ldots, 0}_{m \text{ razy}},\ \underbrace{3,\ 3, \ldots,\ 3}_{2m \text{ razy}}\}$*, natomiast w przypadku (iv)* $\sigma_1(\mathbf{K}_{d^*}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Twierdzenie 6 ([H6])**.** *Macierz $\mathbf{K}_{d^*}$ o najmniejszej normie spektralnej w $\mathcal{K}_{t-2}$ jest permutacyjnie podobna do macierzy $\frac{2}{t}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t - \mathbf{H}_t$.*

Powyższe twierdzenia prowadzą do następujących wniosków.

Wniosek 2 ([H6])**.** *Jeżeli istnieje układ d^* o macierzy $\mathbf{S}_{d^*}$ permutacyjnie podobnej do*

(i)	$\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t + \mathbf{H}_t$	*dla* $t = 2,\ 7;$
(ii)	$\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2$	*dla* $t = 4;$
(iii)	$\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3$	*dla* $t = 3m,\ m \in \mathbb{N};$
(iv)	$\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t + \mathrm{diag}(\mathbf{I}_i \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}_5)$	*dla* $t = 5$ *lub* $t \geqslant 8$ *i* $t \neq 3m,$

$m \in \mathbb{N}$*, z dokładnością do kolejności bloków diagonalnych, gdzie* $t = 3i + 5j$ *dla pewnych* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i* $j \in \mathbb{N}$,

to d^* jest E-optymalny w klasie $\mathcal{B}_{t,t,t}$ przy założeniu modelu współoddziaływania (2).

Wniosek 3 ([H6])**.** *Jeżeli istnieje układ d^* o macierzy $\mathbf{S}_{d^*}$ permutacyjnie podobnej do $\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t - \mathbf{H}_t$, to d^* jest E-optymalny w klasie $\mathcal{B}_{t,t-2,t}$ przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

Powyższe wnioski uogólnione zostały do następujących twierdzeń.

Twierdzenie 7 ([H6]). *Jeżeli układ d^* spełnia warunki Wniosku 2, to d^* jest E-optymalny w klasie $\mathcal{D}_{t,t,t}$ przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

Twierdzenie 8 ([H6]). *Jeżeli układ d^* spełnia warunki Wniosku 3, to d^* jest E-optymalny w klasie $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$ przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

W pracy [H6] podane zostały również pewne wskazówki dotyczące konstrukcji układów E-optymalnych. Pokazano m.in., że w klasie $\mathcal{D}_{t,t,t}$ układy E-optymalne mogą być konstruowane z wykorzystaniem układów CNBD $\in \mathcal{D}_{t,t-1,t}$ tylko dla $t = 3, 5, 7$ poprzez dopisanie jednego, dowolnego bloku binarnego. W przypadku klasy $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$ układy E-optymalne zawsze mogą być konstruowane przez usunięcie jednego dowolnego bloku z układu CNBD $\in \mathcal{D}_{t,t-1,t}$.

Pewnym rozszerzeniem pracy [H6] są wyniki zawarte w pracy [H2]. Celem [H2] było nie tylko uogólnienie E-optymalności układów na model współoddziaływania (2), w którym efekty sąsiedztwa są losowe w klasach $\mathcal{D}_{t,t,t}$ i $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$, ale również scharakteryzowanie układów E-optymalnych dla liczby bloków $b = p(t-1) \pm 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Dla $p \in \mathbb{N}$ niech

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{t,p(t-1)+1,t} = \{d \in \mathcal{B}_{t,p(t-1)+1,t} : \mathbf{S}_d = p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_{t,p(t-1)-1,t} = \{d \in \mathcal{B}_{t,p(t-1)-1,t} : \mathbf{S}_d = p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) - \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t\}.$$

W pracy [H2] pokazane zostały następujące twierdzenia pomocnicze.

Stwierdzenie 1 ([H2]). *Jeżeli istnieje układ d^* o macierzy $\mathbf{S}_{d^*}$ permutacyjnie podobnej do*

(i) $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2$ *lub* $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathbf{H}_4$ *dla* $t = 4$*;*

(ii) $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathbf{H}_t$ *dla* $t = 7$*;*

(iii) $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3$ *dla* $t = 3m$, $m \in \mathbb{N}$*;*

(iv) $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) + \mathrm{diag}(\mathbf{I}_i \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}_5)$ *dla pozostałych* $t > 3$*,*

gdzie $t = 3i + 5j$ *dla pewnych* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$*,* *gdzie $p \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, to d^* jest E-optymalny w klasie $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,p(t-1)+1,t}$ w modelu współoddziaływania (2), w którym efekty sąsiedztwa mogą być losowe.*

Stwierdzenie 2 ([H2]). *Jeżeli istnieje układ d^* o macierzy $\mathbf{S}_{d^*}$ permutacyjnie podobnej do $p(\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t) - \mathbf{H}_t$, $p \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, to d^* jest E-optymalny w klasie $\widehat{\mathcal{B}}_{t,p(t-1)-1,t}$ w modelu współoddziaływania (2), w którym efekty sąsiedztwa mogą być losowe.*

Powyższe stwierdzenia uogólnione zostały w następujący sposób.

Twierdzenie 9 ([H2]). *Niech $p \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$. Jeżeli układ d^* spełnia warunki Stwierdzenia 1 to, przy założeniu modelu współoddziaływania (2), w którym efekty sąsiedztwa mogą być losowe, d^* jest E-optymalny w klasie układów równoreplikowalnych z $\mathcal{D}_{t,p(t-1)+1,t}$. Ponadto, jeżeli $p \leqslant t-3$ lub jeżeli $p = 3m-2$, $m \in \mathbb{N}$, to d^* jest E-optymalny w klasie wszystkich układów z $\mathcal{D}_{t,p(t-1)+1,t}$.*

Twierdzenie 10 ([H2]). *Niech $p \in \mathbb{N}$ i $t \geqslant 3$. Jeżeli układ d^* spełnia warunki Stwierdzenia 2 to, przy założeniu modelu współoddziaływania (2), w którym efekty sąsiedztwa mogą być losowe, d^* jest E-optymalny w klasie układów równoreplikowalnych z $\mathcal{D}_{t,p(t-1)-1,t}$. Ponadto, jeżeli $p = 1, 2$ lub jeżeli $t > p + 3$, to d^* jest E-optymalny w klasie wszystkich układów z $\mathcal{D}_{t,p(t-1)-1,t}$.*

W pracy [H2] podane zostały również pewne wskazówki dotyczące konstrukcji układów E-optymalnych w przypadkach, gdy $p > 1$.

6.6. D-optymalność

Podobnie jak w przypadku poszukiwania układów E-optymalnych, układy D-optymalne poszukiwane są w klasach $\mathcal{D}_{t,t,t}$ oraz $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$. W pracy [H5] rozważano problem maksymalizacji wyznacznika macierzy $\alpha\mathbf{I}_t + \mathbf{P} + \mathbf{P}'$, $\alpha \geqslant 2.5$, w klasie $t \times t$ macierzy permutacyjnych o elementach na głównej przekątnej równych 0, $\overline{\mathcal{P}}_t$, oraz maksymalizacji wyznacznika macierzy $\alpha\mathbf{I}_t - (\mathbf{P} + \mathbf{P}')$, $\alpha > 2$, w klasie $t \times t$ macierzy permutacyjnych, $\mathcal{P}_t$, a następnie uzyskane wyniki algebraiczne zastosowane zostały do charakterystyki układów D-optymalnych w modelu współoddziaływania (2) w odpowiedniej klasie układów.

Udowodniono następujące twierdzenia algebraiczne.

Twierdzenie 11 ([H5]). *Jeżeli* $\mathbf{P} \in \overline{\mathcal{P}}_t$ *jest permutacyjnie podobna do*

(i) $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3$, *dla* $t = 3m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*;*

(ii) $\operatorname{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4)$, *dla* $t = 3m + 4$, $m \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\operatorname{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_5)$, *dla* $t = 3m + 5$, $m \in \mathbb{N}$,

to $\det(\alpha\mathbf{I}_t + \mathbf{P} + \mathbf{P}')$, $\alpha \geqslant 2.5$, *jest największy w klasie* $\overline{\mathcal{P}}_t$*. Ponadto, jeżeli* $2 \leqslant t \leqslant 5$, *to wyznacznik* $\alpha\mathbf{I}_t + \mathbf{H}_t + \mathbf{H}'_t$ *jest największy w klasie* $\overline{\mathcal{P}}_t$ *dla* $\alpha > 2$.

Twierdzenie 12 ([H5]). *Jeżeli* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_t$ *jest permutacyjnie podobna do* $\mathbf{H}_t$*, to* $\det(\alpha\mathbf{I}_t - (\mathbf{P} + \mathbf{P}'))$, $\alpha > 2$, *jest największy w klasie* $\mathcal{P}_t$.

Ważną obserwacją poczynioną w pracy [H2] jest fakt, iż macierz informacji $\mathbf{C}_d$ oraz jej przesunięcie $\mathbf{C}_d + \eta\mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t$ mają ten sam zbiór wektorów własnych, oraz że wartości własne odpowiadające tym wektorom własnym są takie same za wyjątkiem wektora $\mathbf{1}_t$, który jest wektorem własnym obu macierzy, odpowiadającym wartościom własnym 0 i ηt, odpowiednio. Stąd, iloczyn $t - 1$ (największych) wartości własnych macierzy $\mathbf{C}_d$ jest równy wyznacznikowi macierzy $\mathbf{C}_d + \eta\mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t$ podzielonemu przez ηt. W związku z tym aby wyznaczyć układy D-optymalne w modelu współoddziaływania (2) w klasie $\mathcal{D}_{t,t,t}$ wystarczy porównać wyznaczniki macierzy $t\mathbf{C}_d + t\mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t = \alpha\mathbf{I}_t + \mathbf{P}_d + \mathbf{P}'_d$ dla $\mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t$, gdzie $\alpha = t^2 - 2$. Podobnie, aby scharakteryzować układy D-optymalne w modelu współoddziaływania (2) w klasie $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$ wystarczy porównać wyznaczniki macierzy $(t-2)\mathbf{C}_d + (t-4)\mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t = \alpha\mathbf{I}_t - (\mathbf{P}_d + \mathbf{P}'_d)$ dla $\mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t$ gdzie $\alpha = t^2 - 4t + 2$. Warto tu zwrócić uwagę, że $\alpha > 2.5$ dla każdego $t \geqslant 3$.

Niech $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$ będzie zbiorem układów, dla których $\mathbf{S}_d = \mathbf{I}_t - \mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t + \mathbf{P}_d$, oraz niech $\widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$ będzie zbiorem układów, dla których $\mathbf{S}_d = \mathbf{I}_t - \mathbf{1}_t\mathbf{1}'_t - \mathbf{P}_d$, gdzie $\mathbf{P}_d \in \overline{\mathcal{P}}_t$. Z Twierdzeń 11 oraz 12 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4 ([H5]). *Jeżeli istnieje układ* $d^* \in \widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$*, dla którego macierz* $\mathbf{S}_{d^*}$ *jest permutacyjnie podobna do*

(i) $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3 + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m$, $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\mathrm{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4) + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m + 4$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(iii) $\mathrm{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_5) + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m + 5$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

to d^* *jest D-optymalny w klasie* $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$, $t \geqslant 3$*, przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

Wniosek 5 ([H5]). *Jeżeli istnieje układ* $d^* \in \widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$, $t \geqslant 5$*, dla którego* $\mathbf{S}_{d^*}$ *jest permutacyjnie podobna do* $\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t - \mathbf{H}_t$*, to* d^* *jest D-optymalny w klasie* $\widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$ *przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

Udowodniono następujące twierdzenia, w których rozszerzono klasy D-optymalności układów z Wniosków 4 i 5.

Twierdzenie 13 ([H5]). *Jeżeli* $d^* \in \widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$, $t \geqslant 3$*, jest układem D-optymalnym w klasie* $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$*, to jest on D-optymalny w klasie układów rónoreplikowalnych z* $\mathcal{D}_{t,t,t}$ *przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

Twierdzenie 14 ([H5]). *Jeżeli* $d^* \in \widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$, $t \geqslant 5$*, jest układem D-optymalnym w klasie* $\widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$*, to jest on D-optymalny w klasie wszystkich układów z* $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$ *przy założeniu modelu współoddziaływania (2).*

W pracy [H5] zauważono również, że metody konstrukcji układów D-optymalnych są bardzo zbliżone do metod konstrukcji układów E-optymalnych pokazanych w pracy [H6].

Pewnym uogólnieniem wyników pracy [H5] jest praca [H1], w której rozszerzono D-optymalność układów scharakteryzowanych w [H5] na model współoddziaływania (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa są losowe. Pokazano następujące twierdzenia.

Twierdzenie 15 ([H1]). *Jeżeli istnieje układ $d^* \in \widetilde{\mathcal{B}}_{t,t,t}$, $t \geqslant 3$, dla którego $\mathbf{S}_{d^*}$ jest permutacyjnie podobna do*

(i) $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3 + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m$, $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\operatorname{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4) + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m + 4$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(iii) $\operatorname{diag}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_5) + \mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t$, *dla* $t = 3m + 5$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

to d^* jest D-optymalny w klasie układów równoreplikowalnych z $\mathcal{D}_{t,t,t}$, w których żaden obiekt nie jest swoim własnym sąsiadem, przy założeniu modelu współoddziaływania (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa są losowe.

Twierdzenie 16 ([H1]). *Jeżeli istnieje układ $d^* \in \widehat{\mathcal{B}}_{t,t-2,t}$, $t \geqslant 3$, dla którego $\mathbf{S}_{d^*}$ jest permutacyjnie podobna do $\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t' - \mathbf{I}_t - \mathbf{H}_t$, to d^* jest D-optymalny w klasie układów równoreplikowalnych z $\mathcal{D}_{t,t-2,t}$, przy założeniu modelu współoddziaływania (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa są losowe.*

6.7. Uwagi końcowe i cytowana literatura

Ponieważ zachodzi następująca relacja między macierzami informacji w modelu współoddziaływania (2), $\mathcal{M}_\infty$, w modelu (2), w którym efekty lewego sąsiedztwa są losowe, $\mathcal{M}_\sigma$, oraz w modelu (2) bez efektów lewego sąsiedztwa, $\mathcal{M}_0$,

$$\mathbf{C}_{d,\infty} \preceq_L \mathbf{C}_{d,\sigma} \preceq_L \mathbf{C}_{d,0}$$

(porównaj np. Markiewicz, 1997), gdzie $\mathbf{C}_{d,\infty}$ jest macierzą informacji w modelu $\mathcal{M}_\infty$, $\mathbf{C}_{d,\sigma}$ jest macierzą informacji w modelu $\mathcal{M}_\sigma$ oraz $\mathbf{C}_{d,0}$ jest macierzą informacji w modelu $\mathcal{M}_0$, a relacja $\preceq_L$ oznacza macierzowy porządek Loewnera, twierdzenia udowodnione dla modelu $\mathcal{M}_\sigma$ są również spełnione dla modelu $\mathcal{M}_\infty$.

Warto zauważyć, że ponieważ układy scharakteryzowane w pracach [H1], [H2] oraz [H5], [H6] jako E- lub D-optymalne są binarne i kompletne, są one zrównoważone ze względu na efekty blokowe. Ponadto, układy CNBD, CNBD2 oraz CWNBD są zdefiniowane jako zrównoważone ze względu na efekty blokowe. Wynika stąd, że wszystkie układy, których uniwersalna optymalność wykazana została w pracach [H1], [H3] i [H4] są zrównoważone ze względu na efekty blokowe. Wynika stąd konkluzja, że układy eksperymentalne, których optymalność wykazana została w pracach [H1]–[H6], są uniwersalnie optymalne w klasie wszystkich układów z $\mathcal{D}_{t,b,t}$ również w modelu $\mathcal{M}_0$ (porównaj np. Shah i Sinha, 1989).

Cytowana literatura (bez autocytowań)

Ai, M., G. Ge i L.Y. Chan (2007). Circular neighbor-balanced designs universally optimal for total effects. *Sci. China Ser. A 50*, 821–828.

Ai, M.Y., Y.L. Yu i S.Y. He (2009). Optimality of circular neighbor-balanced designs for total effects with autoregressive correlated observations. *J. Statist. Plann. Inference 139*, 2293–2304.

Ahmed, R. i M. Akhtar (2008). Construction of neighbor balanced block designs. *J. Stat. Theory Practice 2*, 551–558.

Ahmed, R. i M. Akhtar (2009). Construction of one-dimensional all order neighbor balanced designs by cyclic shifts. *Pak. J. Statist. 25*, 121–126.

Ahmed, R. i M. Akhtar (2011). Designs balanced for neighbor effects in circular blocks of size six. *J. Statist. Plann. Inference 141*, 687–691.

Ahmed, R., M. Akhtar i M.H. Tahir (2009). Economical generalized neighbor designs of use in Serology. *Comput. Statist. Data Anal. 53*, 4584–4589.

Akhtar, M. i R. Ahmed (2009). Circular binary block second and higher order neighbor designs. *Comm. Statist. Simulation Comput. 38*, 821–828.

Akhtar, M., R. Ahmed i F. Yasmin (2010). A catalogue of nearest neighbor balanced designs in circular blocks of size five. *Pak. J. Statist. 26*, 397–405.

Azaïs, J.-M., R.A. Bailey i H. Monod (1993). A catalogue of efficient neighbour-designs with border plots. *Biometrics 49*, 1252–1261.

Bailey, R.A. (2003). Designs for one-sided neighbour effects. *Jour. Ind. Soc. Ag. Statistics 56*, 302–314.

Bailey, R.A. i P. Duilhet (2004). Optimality of neighbour balanced designs for total effects. *Ann. Statist. 32*, 1650–1661.

Bailey, R.A. i J. Kunert (2006). On optimal crossover designs when carryover effects are proportional to direct effects. *Biometrika 93*, 613–625.

Bermond, J.C., C. Huang i D. Sotteau (1978). Balanced cycles and circuit designs: even cases. *Ars Combin. 5*, 293–318.

Chaure, K. i B.L. Misra (1996). On construction of generalized neighbor designs. *Sankhya B 58*, 245–253.

Cheng, C.-S. i C.F. Wu (1980). Balanced repeated measurements designs. *Ann. Statist. 8*, 1272–1283.

Cheng, C.-S. i C.F. Wu (1983). Correction to: Balanced repeated measurements designs. *Ann. Statist. 11*, 349.

Collombier, D. i I. Merchermek (1993). Optimal cross-over experimental designs. *Sankhya B 55*, 249–261.

Constantine, G.M. (1981). Some E-optimal block designs. *Ann. Statist. 9(4)*, 886–892.

Das, A.D. i G.M. Saha (1976). On construction of neighbor designs. *Calcutta Statist. Assoc. Bull. 25*, 151–164.

Druilhet, P. (1999). Optimality of circular neighbor balanced designs. *J. Statist. Plann. Inference 81*, 141–152.

Hamad, N., M. Zafar Yab i M. Hanif (2010). Non-binary neighbor balance circular designs for $v = 2n$ and $\lambda = 2$. *J. Statist. Plann. Inference 140*, 3013–3016.

Hedayat, A. i K. Afsarinejad (1978). Repeated measurements designs. *Ann. Statist. 6*, 619–628.

Hwang, F.K. (1973). Constructions for some classes of neighbor designs. *Ann. Statist. 1*, 786–790.

Hwang, F.K. i S. Lin (1977). Neighbor designs. *J. Combin. Theory A 23*, 302–313.

Iqbal, I., M.H. Tahir i S.S.A. Ghazali (2009). Circular neighbor-balanced designs using cyclic shifts. *Sci. China Ser. A 52*, 2243–2256.

Iqbal, I., M.H. Tahir, M.L. Aggarwal, A. Ali i I. Ahmed (2012). Generalized neighbor designs with block size 3. *J. Statist. Plann. Inference 142*, 626–632.

Jacroux, M. (1998). On the construction of efficient equineighbored incomplete block designs having block size 3. *Sankhya B 60*, 488–495.

Jones, B., J. Kunert i H. Wynn (1992). Information matrices for mixed effects models with applications to the optimality of repeated measurements designs. *J. Statist. Plann. Inference 33*, 261–274.

Kempton, R.A., S.J. Ferris i O. David (2001). Optimal change-over designs when carry-over effects are proportional to direct effects of treatments. *Biometrika 88*, 391–399.

Kiefer, J. (1975). Construction and optimality of generalized Youden designs. J.N. Srivastava (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models, North-Holland, Amsterdam, 333–353.

Kunert, J. (1983). Optimal design and refinement of the linear model with applications to repeated measurements designs. *Ann. Statist. 11*, 247–257.

Kunert, J. (1984a). Designs balanced for circular residual effects. *Comm. Statist. Theory Methods 13*, 2665–2671.

Kunert, J. (1984b). Optimality of balanced uniform repeated measurements designs. *Ann. Statist. 12*, 1006–1017.

Kunert, J. i R.J. Martin (2000). On the determination of optimal designs for an interference model. *Ann. Statist. 28*, 1728–1742.

Kushner, H.B. (1997). Optimal repeated measurements designs: the linear optimality equations. *Ann. Statist. 25*, 2328–2344.

Lawless, J.F. (1971). A note on certain types of BIBD's balanced for residual effects. *Ann. Math. Statist. 42*, 1439–1441.

Magda, C.G. (1980). Circular balanced repeated measurements designs. *Comm. Statist. Theory Methods 9*, 1901–1918.

Markiewicz, A. (1997). Properties of information matrices for linear models and universal optimality of experimental designs. *J. Statist. Plann. Inference 59*, 127–137.

Mishra, N.S. (2007). Families of proper generalized neighbor designs. *J. Statist. Plann. Inference 137*, 1681–1686.

Misra, B.L. i Nutan Bhagwandas (1991). Families of neighbor designs and their analysis. *Commun. Statist. Simul. Comput. 20*, 427–436.

Pukelsheim, F. (1993). *Optimal Designs of Experiments*. Wiley, New York.

Pukelsheim, F. (2006). *Optimal Designs of Experiments*. SIAM, Philadelphia.

Rees, D.H. (1967). Some designs of use in serology. *Biometrics 23*, 779–791.

Rosa, A. i C. Huang (1975). Another class of balanced graph designs: balanced circuit designs. *Discrete Math. 12*, 269–293.

Shah, K.R. i B.K. Sinha (1989). *Theory of Optimal Designs*. Springer, Berlin.

Shehzad, F., M. Zafar Yab i R. Ahmed (2011a). Minimal neighbor designs in circular blocks of unequal sizes. *J. Statist. Plann. Inference 141*, 3681–3685.

Shehzad, F., M. Zafar Yab i R. Ahmed, R. (2011b). Some series of proper generalized neighbor designs. *J. Statist. Plann. Inference 141*, 3808–3813.

Stufken, J. (1991). Some families of optimal and efficient repeated measurements designs. *J. Statist. Plann. Inference 27*, 75–83.

Zafar Yab, M., F. Shehzad i R. Ahmed (2010). Proper generalized neighbor designs in circular blocks. *J. Statist. Plann. Inference 140*, 3498–3504.

7. Pozostały dorobek naukowy

Zakres prac obejmuje głównie zagadnienia z teorii eksperymentu w zastosowaniu do modeli jedno- jak i wielowymiarowych. Ponadto, jedna z prac zawiera wyniki teoretyczne z pogranicza metod numerycznych i algebry macierzy. Niniejsze omówienie dotyczy prac opublikowanych po doktoracie.

7.1. Publikacje (po doktoracie)

[P1] Filipiak, K. i D. von Rosen (2012). Maximum likelihood estimation in the multivariate model of experimental designs. *Metrika 75*, 1069–1092.

[P2] Filipiak, K., A. Markiewicz i A. Sawikowska (2012). Determinants of multidiagonal matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra 25*, 101–117.

[P3] Filipiak, K., A. Markiewicz i A. Szczepańska (2009). Optimal designs under a multivariate linear model with additional nuisance parameters. *Statistical Papers 50*, 761–778.

[P4] Filipiak, K. i R. Różański (2009). Connectedness of complete block designs under an interference model. *Statistical Papers 50*, 779–787.

[P5] Filipiak, K. i A. Markiewicz (2007). Optimal designs for a mixed interference model. *Metrika 65*, 369–386.

[P6] Filipiak, K. i A. Szczepańska (2007). A-optimal designs under a quadratic growth curve model in the transformed time interval. *Biometrical Letters 44(2)*, 85–96.

[P7] Filipiak, K. i A. Markiewicz (2005). Optimality and efficiency of neighbor balanced designs for correlated observations. *Metrika 61*, 17–27.

[P8] Filipiak K. i A. Szczepańska (2005). A-, D- and E-optimal designs in quadratic and cubic growth curve models with correlated errors. *Biometrical Letters 42(1)*, 43–56.

[P9] Filipiak K. i R. Różański (2005). E-optimal designs under an interference model. *Biometrical Letters 42(2)*, 133–142.

7.2. Syntetyczne omówienie prac

Głównym tematem moich badań po doktoracie było zagadnienie optymalności układów eksperymentalnych przy założeniu jedno- lub wielowymiarowego modelu liniowego. W planowaniu eksperymentu istotny jest wybór takiego układu, który jest optymalny ze względu na estymację interesujących badacza parametrów. Użycie optymalnego planu eksperymentu pozwala na najbardziej precyzyjną ocenę nieznanych parametrów modelu oraz zwiększenie efektywności doświadczenia.

Optymalność układów doświadczalnych w modelach współoddziaływania ze skorelowanymi obserwacjami poświęcona była praca [P7]. Podane w niej zostały warunki optymalności kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo w modelach ze skorelowanymi obserwacjami, przy czym struktura korelacyjna wektora obserwacji wyraża się kołowym procesem autoregresji I-go rzędu, a także wykazana została ich wysoka efektywność w modelach, w których nie są spełnione warunki ich optymalności.

Kolejna praca, [P5], jest kontynuacją pracy Filipiak i Markiewicza (2003) [Filipiak, K. i A. Markiewicz, 2003, Optimality of neighbor balanced designs under mixed effects model, *Statist. Probab. Lett. 61*, 225–234]. Rozszerzone w niej zostały klasy uniwersalnej optymalności kołowych układów zrównoważonych ze względu na sąsiedztwo oraz zrównoważonych na sąsiedztwo pierwszego i drugiego rzędu w modelach współoddziaływania (2) oraz (1), odpowiednio, w których efekty sąsiedztwa są losowe. Do uzyskania przedstawionych wyników posłużyła tu zmodyfikowana metoda Kunerta i Martina (2000) [Kunert, J. i R. Martin, 2000, On the determination of optimal designs for an interference model, *Ann. Statist. 28*, 1728–1742], w której wykorzystano własności macierzy kopozytywnych oraz analizę wypukłą stożków wielościennych.

Praca [P9] dotyczyła zagadnienia E-optymalności kołowych układów kompletnych w modelu współoddziaływania (2). Celem pracy było wyznaczenie i podanie metod konstrukcji układów E-optymalnych w klasie układów kompletnych o liczbie bloków równej liczbie obiektów. Wyniki zaprezentowane w [P9] stanowiły punkt wyjścia do badań, których wyniki przedstawione zostały w [H6].

Ważną cechą układów eksperymentalnych jest ich spójność. Dlatego głównym celem pracy [P4] było wyprowadzenie warunku koniecznego na najmniejszą liczbę bloków niezbędnych do skonstruowania układu spójnego przy założeniu modelu współoddziaływania (2) a także pokazanie, że w pewnej szczególnej klasie układów eksperymentalnych (zawierających układy E-optymalne) wszystkie układy są spójne. Ponadto, w pracy wyprowadzone zostały warunki konieczne i dostateczne spójności układów kompletnych o dowolnej ustalonej liczbie bloków.

Celem pracy [P3] było rozwinięcie teorii optymalności eksperymentu i objęcie nią modeli wielowymiarowych, jako że problem optymalności układów doświadczalnych dotychczas badany był jedynie w kontekście modeli jednowymiarowych. Przy założeniu rozszerzonego modelu krzywych wzrostu, w pracy [P3] podane zostały relacje między uniwersalną optymalnością w modelach jednowymiarowych i ich wielowymiarowymi rozszerzeniami ze znaną lub częściowo znaną macierzą dyspersji.

Scharakteryzowanie układów uniwersalnie optymalnych wymagało m.in. wyznaczenia i zbadania własności (momentów I-go i II-go rzędu) estymatorów macierzy nieznanych parametrów. W literaturze analizowane są dwie wersje rozszerzonego modelu krzywych wzrostu, przy czym jedna może być przekształcona do drugiej w wyniku pewnego przeparametryzowania. Ponieważ jednak estymatory nieznanych macierzy parametrów są nieliniowe, nie jest oczywiste jak przenieść ich własności z jednej wersji modelu do drugiej. Dlatego jednym z celów pracy [P1] było uzupełnienie wyników przedstawionych przez Kollo i von Rosena [Kollo, T. and D. von Rosen, 2005, *Advanced multivariate statistics with matrices*, Springer, Dordrecht] dla jednej wersji modelu oraz wyprowadzenie i zbadanie własności estymatorów w drugiej wersji modelu.

Przedmiotem analizy w pracach [P8] i [P6] była również optymalność układów eksperymentalnych, jednakże rozważanym modelem był model krzywych wzrostu a przez układ optymalny rozumiane było optymalne rozmieszczenie punktów czasowych.
Charakterystyka układów A-, D- i E-optymalnych w wielomianowych (stopnia 2 i 3) modelach krzywych wzrostu z trzema i czterema punktami czasowymi z przedziału $[0, 2]$ oraz ze skorelowanymi obserwacjami podana została w [P8]. Bazując na pracy Moerbeek [Moerbeek, M., 2005, Robustness properties of A-, D-, and E-optimal designs for polynomial growth models with autocorrelated errors, *Comput. Statist. Data Anal. 48*, 765–778] rozważone zostały cztery szczególne struktury macierzy wariancji kowariancji: struktura najbliższego sąsiedztwa, autoregressji, ruchomej średniej oraz nieuporządkowanej zależności wyjściowej (unstructured antedependence).
W pracy [P6] analizowano kwadratowy model krzywych wzrostu ze skorelowanymi obserwacjami. Dla symetrycznego przedziału, w którym rozmieszczone są punkty czasowe, wyznaczony został współczynnik $\alpha > 0$ oraz struktura korelacyjna, dla których układ A-optymalny w przedziale czasowym $[-1, 1]$ jest również A-optymalny w przedziale $[-\alpha, \alpha]$. Ponadto, ponieważ dla pewnych struktur korelacyjnych wiadomo, że układem A- i D-optymalnym w przedziale czasowym $[-\alpha, \alpha]$ jest układ $d^* = \{-\alpha, 0, \alpha\}$, wyznaczono współczynnik przesunięcia oraz strukturę korelacyjną dla której układ $d = \{\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\}$ jest A-optymalny w asymetrycznym przedziale czasowym $[\alpha, \beta]$.
W pracy [P8] pokazano, że D-optymalność układu eksperymentalnego nie zależy od struktury kowariancyjnej. W pracy [P6] udowodniono, że D-optymalność nie zależy również od przeskalowania lub/i przesunięcia przedziału czasowego.

Praca [P2] zawiera algebraiczne wyniki związane z wyznacznikami macierzy wielodiagonalnych i wielodiagonalnych z narożnikami. Celem pracy było przedstawienie i analiza nowych algorytmów obliczania wyznaczników macierzy wielodiagonalnych i wielodiagonalnych z narożnikami bazując na wzorach przedstawionych w pracy Molinari [Molinari, L.G., 2008, Determinants of block tridiagonal matrices, *Linear Algebra Appl. 429*, 2221–2226] do obliczania wyznaczników macierzy blokowo-trójdiagonalnych i blokowo-trójdiagonalnych z narożnikami, oraz porównanie ich z innymi znanymi algorytmami w przypadku macierzy pięciodiagonalnych i pięciodiagonalnych z narożnikami. W pracy [P2] przedstawiono również zastosowania prezentowanych algorytmów, m.in. w teorii eksperymentów do scharakteryzowania układów D-optymalnych, omawianych w pracy [H5].

8. Spis publikacji

A. po uzyskaniu stopnia doktora

- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2014). On the optimality of circular block designs under a mixed interference model. *Communications in Statistics - Theory and Methods 43*, 4534–4545. (IF=0.284)
- Filipiak, K. i R. Różański (2013). On the E-optimality of complete block designs under a mixed interference model. *Journal of Statistical Planning and Inference 143*, 583–592. (IF=0.598)
- Filipiak, K. i D. von Rosen (2012). Maximum likelihood estimation in the multivariate model of experimental designs. *Metrika 75*, 1069–1092. (IF=0.619)
- Filipiak, K., A. Markiewicz i A. Sawikowska (2012). Determinants of multidiagonal matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra 25*, 101–117. (IF=0.667)
- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2012). On universal optimality of circular weakly neighbor balanced designs under an interference model. *Communications in Statistics - Theory and Methods 41*, 2356–2366. (IF=0.298)
- Filipiak, K. (2012). Universally optimal designs under an interference model with equal left- and right-neighbor effects. *Statistics and Probability Letters 82*, 592–598. (IF=0.531)

- Filipiak, K., A. Markiewicz i R. Różański (2012). Maximal determinant over a certain class of matrices and its application to D-optimality of designs. *Linear Algebra and Its Applications 436*, 874–887. (IF=0.968)
- Filipiak, K., A. Markiewicz i A. Szczepańska (2009). Optimal designs under a multivariate linear model with additional nuisance parameters. *Statistical Papers 50*, 761–778. (IF=0.396)
- Filipiak, K. i R. Różański (2009). Connectedness of complete block designs under an interference model. *Statistical Papers 50*, 779–787. (IF=0.396)
- Filipiak, K., R. Różański, A. Sawikowska i D. Wojtera-Tyrakowska (2008). On the E-optimality of complete designs under an interference model. *Statistics and Probability Letters 78*, 2470–2477. (IF=0.445)
- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2007). Optimal designs for a mixed interference model. *Metrika 65*, 369–386. (IF=0.51)
- Filipiak, K. i A. Szczepańska (2007). A-optimal designs under a quadratic growth curve model in the transformed time interval. *Biometrical Letters 44(2)*, 85–96.
- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2005). Optimality and efficiency of neighbor balanced designs for correlated observations. *Metrika 61*, 17–27. (IF=0.451)
- Filipiak, K. i A. Szczepańska (2005). A-, D- and E-optimal designs in quadratic and cubic growth curve models with correlated errors. *Biometrical Letters 42(1)*, 43–56.
- Filipiak, K. i R. Różański (2005). E-optimal designs under an interference model. *Biometrical Letters 42(2)*, 133–142.

B. przed uzyskaniem stopnia doktora

- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2004). Optimality of type I orthogonal arrays for general interference model with correlated observations. *Statistics and Probability Letters 68*, 259–265. (IF=0.284)
- Filipiak, K. i R. Różański (2004). Some properties of cyclic designs under an interference model. *Colloquium Biometryczne 34*, 29–42.

- Filipiak, K. i A. Markiewicz (2003). Optimality of neighbor balanced designs under mixed effects model. *Statistics and Probability Letters 61*, 225–234. (IF=0.363)
- Filipiak, K. i R. Różański (2003). Optimal and efficient designs for an interference model with correlated observations. *Colloquium Biometryczne 33*, 97-110.
- Filipiak, K. (2002). Optimal designs for an interference model. *Colloquium Biometryczne 32*, 67–78.
- Filipiak, K. (2001). Optymalne układy blokowe w modelu liniowej wariancji. *Colloquium Biometryczne 31*, 83–90.

C. prace wysłane do redakcji

- Bailey, R.A., P.J. Cameron, Filipiak, K., J. Kunert i A. Markiewicz. On optimality and construction of circular repeated-measurements designs.
- Filipiak, K. i A. Markiewicz. Universally optimal designs under interference models with and without block effects.
- Filipiak, K., D. Klein i A. Roy. Score test for a separable covariance structure with the first component as compound symmetric correlation matrix.

D. inne publikacje

- Filipiak, K. i S. Puntanen (2014). Preface to the Special Issue on Advances on Linear Models and Inference: Computational Aspects. *Communications in Statistics - Simulation and Computation 43*, 2045–2046.
- Filipiak, K. i D. von Rosen (2012). Preface. *Communications in Statistics - Theory and Methods 41*, 2281–2282.
- Filipiak, K. (2011). Advances in Model-Oriented Design and Analysis edited by Alessandra Giovagnoli, Anthony C. Atkinson, Bernard Torsney. *International Statistical Review 79*, 481–482.
- Filipiak, K. (2009). Design and Analysis of Experiments, Volume 1: Introduction to Experimental Design, Second Edition by Klaus Hinkelmann, Oscar Kempthorne. *International Statistical Review 77*, 470.

- Filipiak, K. (2009). Statistical Inference, Econometric Analysis and Matrix Algebra: Festschrift in Honour of Götz Trenkler by Bernhard Schipp, Walter Krämer. *International Statistical Review 77*, 324–325.

Sumaryczny *impact factor* publikacji **naukowych** wg JCR (zgodnie z rokiem opublikowania): 6.915
Liczba cytowań publikacji wg Web of Science: 45; bez auto-cytowań: 8
Indeks Hirscha wg Web of Science: 5

9. Projekty badawcze

- 2012 - trwający – kierownik grantu NCN w programie „Iuventus Plus”, nr IP2011 012371:
  Wnioskowanie statystyczne i charakterystyka układów optymalnych w uogólnionym rozszerzonym modelu krzywych wzrostu
- 2011 - 2013 – główny wykonawca grantu NCN nr 2011/01/B/ST1/01413:
  Charakterystyka i konstrukcja optymalnych układów doświadczalnych w modelach współoddziaływania
- 2006 - 2007 – wykonawca w grancie interdyscyplinarym pomiędzy Uniwersytetem im. Adama Mickiewicza w Poznaniu i Akademią Rolniczą w Poznaniu:
  Wyznaczanie układów A- i D-optymalnych w modelach współoddziaływania
- 2004 - 2005 – wykonawca w grancie interdyscyplinarym pomiędzy Uniwersytetem im. Adama Mickiewicza w Poznaniu i Akademią Rolniczą w Poznaniu:
  Wyznaczanie optymalnych oraz efektywnych układów eksperymentalnych w modelach niestandardowych
- 2004 - 2005 – główny wykonawca w grancie KBN nr 1 P03A 028 26:
  Optymalne układy doświadczalne w modelach współoddziaływania
- 2001 - 2002 – główny wykonawca w grancie KBN nr 5 P03A 041 21:
  Efektywne oraz optymalne układy doświadczalne w modelach z uwzględnieniem wpływów sąsiedztwa

10. Nagrody i wyróżnienia

- Brązowy medal za długoletnią służbę przyznawany przez Prezydenta Rzeczpospolitej Polskiej – 2012
- Nagroda zespołowa za działalność organizacyjną przyznawana przez Rektora Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu – 2007, 2008, 2009, 2010, 2011
- Nagroda zespołowa za działalność naukową przyznawana przez Rektora Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu – 2007, 2008, 2009, 2012
- Nagroda zespołowa za działalność naukową przyznawana przez Rektora Akademii Rolniczej w Poznaniu – 2006
- Nagroda indywidualna za działalność naukową przyznawana przez Rektora Akademii Rolniczej w Poznaniu – 2005
- Wyróżnienie rozprawy doktorskiej przez Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu – 2004.

11. Spis referatów wygłoszonych na konferencjach naukowych

- International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference LINSTAT'2014, Linköping, Szwecja, 2014 (referat zaproszony do sesji specjalnej):
  Hypothesis testing for a separable covariance structure with AR(1) under the two-level multivariate model
- 13th Workshop on Quality Improvement Methods, Dortmund, Niemcy, 2014 – za zaproszeniem:
  Universally optimal designs under interference models with and without block effects
- Mat-Triad 2013, Herceg-Novi, Czarnogóra, 2013:
  Optimal designs under the generalized extended growth curve model
- 10th Workshop on Model Oriented Data Analysis and Optimum Design (mODa 10), Łagów Lubuski, Polska, 2013 – za zaproszeniem:
  On universal optimality of circular repeated measurements designs

- International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference LINSTAT'2012 and 21st International Workshop on Matrices and Statistics, IWMS'2012, Będlewo, Polska, 2012:
  On universal optimality of circular repeated measurements designs
- Optimal Design of Experiments - Theory and Application, Wiedeń, Austria, 2011:
  On D-optimality of complete block designs under a mixed interference model
- Mat-Triad 2011, Tomar, Portugalia, 2011:
  On some properties of the information matrix of neighbor designs under an interference model
- 20th International Workshop on Matrices and Statistics and the 9th Tartu Conference on Multivariate Statistics, Tartu, Estonia, 2011:
  On the E-optimality of complete designs under a mixed interference model
- International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference LINSTAT'2010, Tomar, Portugalia, 2010:
  Optimality of designs under models with interference dependence structure
- Applied Linear Algebra 2010 - ALA 2010, Nowy Sad, Serbia, 2010:
  On maximization of some functions of eigenvalues of nonnegative definite matrices
- 35 Konferencja „Statystyka Matematyczna", Wisła, Polska, 2009:
  Estymowalność i estymatory największej wiarogodności w rozszerzonym modelu krzywych wzrostu
- Mat-Triad 2009, Będlewo, Polska, 2009:
  Connectedness of complete block designs under an interference model
- 5th Autumn Symposium of the Research Training Group „Statistical Modelling", Dortmund - Bommerholz, Niemcy, 2008 (referat zaproszony):
  On optimal circular designs under an interference model
- International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference LINSTAT'2008, Będlewo, Polska, 2008:
  On universal optimality of circular partially neighbor balanced designs under an interference model

- 17th International Workshop on Matrices and Statistics, Tomar, Portugalia, 2008:
  Connectivity properties of circular BIB designs under an interference model
- 56th Session of the International Statistical Institute ISI 2007, Lizbona, Portugalia, 2007:
  A-, D- and E-optimality of complete block designs under an interference model
- Conference Mat-Triad 2007, Będlewo, Polska, 2007:
  Some properties of information matrices of complete designs under an interference model
- 32 Konferencja „Statystyka Matematyczna", Wisła, Polska, 2006:
  Własności macierzy informacji układów optymalnych w modelu współoddziaływania
- International Conference on Interdisciplinary Mathematical and Statistical Techniques SCRA, Tomar, Portugalia, 2006:
  Some E-optimal designs under an interference model
- 15th International Workshop on Matrices and Statistics, Uppsala, Szwecja, 2006:
  Optimal designs under the polynomial growth curve models
- German-Polish Workshop for Young Researchers in Applied and Numerical Linear Algebra, Będlewo, Polska, 2006:
  Universal optimality of designs in a mixed interference model
- XXXI Konferencja „Statystyka Matematyczna", Wisła, Polska, 2005:
  Konstrukcja E-optymalnych, binarnych układów blokowych w modelu z efektami sąsiedztwa
- 35 International Biometrical Colloquium, Dymaczewo Nowe, Polska, 2005:
  E-optimal designs under an interference model
- 51. Biometrisches Kolloquium, Halle, Niemcy, 2005:
  On optimal property of circular neighbor balanced designs
- XXXIV International Biometrical Colloquium, Świnoujście, Polska, 2004:
  Some properties of cyclic designs under an interference model

- 13th International Workshop on Matrices and Statistics, Będlewo, Polska, 2004:
  On optimality of binary designs under interference models
- XXXIII International Biometrical Colloquium, Rajgród, Polska, 2003:
  Optimal and efficient designs for an interference model with correlated observations
- International Conference on Mathematical Statistics, StatLin'03, Będlewo, Polska, 2003:
  Optimality and efficiency of circular neighbor balanced designs for correlated observations
- XXVIII Konferencja „Statystyka Matematyczna", Wisła, Polska, 2002:
  Optymalność tablic ortogonalnych I-go typu w modelu ze skorelowanymi obserwacjami
- XXXII International Biometrical Colloquium, Krasnobród, Polska, 2002:
  Optimal designs for an interference model
- XXXI International Biometrical Colloquium, Skorzęcin, Polska, 2001:
  Optymalne układy blokowe w modelu liniowej wariancji

K. Filipiak