dr Janusz Migda
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Poznań, 28.12.2016 r.

Autoreferat

1. Imię i nazwisko

Janusz Migda

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

Stopień magistra:
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, 1978 r.
Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka teoretyczna

Stopień doktora nauk matematycznych:
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, 1987 r.
Tytuł rozprawy doktorskiej: *Włókniste reprezentcje C^*-algebr*

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

Miejsce pracy: Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
asystent stażysta: 1.02.1978 - 28.02.1979
asystent: 1.03.1979 - 30.09.1987
adiunkt: 1.10.1987 - 30.09.1996
starszy wykładowca: 1.10.1996 - do chwili obecnej

4. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art.16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art.16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl 9 prac zatytułowany

Asymptotyczne własności rozwiązań równań różnicowych

w skład którego wchodzą następujące publikacje [1]:

[H1] J. Migda, *Asymptotically polynomial solutions of difference equations*, Adv. Difference Equ. (2013), 2013:92, 1–16 (IF 0.634).

[H2] J. Migda, *Approximative solutions of difference equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2014), No. 13, 1–26 (IF 0.817).

[H3] J. Migda, *Approximative full solutions of difference equations*, Int. J. Difference Equ. (2014), 9, 111–121.

[H4] J. Migda, *Iterated remainder operator, tests for multiple convergence of series and solutions of difference equations*, Adv. Difference Equ. (2014), 2014:189, 1–18 (IF 0.64).

[H5] J. Migda, *Regional topology and approximative solutions of difference and differential equations*, Tatra Mt. Math. Publ. 63 (2015), 183—203.

[H6] J. Migda, *Qualitative approximation of solutions to difference equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2015), No. 32, 1–26 (IF 0.732).

[H7] J. Migda, *Mezocontinuous operators and solutions of difference equations* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2016), No. 11, 1–16 (IF 0.732).

[H8] J. Migda, *Approximative solutions to difference equations of neutral type*, Appl. Math. Comput. (2015), 268, 763—774 (IF 1.345).

[H9] J. Migda, *Asymptotically polynomial solutions to difference equations of neutral type*, Appl. Math. Comput. (2016), 279, 16–27 (IF 1.345).

[1] dla publikacji w czasopismach znajdujących się w bazie JCR z powodu niedostępności dla roku 2016 impact factor podany został za rok 2015

Spis treści

1 Wstęp

Powszechnie używane pojęcie asymptotycznej własności ciągu nie jest ściśle zdefiniowane, opiera się na intuicyjnym pojęciu asymptotycznej "bliskości" dwóch ciągów, które najczęściej oznacza zbieżność do zera różnicy tych ciągów. Jest jednak jasne, że jeśli

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad x_n - z_n = \frac{1}{2^n},$$

to ciągi x i z są asymptotycznie "bliższe" niż ciągi x i y. Intuicje te są analogiczne do intuicji związanych z "szybkością" zbieżności szeregów.

Badania w omawianym cyklu prac od początku były oparte na jednej idei, którą zwięźle choć nieprecyzyjnie można wyrazić następująco: badając asymptotyczne własności rozwiązań równań różnicowych należy poznać "asymptotyczne własności" iteracji Δ^m operatora różnicy Δ.

Np. należy zbadać w jaki sposób operatory Δ^m zmieniają asymptotyczną "bliskość" ciągów. Ponieważ są to operatory liniowe, więc to zagadnienie sprowadza się do badania zachowania się tych operatorów na różnych podprzestrzeniach przestrzeni ciągów zbieżnych do zera.

Innym aspektem tej idei jest badanie konsekwencji faktu, że dla danego ciągu x ciąg $\Delta^m x$ jest asymptotycznie "mały". Prowadzi to do badania różnych przestrzeni ciągów asymptotycznie wielomianowych tzn. ciągów asymptotycznie "bliskich" rozwiązaniom równania $\Delta^m x = 0$. Następnie, uzyskane wyniki mogą być zastosowane w badaniach asymptotycznie wielomianowych rozwiązań równań różnicowych. Badania takie zostały przeprowadzone np. w [H1], [H2] i [H4].

Realizacja powyższej idei doprowadziła do powstania nowej teorii badania asymptotycznych własności rozwiązań, można ją nazwać teorią jakościowej aproksymacji rozwiązań równań różnicowych. Teoria ta oparta jest na trzech podstawach.

(B1) systematyczne badanie iteracji r^m operatora reszt, które w istocie jest badaniem zachowania się operatora Δ^m na ciągach zbieżnych do zera.

(B2) zastosowanie asymptotycznych par różnicowych, które pozwala ocenić stopień aproksymacji rozwiązań.

(B3) wprowadzenie topologii regionalnej na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, które pozwala na zastosowanie, ogólniejszych niż zwykle stosowane, twierdzeń o punktach stałych (np. uogólnione tw. Schaudera lub Krasnosielskiego) do badania istnienia rozwiązań o zadanych własnościach asymptotycznych.

W badaniach asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych bardzo często pojawiają się wielokrotne sumy postaci

$$\sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} x_{i_m}. \tag{1}$$

Powód jest następujący. Niech Z oznacza przestrzeń wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera. Ponieważ $Z \cap \operatorname{Ker} \Delta^m = 0$, więc operator

$$\Delta^m | Z : Z \to \Delta^m(Z)$$

jest bijekcją. Ponadto, jeśli $x \in \Delta^m(Z)$, to suma (1) jest zbieżna i możemy określić odwzorowanie

$$r^m : \Delta^m(Z) \to Z, \qquad r^m(x)(n) = \sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} x_{i_m}.$$

Wtedy r^m (operator reszt rzędu m) jest operatorem liniowym takim, że operator $(-1)^m r^m$ jest odwrotny do $\Delta^m|Z$. Wobec tego dla każdego $x \in \Delta^m(Z)$ spełniona jest równość

$$\Delta^m((-1)^m r^m(x)) = x. \tag{2}$$

Równość ta gra zasadniczą rolę w zastosowaniach twierdzeń o punktach stałych do badania asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych. W pracach innych autorów jest ona stosowana niejawnie: w miejsce operatora r^m używane są sumy (1) lub wręcz stosowana jest tzw. metoda wielokrotnego sumowania, patrz np. [53], [61], [63], [65], [74], [111].

Posługując się sumami (1) trudno jest zbadać własności operatora reszt. Np. trudno wykazać prawdziwość implikacji:

$$\text{jeśli} \quad s \in (-\infty, 0] \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-s-1}|a_n| < \infty, \quad \text{to} \quad r^m(a)(n) = \mathrm{o}(n^s),$$

która stanowi podstawę dowodzenia istnienia rozwiązań asymptotycznie "bliskich" np. ciągom wielomianowym, przy czym asymptotyczna "bliskość" ciągów jest w tym przypadku określona przez relację

$$x_n - y_n = \mathrm{o}(n^s).$$

Operator reszt r^m jako narzędzie badania asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych pojawia się "explicite" po raz pierwszy w pracy [20]. Podstawowe własności tego operatora przedstawione są w pracach [H2], [H4] i [20].

Pary asymptotyczne zostały wprowadzone w pracy [H6]. Pomysł zdefiniowania pary asymptotycznej był efektem porównania wyników z prac: [H1], [H2], [H4] i [12]. Idea tego pojęcia jest stosunkowo prosta. Jeśli x jest rozwiązaniem równania

$$\Delta^m x_n = a_n F(x)(n) + b_n, \quad F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \tag{3}$$

takim, że ciąg $F(x)$ jest ograniczony i ciąg a jest asymptotycznie "mały", to ciągi $\Delta^m x$ i b są asymptotycznie "bliskie", wobec tego ciąg x i zbiór

$$\Delta^{-m} b = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \Delta^m y = b\}$$

są położone asymptotycznie "blisko" siebie. To oznacza, że

$$x \in \Delta^{-m} b + Z, \tag{4}$$

gdzie Z jest pewną przestrzenią asymptotycznie "małych" ciągów. Dokładniej, załóżmy że (A, Z) jest parą liniowych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ taką, że $A \subset \Delta^m Z$ i $ua \in A$ dla każdego ograniczonego ciągu u i każdego $a \in A$. Jeśli $a \in A$ i x jest rozwiązaniem równania (3) takim, że ciąg $u = F(x)$ jest ograniczony, to

$$\Delta^m x = au + b \in A + b \subset \Delta^m Z + b.$$

Stąd $\Delta^m x = \Delta^m z + b$ dla pewnego $z \in Z$ i otrzymujemy $\Delta^m(x - z) = b$. Wobec tego $x - z \in \Delta^{-m} b$, skąd wynika (4). Jeśli Z spełnia jeszcze pewien naturalny warunek "asymptotycznej stabilności", to parę (A, Z) nazywamy asymptotyczną parą różnicową rzędu m lub, w skrócie, m-parą.

Dla udowodnienia istnienia rozwiązań równań różnicowych o zadanych własnościach asymptotycznych zwykle stosuje się różne twierdzenia o punktach stałych. Jednym z najczęściej stosowanych jest twierdzenie Schaudera

Twierdzenie Schaudera A. *Jeśli Q jest zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha, to każde ciągłe odwzorowanie $H : Q \to Q$ ma punkt stały.*

Dla równań postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(n, x_n) + b_n$$

zwykle poszukujemy rozwiązań asymptotycznie bliskich rozwiązaniom równania $\Delta^m y_n = b_n$. Wybieramy ciąg y taki, że $\Delta^m y = b$, odpowiednio dobieramy zbieżny do zera ciąg ρ i tworzymy zbiór

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n - y_n| \leq |\rho_n| \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ponadto, na bazie operatora r^m tworzymy ciągły operator $H : S \to S$, stosujemy tw. Schaudera i otrzymujemy rozwiązanie należące do zbioru S, a więc asymptotycznie bliskie ciągowi y. Stopień tej "bliskości" określa wybrany ciąg ρ.

Opisana idea dobrze działa w przypadku, gdy ciąg y jest ograniczony. Wtedy S jest zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha ciągów ograniczonych z normą "sup".
Jeśli y jest nieograniczony, to S nie jest podzbiorem żadnej naturalnie określonej przestrzeni Banacha i powstaje problem. Rozwiązanie wydaje się być całkiem proste i naturalne. W przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ możemy zastosować translację o wektor $-y$. Otrzymujemy wtedy zbiór $S-y$, który jest zwarty w przestrzeni ciągów ograniczonych. Ponadto jest wypukły, bo translacja zachowuje wypukłość. Do zbioru $S-y$ możemy zastosować tw. Schaudera, a potem otrzymany punkt stały za pomocą odwrotnej translacji o wektor y przenieść do S. Idea ta została zastosowana w kilku pracach autora, np. w [H1-H4], ale nie jest stosowana przez innych autorów.

Sytuacja jest bardziej skomplikowana w przypadku ciągłym (tzn. w przypadku równań różniczkowych) lub w przypdku równań różnicowych typu neutralnego. W przypadku ciągłym (dla ograniczonej funkcji y) odpowiednik zbioru S nie musi być zwarty i wtedy stosuje się następującą ogólniejszą wersję twierdzenia Schaudera:

Twierdzenie Schaudera B. *Jeśli Q jest domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha, to każde ciągłe odwzorowanie $H : Q \to Q$ takie, że obraz HQ jest całkowicie ograniczony ma punkt stały.*

Ta wersja jest nieco trudniejsza do przeniesienia na przypadek nieograniczonej funkcji y. Rozwiązanie tego problemu zostało zaproponowane w pracy [H5], w której przedstawiono pojęcie normy regionalnej i topologii regionalnej oraz udowodniono ogólniejszą wersję powyższego twierdzenia Schaudera, którą można stosować w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych, a także w przestrzeni wszystkich ciągów.

W przypadku równań typu neutralnego w badaniach istnienia rozwiązań o zadanych własnościach asymptotycznych stosowane jest często twierdzenie Krasnosielskiego odnoszące się, tak jak twierdzenie Schaudera, do podzbiorów zwyczajnych przestrzeni Banacha. To twierdzenie również nie działa w przypadku rozwiązań nieograniczonych. W pracy [H8] udowodniono "regionalną" wersję twierdzenia Krasnosielskiego i zastosowano do badania asymptotycznych własności rozwiązań, także nieograniczonych, równań różnicowych typu neutralnego.

Pierwszym wynikiem teorii jakościowej aproksymacji rozwiązań równań różnicowych jest twierdzenie [H1,Theorem 2.1], które można sformułować następująco.

$$\textit{Jeśli}\quad m \in \mathbb{N}, \quad s \in (-\infty, m-1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-s-1}|a_n| < \infty \quad i \quad \Delta^m x_n = \mathrm{O}(a_n),$$

to istnieje ciąg wielomianowy φ *taki, że* $\deg \varphi < m$ *i* $x_n = \varphi(n) + \mathrm{o}(n^s)$.

Stąd bezpośrednio wynika, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-s-1}|a_n| < \infty$, to każde rozwiązanie x równania $\Delta^m x_n = a_n f(x_n)$ takie, że ciąg $(f(x_n))$ jest ograniczony można aproksymować z "dokładnością" do $\mathrm{o}(n^s)$ ciągami wielomianowymi. Ta konstatacja i wyniki z pracy [86], w której O. G. Mustafa i Y. V. Rogovchenko przedstawili warunki wystarczające na to, aby istniało rozwiązanie x równania różniczkowego $x''(t) = f(t, x)$ takie, że

$$x(t) = at + \mathrm{o}(t^d), \quad t \to \infty, \quad a \in \mathbb{R}, \quad d \in (0, 1)$$

były motywacją powstania teorii jakościowej aproksymacji rozwiązań. W pierwszym etapie z "dokładnością" do $\mathrm{o}(n^s)$.

Naturalne jest pytanie: czy nowa teoria badania asymptotycznych własności rozwiązań zwyczajnych równań różnicowych może być zastosowana do badania rozwiązań równań ogólniejszych lub analogicznych (np. różniczkowych) ?

Badania takich zastosowań zostały przeprowadzone, na razie w bardzo ograniczonym zakresie, w kilku dziedzinach, np. wspomniane równania typu neutralnego były badane w pracach [H8] i [H9], równania Volterry w [23] i [22], równania abstrakcyjne w [H7] i równania różniczkowe w [H5].

Poza wymienionymi powyżej elementami nowej teorii badania asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych i uogólnionymi twierdzeniami o punktach stałych istotny wkład autora w omawianą tematykę polegał na przedstawieniu kilkunastu nowych idei i wyników. Najważniejszymi z nich są:

(1) idea aproksymacji zbioru rozwiązań (paragrafy 3.3 i 3.4),

(2) idea aproksymatywnych p-rozwiązań (punkt 3.1.4),

(3) mezociągłość operatorów (paragraf 3.4),

(4) kryteria wielokrotnej zbieżności szeregów (paragraf 3.8),

(5) idea fundamentalnego równania typu neutralnego (paragraf 3.5),

(6) aproksymacja rozwiązań równań typu neutralnego ciągami wielomianowymi (paragraf 3.5),

(7) przykład równania postaci $\Delta x_n = a_n f(x_n)$ pokazujący, że ciągłość funkcji f w punkcie b nie wystarcza do istnienia rozwiązania zbieżnego do b (paragraf 4.4).

2 Oznaczenia, terminologia i konwencje

Używamy standardowych oznaczeń podstawowych zbiorów liczbowych. Symbole $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ oznaczają odpowiednio: zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb całkowitych dodatnich, zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb wymiernych. Jeśli $p, k \in \mathbb{Z}$, $p \le k$, to

$$\mathbb{N}_p = \{p, p+1, \dots\}, \qquad \mathbb{N}_p^k = \mathbb{N}(p, k) = \{p, p+1, \dots, k\}.$$

Zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oznaczamy symbolem

$$\mathrm{SQ}.$$

Jeśli $x, y \in \mathrm{SQ}$, $A, B \subset \mathrm{SQ}$, to ciągi xy, $|x|$ i zbiór AB są określone wzorami

$$xy(n) = x_n y_n, \qquad |x|(n) = |x_n|, \qquad AB = \{ab : a \in A,\, b \in B\}.$$

Symbol Δ oznacza operator różnicowania zwany powszechnie operatorem różnicy. Jest on zdefiniowany następująco

$$\Delta : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}, \qquad \Delta(x)(n) = x_{n+1} - x_n.$$

Stosujemy też ogólnie przyjęte oznaczenie wartości $\Delta(x)(n)$ jako

$$\Delta x_n.$$

Podobnie, dla $m, n \in \mathbb{N}$, wartość $\Delta^m(x)(n)$ oznaczamy symbolem $\Delta^m x_n$.

Niech $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathrm{SQ}$ i $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Większość głównych wyników cyklu prac dotyczy asymptotycznych własności rozwiązań autonomicznych równań różnicowych postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(x_{\sigma(n)}) + b_n, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{AE}$$

lub nieautonomicznych równań postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(n, x_{\sigma(n)}) + b_n, \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{E}$$

Niech $p \in \mathbb{N}$. Ciąg $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywamy **p-rozwiązaniem** równania (E) jeśli równość (E) jest spełniona dla każdego $n \geq p$. Jeśli x jest p-rozwiązaniem dla każdego $p \in \mathbb{N}$, to mówimy, że jest **pełnym rozwiązaniem**. Ciąg x nazywamy **rozwiązaniem** lub **rozwiązaniem uogólnionym** równania (E) jeśli jest p-rozwiązaniem dla pewnego $p \in \mathbb{N}$. Analogiczną terminologię stosujemy także w przypadku równań innej postaci. Następujące symbole

$$\mathrm{Sol(E)}, \qquad \mathrm{Sol}_p\mathrm{(E)}, \qquad \mathrm{Sol}_\infty\mathrm{(E)}$$

oznaczają odpowiednio: zbiór pełnych rozwiązań, zbiór p-rozwiązań i zbiór rozwiązań uogólnionych równania (E). Zauważmy, że jeśli $p \in \mathbb{N}$, to

$$\mathrm{Sol(E)} = \mathrm{Sol}_1\mathrm{(E)} \subset \mathrm{Sol}_p\mathrm{(E)} \subset \mathrm{Sol}_\infty\mathrm{(E)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Sol}_k\mathrm{(E)}.$$

Rozwiązanie x równania (AE) nazywamy **f-ograniczonym** jeśli ciąg $(y_n) = f(x_{\sigma(n)})$ jest ograniczony. Podobnie, rozwiązanie x równania (E) nazywamy **f-ograniczonym** jeśli ciąg $(y_n) = (f(n, x_{\sigma(n)}))$ jest ograniczony. Dla $b \in \mathrm{SQ}$, $X \subset \mathrm{SQ}$ i $k \in \mathbb{N}_0$ określamy

$$\Delta^{-k} b = \{y \in \mathrm{SQ} :\ \Delta^k y = b\}, \qquad \Delta^{-k} X = \{y \in \mathrm{SQ} :\ \Delta^k y \in X\},$$

$$\mathrm{Pol}(k-1) = \Delta^{-k} 0 = \mathrm{Ker}\, \Delta^k = \{x \in \mathrm{SQ} : \Delta^k x = 0\}.$$

$\mathrm{Pol}(k-1)$ jest przestrzenią ciągów wielomianowych stopnia mniejszego niż k.

Aproksymatywnym rozwiązaniem danego równania nazywamy ciąg y, dla którego istnieje rozwiązanie x tego równania takie, że ciąg $y - x$ jest asymptotycznie "mały". Aproksymatywnych rozwiązań równania (E) poszukujemy najczęściej w zbiorze $\Delta^{-m} b$ lub, jeśli ciąg b jest "asymptotycznie mały", w zbiorze $\mathrm{Pol}(m-1) = \Delta^{-m}0$.

Zagadnieniem **aproksymacji rozwiązań** danego równania nazywamy problem wykazania, że rozwiązania posiadające pewną ustaloną własność mogą być przybliżane ciągami z pewnego ustalonego zbioru ciągów. Typowym przykładem takiego zagadnienia jest problem wykazania, że każde nieoscylujące rozwiązanie jest asymptotycznie wielomianowe albo, że każde rozwiązanie ograniczone jest zbieżne. Rozwiązania równań postaci (E) najczęściej przybliżamy ciągami ze zbioru $\Delta^{-m}b$ lub, jeśli ciąg b jest dostatecznie "asymptotycznie mały", ciągami wielomianowymi.

Niech $p \in \mathbb{N}$. Określamy

$$\mathrm{Fin}(p) = \{x \in \mathrm{SQ} : x_n = 0 \text{ dla } n \geq p\}, \qquad \mathrm{Fin} = \mathrm{Fin}(\infty) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathrm{Fin}(p).$$

Zauważmy, że $\mathrm{Fin}(p)$ jest liniową podprzestrzenią przestrzeni SQ i

$$0 = \mathrm{Fin}(1) \subset \mathrm{Fin}(2) \subset \mathrm{Fin}(3) \subset \cdots \subset \mathrm{Fin}(\infty).$$

Używamy symboli "duże O" i "małe o" w zwykłym sensie, ale dla ciągu $a \in \mathrm{SQ}$ traktujemy $\mathrm{o}(a)$ i $\mathrm{O}(a)$ także jako podprzestrzenie przestrzeni SQ. Dokładniej, niech

$$\mathrm{o}(1) = \{x \in \mathrm{SQ} : \ x \text{ jest zbieżny do zera}\}, \quad \mathrm{O}(1) = \{x \in \mathrm{SQ} : \ x \text{ jest ograniczony}\},$$

$$\mathrm{o}(a) = a\mathrm{o}(1) + \mathrm{Fin} = \{ax : \ x \in \mathrm{o}(1)\} + \mathrm{Fin},$$

$$\mathrm{O}(a) = a\mathrm{O}(1) + \mathrm{Fin} = \{ax : \ x \in \mathrm{O}(1)\} + \mathrm{Fin}.$$

Notacja ta nie prowadzi do nieporozumień, bo po pierwsze w tradycyjnej konwencji używamy znaku $=$ natomiast w nowej znaku $\in$, a po drugie napisy

$$x_n = \mathrm{o}(a_n) \quad \text{i} \quad x \in \mathrm{o}(a)$$

w praktyce oznaczają to samo. Ponadto, określamy

$$\mathrm{o}(n^{-\infty}) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathrm{o}(n^s) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{o}(n^{-k}), \qquad \mathrm{O}(n^{\infty}) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathrm{O}(n^s) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{O}(n^k).$$

Zauważmy, że jeśli $a_n \neq 0$ dla każdego n, to

$$\mathrm{o}(a) = a\mathrm{o}(1), \qquad \mathrm{O}(a) = a\mathrm{O}(1).$$

Korzyść z traktowania $\mathrm{o}(a)$ i $\mathrm{O}(a)$ jako zbiorów jest taka, że nie potrzebujemy nowych oznaczeń dla tych bardzo ważnych i często używanych, w omawianej teorii, zbiorów. Natomiast korzyści z używania zbiorów $\mathrm{o}(a)$ i $\mathrm{O}(a)$ są wielorakie. Np. użycie tych zbiorów pozwala na doprecyzowanie różnych pojęć dotychczas stosowanych intuicyjnie co może prowadzić do nieporozumień, a także pewnych nadużyć. Przykład takiego nadużycia będzie opisany na końcu punktu 3.1.1. Stosowanie zbiorów $\mathrm{o}(a)$ daje też możliwość zapisania pewnych tez w postaci inkluzji. W badaniach autora pozwoliło to na dostrzeżenie związku między dwoma głównymi nurtami badań asymptotycznych własności rozwiązań, mianowicie, między problemem aproksymacji rozwiązań i problemem rozwiązań aproksymatywnych. Zaowocowało to powstaniem wyników całkiem nowego typu łączących oba te nurty. Przedstawione one będą w paragrafach 3.3 i 3.4.

Dla podzbioru A przestrzeni metrycznej X i $\varepsilon > 0$ określamy ε-**obramowane wnętrze** zbioru A wzorem
$$\mathrm{Int}(A, \varepsilon) = \{x \in X : \overline{\mathrm{B}}(x, \varepsilon) \subset A\},$$
gdzie $\overline{\mathrm{B}}(x, \varepsilon)$ oznacza kulę domkniętą o środku w punkcie x i promieniu ε. Mówimy, że podzbiór U przestrzeni X jest **jednostajnym otoczeniem** podzbioru Z przestrzeni X, jeśli istnieje liczba dodatnia ε taka, że $Z \subset \mathrm{Int}(U, \varepsilon)$.

Mówimy, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **nieograniczona w punkcie** $p \in [-\infty, \infty]$ jeśli istnieje ciąg $x \in \mathrm{SQ}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ i ciąg $g \circ x$ jest nieograniczony. Jeśli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathrm{SQ}$, to
$$\mathrm{U}(g) = \{p \in [-\infty, \infty] : \ g \text{ jest nieograniczona w punkcie } p\},$$
$$\mathrm{L}(x) = \{p \in [-\infty, \infty] : \ p \text{ jest punktem skupienia ciągu } x\}.$$
Jeśli Z jest liniową podprzestrzenią przestrzeni liniowej X, to podzbiór W przestrzeni X nazywamy Z-**niezmienniczym** jeśli $Z + W \subset W$.

2.1 Operator reszt i ciągi wielokrotnie sumowalne

Niech $m \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathrm{S}(m)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów $a \in \mathrm{SQ}$ takich, że szereg
$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} a_{i_m}$$
jest zbieżny. Ciągi $a \in \mathrm{S}(m)$ nazywamy m-**krotnie sumowalnymi**. Dla każdego $a \in \mathrm{S}(m)$ określamy ciąg $r^m(a)$ wzorem
$$r^m(a)(n) = \sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} a_{i_m}.$$
$\mathrm{S}(m)$ jest liniową podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{o}(1)$, $r^m(a) \in \mathrm{o}(1)$ dla każdego $a \in \mathrm{S}(m)$ i $r^m : \mathrm{S}(m) \to \mathrm{o}(1)$ jest operatorem liniowym. Operator ten nazywamy operatorem reszt rzędu m. Wartość $r^m(a)(n)$ oznaczamy też symbolem $r_n^m(a)$ lub $r_n^m a$. Niech $t \in [1, \infty)$. Określamy
$$\mathrm{A}(t) := \{a \in \mathrm{SQ} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1}|a_n| < \infty\}, \qquad \mathrm{A}(\infty) = \bigcap_{t\in[1,\infty)} \mathrm{A}(t) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}(k).$$
$\mathrm{A}(t)$ jest liniową podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{o}(1)$ taką, że $\mathrm{O}(1)\mathrm{A}(t) \subset \mathrm{A}(t)$. Jeśli $1 \le t \le s$, to $\mathrm{A}(\infty) \subset \mathrm{A}(s) \subset \mathrm{A}(t) \subset \mathrm{A}(1)$.

2.2 Asymptotyczne pary różnicowe

Niech $m \in \mathbb{N}$. Mówimy, że para (A, Z) liniowych podprzestrzeni przestrzeni SQ jest **asymptotyczną parą różnicową** rzędu m lub, w skrócie, m-**parą** jeśli
$$\mathrm{Fin} + Z \subset Z, \quad \mathrm{O}(1)A \subset A, \quad A \subset \Delta^m Z.$$
Mówimy, że m-para (A, Z) jest **zanikająca** jeśli $Z \subset \mathrm{o}(1)$. Warunek $\mathrm{Fin} + Z \subset Z$ nazwany we Wstępie "asymptotyczną stabilnością", bardzo ważny i całkiem naturalny z punktu widzenia asymptotycznych własności ciągów, jest równoważny z warunkiem:
$$\text{jeśli} \quad z \in Z, \quad y \in \mathrm{SQ} \quad \text{i} \quad y_n = z_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n, \text{ to } y \in Z.$$
Najważniejszymi przykładami m-par są $(\mathrm{A}(m), \mathrm{o}(1))$ i $(\mathrm{A}(m-s), \mathrm{o}(n^s))$, $s \in (-\infty, 0]$.

2.3 Topologia regionalna

Niech X oznacza rzeczywistą przestrzeń wektorową. Mówimy, że funkcja

$$\| \cdot \| : X \to [0, \infty]$$

jest **normą regionalną** jeśli warunek $\|x\| = 0$ jest równoważny z $x = 0$ i dla dowolnych $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Norma regionalna jest więc pojęciem ogólniejszym od zwykłej normy (różnica polega na tym, że może przyjąć wartość ∞). Jeśli dana jest norma regionalna na X, to mówimy, że X jest **regionalną przestrzenią unormowaną**.

Zakładamy, że X jest regionalną przestrzenią unormowaną. Mówimy, że podzbiór Z przestrzeni X jest **zwyczajny** jeśli $\|x - y\| < \infty$ dla dowolnych $x, y \in Z$. Każdy zwyczajny podzbiór Z przestrzeni X traktujemy jako przestrzeń metryczną z metryką określoną wzorem

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{5}$$

Mówimy, że podzbiór U przestrzeni X jest **regionalnie otwarty** jeśli $U \cap Z$ jest otwarty w Z dla każdego zwyczajnego podzbioru Z przestrzeni X. Rodzina wszystkich regionalnie otwartych podzbiorów przestrzeni X jest topologią na X którą nazywamy **topologią regionalną**. Każdy podzbiór przestrzeni X traktujemy jako przestrzeń topologiczną z topologią indukowaną z topologii regionalnej. Niech

$$\mathrm{Reg}(0) = \{x \in X : \ \|x\| < \infty\}.$$

Oczywiście $\mathrm{Reg}(0)$ jest liniową podprzestrzenią przestrzeni X. Ponadto, norma regionalna określa zwykłą normę na $\mathrm{Reg}(0)$. Mówimy, że X jest **regionalną przestrzenią Banacha** jeśli przestrzeń $\mathrm{Reg}(0)$ jest zupełna. Niech $x \in X$. Mówimy, że zbiór

$$\mathrm{Reg}(x) = x + \mathrm{Reg}(0)$$

jest **regionem** punktu x. Jeśli $y \in X$ i $\|x - y\| < \infty$, to $\mathrm{Reg}(x) = \mathrm{Reg}(y)$. Każdy region jest zwyczajny i otwarty w X. Ponadto, każdy region jest spójny i jest metrycznie równoważny z przestrzenią unormowaną $\mathrm{Reg}(0)$. Z topologicznego punktu widzenia, przestrzeń X jest rozłączną sumą wszystkich regionów. Jeśli Y oznacza jakąkolwiek liniową podprzestrzeń przestrzeni X dopełniającą do $\mathrm{Reg}(0)$, to topologia regionalna indukuje topologię dyskretną na Y i X jest topologicznie równoważna z iloczynem kartezjańskim $Y \times \mathrm{Reg}(0)$. Zauważmy, że jeśli $x \in X$, to region $\mathrm{Reg}(x)$ jest zwyczajną składową punktu x i jest spójną składową tego punktu. Dlatego każdy zwyczajny podzbiór przestrzeni X jest zawarty w pewnym regionie, i każdy spójny podzbiór przestrzeni X jest zwyczajny.

2.4 Konwencje

Literą m oznaczamy zazwyczaj ustaloną liczbę naturalną, wyjątki będą wyraźnie zaznaczone.

Literą n oznaczamy zmienną naturalną, a literą t zmienną rzeczywistą.

Symbolem σ oznaczamy ciąg $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taki, że $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(n) = \infty$.

Literą g oznaczamy funkcję $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$.

Niech $w \in \mathrm{SQ}$. Funkcję $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy (g, w)**-ograniczoną** jeśli

$$|f(n,t)| \le g(|tw_n|) \quad \text{dla wszystkich} \quad (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}.$$

Niekiedy stosujemy konwencję "opuszczonego nawiasu" i "opuszczonego kwantyfikatora". Np. symbol $\Delta^m x_n$ oznacza wartość $\Delta^m(x)(n) = (\Delta^m(x))_n$, a symbol HQ oznacza obraz $H(Q)$ zbioru Q względem odwzorowania H. Podobnie fraza "dla $t > 2$" znaczy to samo co "dla każdego $t > 2$", a fraza "dla dużych n" jest równoważna frazie "dla wszystkich dużych n" czyli "dla prawie wszystkich n".

Jeśli $k \in \mathbb{N}$, to zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^k$ traktujemy zawsze jako metryczną podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{k+1}$.

W przestrzeni SQ określamy naturalną normę regionalną wzorem

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Każdy podzbiór przestrzeni SQ traktujemy jako przestrzeń topologiczną z topologią indukowaną przez topologię regionalną, a każdy zwyczajny podzbiór przestrzeni SQ traktujemy jako przestrzeń metryczną z metryką określoną wzorem $d(x, y) = \|x - y\|$.

3 Omówienie głównych wyników jednotematycznego cyklu publikacji

W badaniach asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych główną rolę grają dwa zagadnienia: problem istnienia rozwiązań o z góry zadanych własnościach asymptotycznych i problem aproksymacji rozwiązań. Pierwsze zagadnienie jest też nazywane problemem aproksymatywnych rozwiązań. Wynika to stąd, że jeśli x jest rozwiązaniem danego równania a y jest takim ciągiem, że ciąg

$$x - y$$

jest "asymptotycznie mały", to y jest aproksymatywnym rozwiązaniem, a x jest rozwiązaniem, które ma własności asymptotyczne "podobne" do własności ciągu y. Stopień tego "podobieństwa" określa "podobieństwo" ciągu $x - y$ do ciągu zerowego.

Wyniki dotyczące problemu aproksymatwnych rozwiązań są przedstawione w paragrafie 3.1 podzielonym, ze względu na obszerność tematyki, na pięć punktów.

W paragrafie 3.2 przedstawione są wyniki dotyczące aproksymacji rozwiązań.

Następnie w paragrafie 3.3 zatytułowanym "Aproksymacja zbioru rozwiązań" przedstawione są twierdzenia nowego typu nie występujące w pracach innych autorów. Dotyczą one jednocześnie problemu aproksymatywnych rozwiązań i problemu aproksymacji rozwiązań i pozwalają "obliczyć" zbór wszystkich rozwiązań lub pewne jego części "modulo" pewna przestrzeń Z złożona z ciągów "asymptotycznie małych".

W paragrafie 3.4 przedstawione są wyniki z pracy [H7], która jest próbą uogólnienie wcześniejszych wyników na równania postaci

$$\Delta^m x_n = a_n F(x)(n) + b_n, \qquad F : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ} \tag{6}$$

zwane abstrakcyjnymi. Traktowane są one jako bezpośrednie uogólnienie równań postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(n, x_{\sigma_1(n)}, \ldots, x_{\sigma_k(n)}) + b_n, \quad f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad \sigma_1, \ldots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}. \tag{7}$$

Wprowadzono pojęcie mezociągłości operatora F i wykazano, że jest to naturalny odpowiednik zwykłej ciągłości funkcji f z równania (7). Następnie zastosowano uogólnione twierdzenie Schaudera i teorię asymptotycznych par różnicowych i otrzymano daleko idące uogólnienia niektórych wcześniejszych rezultatów.

W paragrafie 3.5 przedstawione są wyniki z prac [H8] i [H9] poświęconych rozwiązaniom równań typu neutralnego. W pracy [H8] przedstawiono nową metodę poszukiwania rozwiązań aproksymatywnych. Jest ona oparta na na użyciu rozwiązań tzw. "fundamentalnego równania typu neutralnego" i zastosowaniu regionalnej wersji twierdzenia Krasnosielskiego o punkcie stałym. Praca [H9] jest poświęcona problemowi aproksymacji rozwiązań równań typu neutralnego, a dokładniej wyznaczeniu warunków, przy których wszystkie lub wszystkie nieoscylujące rozwiązania są asymptotycznie wielomianowe. Uzyskane wyniki znacznie uogólniają znane rezultaty.

W paragrafie 3.8 przedstawiono kilka uogólnień klasycznych kryteriów bezwzględnej zbieżności szeregów. Zostały one odkryte przy okazji badań nad zastosowaniami asymptotycznych par różnicowych. Kryteria te dają odpowiedź na pytanie czy dany ciąg a jest elementem przestrzeni $\mathrm{A}(m)$. W przypadku $m = 1$ jest to pytanie o bezwględną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Założenie $a \in \mathrm{A}(m)$ zwykle zapisywane w formie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}|a_n| < \infty$ występuje prawie we wszystkich twierdzeniach dotyczących własności asymptotycznych rozwiązań równań różnicowych rzędu m. Również w pracach innych autorów. Dlatego kryteria pozwalające stwierdzić, czy założenie to jest spełnione są ważne.

W paragrafie 3.6 omówione są podstawowe własności operatora reszt. Korzystajac z tych własności przedstawiono też diagram ilustrujacy strukturę przestrzeni ciągów zbieżnych do zera. Analiza tego diagramu prowadzi do odkrycia par asymptotycznych nowego typu.

W paragrafie 3.7 przedstawione są regionalne wersje twierdzeń Schaudera, Krasnosielskiego i Ascoliego. Uogólnione twierdzenie Ascoliego było potrzebne w pracy [H5] do zastosowania regionalnej wersji twierdzenia Schaudera w badaniach asymptotycznych własności rozwiązań równań różniczkowych.

Ostatni paragraf 3.9 zawiera pewne wyniki z pracy [H5] dotyczące równań różniczkowych analogiczne do uzyskanych równolegle wyników dotyczących równań różnicowych.

3.1 Rozwiązania aproksymatywne

Dla udowodnienia, że dany ciąg y jest aproksymatywnym rozwiązaniem zwykle stosuje się różne twierdzenia o punktach stałych, sposób postępowania jest analogiczny do opisanego we Wstępie zastosowania twierdzenia Schaudera. Otrzymujemy wtedy punkt stały x pewnego operatora, który jest tak dobrany, że jego punkty stałe są rozwiązaniami danego równania. Dla równań postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(n, x_{\sigma(n)}) + b_n,$$

przy założeniu, że $a \in \mathrm{A}(m)$ różnica $x - y$ jest wtedy "rzędu" $r^m(a)$. Powszechnie wiadomo, że $r^m(a) \in \mathrm{o}(1)$ i wobec tego zwykle otrzymuje się twierdzenia typu:

$$\text{"istnieje rozwiązanie } x \text{ takie, że } x_n - y_n = \mathrm{o}(1)\text{"},$$

np. [19, Theorem 1], [46, Theorem 1], [47, Theorem 1] lub [101, Theorem 2.1]. Posługując się implikacją

$$\text{jeśli} \quad s \in (-\infty, 0] \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-s-1}|a_n| < \infty, \quad \text{to} \quad r^m(a)(n) = \mathrm{o}(n^s),$$

autor uzyskał wyniki typu "istnieje rozwiązanie x takie, że $x_n - y_n = \mathrm{o}(n^s)$", a później przy założeniu, że (A, Z) jest zanikającą asymptotyczną m-parą i $a \in A$ wyniki typu

"istnieje rozwiązanie x takie, że $x - y \in Z$".

Wprowadzony parametr s, a jeszcze bardziej przestrzeń Z pozwalają kontrolować stopień aproksymacji rozwiązania.
Najważniejszą klasą rozwiązań aproksymatywnych są rozwiązania asymptotycznie wielomianowe. Ponieważ samo pojęcie ciągu asymptotycznie wielomianowego jest w znanej literaturze niedoprecyzowane i niedostatecznie zbadane więc najpierw przedstawione będą wyniki dotyczące ciągów asymptotycznie wielomianowych.

3.1.1 Ciągi asymptotycznie wielomianowe

Termin ciąg asymptotycznie wielomianowy jest przez różnych autorów interpretowany na różne sposoby, co bywa źródłem nieporozumień, a nawet pewnych nadużyć. Dla uściślenia języka, na użytek niniejszego opracowania wprowadźmy następującą terminologię. Niech $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0^m$, ciągiem asymptotycznie wielomianowym typu (m, k) nazywamy element przestrzeni

$$\mathrm{P}(m, k) = \mathrm{Pol}(m) + \mathrm{o}(n^k),$$

a regularnym ciągiem asymptotycznie wielomianowym typu (m, k) element przestrzeni

$$\mathrm{D}(m, k) = \mathrm{Pol}(m) + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1).$$

Podstawowym narzędziem badania ciągów asymptotycznie wielomianowych jest następujący lemat.

Lemat 1. [H2, Lemma 3.1] *Niech* $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0^m$ *i* $x \in \mathrm{SQ}$. *Wtedy*

(*a*) $\Delta^m x \in \Delta^k \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \Delta^{k-m}\mathrm{o}(1)$.

(*b*) $x \in \Delta^{-m}\mathrm{o}(1) \Leftrightarrow \Delta^p x \in \mathrm{o}(n^{m-p})$ *dla każdego* $p \in \mathbb{N}_0^m$.

(*c*) $\mathrm{Pol}(m-1) \subset \Delta^{-m}\mathrm{o}(1) \subset \mathrm{o}(n^m)$.

Z [H2, Remark 3.6] wynika, że możemy narysować diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{P}(m,0) & \longrightarrow & \mathrm{P}(m,1) & \longrightarrow & \mathrm{P}(m,2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{P}(m,m) \\
\| & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{D}(m,0) & \longrightarrow & \mathrm{D}(m,1) & \longrightarrow & \mathrm{D}(m,2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{D}(m,m)
\end{array}$$

w którym strzałki oznaczają inkluzje właściwe. Przestrzenie $\mathrm{P}(m, k)$ i $\mathrm{D}(m, k)$ są opisane w następujących dwóch lematach.

Lemat 2. [H2, Lemma 3.4] *Jeśli* $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0^m$ *i* $x \in \mathrm{SQ}$, *to* $x \in \mathrm{P}(m, k)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe* $c_m, \dots, c_k$ *i ciąg* $w \in \mathrm{o}(n^k)$ *takie, że*

$$x_n = c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_k n^k + w_n.$$

Stałe $c_m, \dots, c_k$ *i ciąg* w *są określone jednoznacznie.*

Lemat 3. [H2, Lemma 3.5] *Jeśli* $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0^m$ *i* $x \in \mathrm{SQ}$, $x \in \mathrm{D}(m,k)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe* $c_m, \dots, c_k$ *i ciąg* $w \in \mathrm{o}(n^k)$ *takie, że*

$$x_n = c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \cdots + c_k n^k + w_n$$

i $\Delta^p w_n \in \mathrm{o}(n^{k-p})$ *dla każdego* $p \in \mathbb{N}_0^k$.

Elementy przestrzeni $\mathrm{D}(m-1,k) = \mathrm{Pol}(m-1) + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)$ można też opisać następująco.

Lemat 4. [H2, Lemma 3.7] *Jeśli* $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0^m$ *i* $z \in \mathrm{SQ}$, *to następujące warunki są równoważne:*

(1) $z \in \mathrm{Pol}(m-1) + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)$,

(2) $\Delta^m z \in \Delta^{m-k}\mathrm{o}(1)$,

(3) $\Delta^k z \in \mathrm{Pol}(m-k-1) + \mathrm{o}(1)$,

(4) $\Delta^p z \in \mathrm{Pol}(m-p-1) + \Delta^{p-k}\mathrm{o}(1)$ *dla pewnego* $p \in \mathbb{N}_0^k$,

(5) $\Delta^p z \in \mathrm{Pol}(m-p-1) + \Delta^{p-k}\mathrm{o}(1)$ *dla każdego* $p \in \mathbb{N}_0^k$.

Elementy przestrzeni $\mathrm{D}(m,m) = \mathrm{Pol}(m) + \Delta^{-m}\mathrm{o}(1)$ można opisać jeszcze inaczej:

Lemat 5. [H2, Lemma 3.8] *Jeśli* $z \in \mathrm{SQ}$ *i* $m \in \mathbb{N}_0$, *to następujące warunki są równoważne:*

(a) $\Delta^{m+1} z \in \Delta\mathrm{o}(1)$,

(b) *ciąg* $\Delta^m z$ *jest zbieżny,*

(c) $z \in \mathrm{Pol}(m) + \Delta^{-m}\mathrm{o}(1)$,

(d) *istnieje stała* λ *taka, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p!\Delta^{m-p} z_n}{n^p} = \lambda \quad \text{dla każdego} \quad p \in \mathbb{N}_0^m. \tag{8}$$

Implikacja $(b) \Rightarrow (d)$ jest powszechnie znana (jest konsekwencją tw. Stolza), a ponieważ zbieżność ciągu $\Delta^m z$ jest stosunkowo łatwa do sprawdzenia, więc warunek (8) często pojawia się jako teza twierdzeń dotyczących asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych.

W [107, Theorem 3.1] Wang i Sun wykazują, że dla pewnego równania różnicowego typu neutralego każde nieoscylujące rozwiązanie (y_n) jest elementem przestrzeni $\mathrm{P}(m-1, m-1)$, ale w treści twierdzenia piszą, że każde nieoscylujące rozwiązanie (y_n) jest asymptotycznie równoważne z ciągiem postaci $a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m$ gdzie $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ są ustalone. Jest to nadużycie, bo czytelnik odnosi wrażenie, że wykazano, że $y \in \mathrm{P}(m-1, 0)$ co byłoby wynikiem znacznie ciekawszym (i znacznie trudniejszym do udowodnienia).

3.1.2 Rozwiązania asymptotycznie wielomianowe

Spośród wszystkich omawianych tu tematów rozwiązania asymptotycznie wielomianowe mają najbogatszą historię. Są badane zarówno w teorii równań różniczkowych, jak i w teorii równań różnicowych. W szczególności, w teorii równań pierwszego rzędu badane są rozwiązania zbieżne tzn. asymptotycznie równoważne z funkcjami wielomianowymi stopnia mniejszego niż 1. W teorii równań drugiego rzędu badane są tzw. rozwiązania asymptotycznie liniowe czyli asymptotycznie wielomianowe stopnia mniejszego niż 2.
Asymptotycznie liniowe rozwiązania równań różniczkowych badane są np. w pracach: [27], [48], [49], [60], [73], [84], [85], [86], [87], [88], [95], [96], [97], [106], a asymptotycznie wielomianowe rozwiązania np. w pracach: [62], [72], [89], [90], [91].

Asymptotycznie wielomianowe rozwiązania równań różnicowych były badane np. w pracach: [46], [47], [51], [69], [92], [93], [107], [108]. Temat zapoczątkowali J. Popenda i A. Drozdowicz w pracach [46] i [47]. W [46] badane były asymptotycznie liniowe rozwiązania równań różnicowych rzędu 2. W [47] przedstawiono warunki konieczne i dostateczne na to, aby równanie

$$\Delta^m x_n = a_n f(x_n)$$

posiadało rozwiązanie zbieżne (tzn. asymptotycznie wielomianowe stopnia zero). A. Zafer w [108] otrzymał warunki wystarczające na to, aby równanie

$$\Delta^m x_n = f(n, x_{\sigma(n)}) + b_n$$

posiadało rozwiązanie postaci $x_n = an^{m-1} + \mathrm{o}(n^{m-1})$. W pracach [12] i [20] autor przedstawił uogólnienia tych wyników. W tych uogólnieniach "miarą" aproksymacji była przestrzeń $\mathrm{o}(1)$. Następnie w pracach [H1] i [H2] przedstawione zostały następujące dwa twierdzenia, w których "miarą" aproksymacji jest przestrzeń $\mathrm{o}(n^s)$, gdzie $s \in (-\infty, 0]$ jest wcześniej ustalone.

Twierdzenie 1. [H1, Theorem 3.1] *Jeśli* $s \in (-\infty, 0]$, $a \in \mathrm{A}(m-s)$, $k \in \mathbb{N}$, g *jest ciągła,* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i* (g, n^{-k})*-ograniczona, to dla każdego* $\varphi \in \mathrm{Pol}(m-1)$ *takiego, że* $\varphi \circ \sigma = \mathrm{O}(n^k)$ *istnieje rozwiązanie* x *równania* (E) *takie, że* $x_n = \varphi(n) + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 2. [H2, Corollary 5.3] *Jeśli* $s \in (-\infty, 0]$, $a \in \mathrm{A}(m-s)$, $w \in \mathrm{O}(1)$, g *jest lokalnie ograniczona,* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i* (g, w)*-ograniczona, to dla każdego* $\varphi \in \mathrm{Pol}(m-1)$ *takiego, że* $(\varphi \circ \sigma)w = \mathrm{O}(1)$ *istnieje rozwiązanie* x *równania* (E) *takie, że* $x_n = \varphi(n) + \mathrm{o}(n^s)$.

3.1.3 Rozwiązania aproksymatywne

Problem aproksymatywnych rozwiązań jest chyba najważniejszym tematem badań asymptotycznych własności rozwiązań. Część wyników autora dotyczących rozwiązań asymptotycznie wielomianowych została opisana w poprzednim punkcie. Tutaj przedstawione zostaną tylko trzy twierdzenia dotyczące "ogólnych" rozwiązań aproksymatywnych. Pozostałe wyniki dotyczące tego tematu będą opisane w punktach 3.1.4, 3.1.5 i w paragrafach 3.3 i 3.4.

Twierdzenie 3. [H2, Theorem 5.1] *Zakładamy, że* g *jest lokalnie ograniczona,* $s \in (-\infty, 0]$, $a \in \mathrm{A}(m-s)$, $b \in \mathrm{SQ}$, $y \in \Delta^{-m}b$, $w \in \mathrm{O}(1)$, $(y \circ \sigma)w = \mathrm{O}(1)$ *i* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciagła i* (g, w)*-ograniczona. Wtedy istnieje rozwiązanie* x *równania* (E) *takie, że* $x_n = y_n + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 4. [H3, Corollary 3.2] *Jeśli* $b \in \mathrm{SQ}$, $y \in \Delta^{-m}b$, $s \in (-\infty, 0]$, $a \in \mathrm{A}(m-s)$ *i funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *jest ciągła i ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru* $y(\sigma(\mathbb{N}))$, *to istnieje rozwiązanie* x *równania* (AE) *takie, że* $x_n = y_n + \mathrm{o}(n^s)$.

Następne twierdzenie było jednym ze źródeł powstania pojęcia pary asymptotycznej. W niejawny sposób jest w nim wykorzystana m-para $(\mathrm{A}(m+k),\, \mathrm{A}(k))$.

Twierdzenie 5. [H4, Theorem 5.1] *Zakładamy, że* $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathrm{A}(m+k)$, $b \in \mathrm{SQ}$, $y \in \Delta^{-m}b$, *funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru* $y(\mathbb{N})$, *Wtedy istnieje rozwiązanie* x *równania* (AE) *takie, że* $x \in y + \mathrm{A}(k)$.

3.1.4 Aproksymatywne p-rozwiązania

Problem istnienia rozwiązań o z góry danych asymptotycznych własnościach, jak było wcześniej wyjaśnione, sprowadza się do wykazania, że dany ciąg y jest rozwiązaniem aproksymatywnym. W dowodzie zwykle stosuje się wybrane twierdzenie o punkcie stałym i uzyskuje rozwiązanie x "asymptotycznie bliskie" ciągowi y. To oznacza, że y jest rozwiązaniem aproksymatywnym. Niezwykle rzadko zdarza się, aby x było rozwiązaniem pełnym. Najczęściej wykazuje się tylko, że istnieje pewien wskaźnik p taki, że ciąg x spełnia dane równanie dla każdego $n \geq p$. Taki ciąg w pracy [H3] został nazwany p-rozwiązaniem. Wobec tego ciąg y możemy nazwać aproksymatywnym p-rozwiązaniem. W pracach innych autorów termin p-rozwiązanie nie występuje, bo nie jest potrzebny. Używany jest termin "rozwiązanie uogólnione" lub termin "rozwiązanie" stosuje się w sensie ogólniejszym.
W pracy [H3] po raz pierwszy przedstawiono próbę oszacowania punktu startowego p. Zauważmy, że jeśli x jest p-rozwiązaniem i $q \geq p$, to x jest także q-rozwiązaniem. Wobec tego poszukując aproksymatywnych p-rozwiązań zależy nam na jak najmniejszym p. Poniżej przedstawiamy dwa twierdzenia o aproksymatywnych p-rozwiązaniach. Pierwsze dotyczy równań autonomicznych, drugie równań nieautonomicznych.

Załóżmy, że $p \in \mathbb{N}$, $b \in \mathrm{SQ}$, $y \in \Delta^{-m}b$, $s \in (-\infty, 0]$ i $a \in \mathrm{A}(m-s)$.

Twierdzenie 6. [H3, Theorem 3.1] *Jeśli* $M > 0$, *funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i*

$$y_{\sigma(n)} \in \operatorname{Int}\big(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M\},\, M r_p^m |a|\big) \quad dla \quad n \geq p \tag{9}$$

to istnieje p-rozwiązanie x *równania* (AE) *takie, że* $x_n = y_n + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 7. [H3, Theorem 4.1] *Jeśli* $L, M > 0$, $g[0,L] \subset [0,M]$, *funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, ciąg* $w \in \mathrm{O}(1)$ *jest dodatni,* $|f(n,t)| \leq g(|t|w_n)$ *dla* $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, *i*

$$|y_{\sigma(n)}| \leq L w_n^{-1} - M r_p^m |a| \quad dla \quad n \geq p \tag{10}$$

to istnieje p-rozwiązanie x *równania* (E) *takie, że* $x = y + \mathrm{o}(n^s)$.

Równanie (AE) może być traktowane jako szczególny przypadek równania (E), jednak Twierdzenie 6 nie jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 7. Topologiczny warunek (9) został w Twierdzeniu 7 zastąpiony analitycznym warunkiem (10).
Powyższe twierdzenia przedstawiają warunki wystarczajace na to, aby dla ustalonego $p \in \mathbb{N}$ dany ciąg $y \in \Delta^{-m}b$ był aproksymatywnym p-rozwiązaniem. Na ogół nie są to jednak warunki konieczne.
W pracy [H3] przedstawione są też warunki, przy których zmieniając $(p-1)$-wyraz można z danego p-rozwiązania otrzymać $(p-1)$-rozwiązanie. Wtedy zmieniając kilka początkowych wyrazów możemy z danego p-rozwiązania otrzymać rozwiązanie pełne (oczywiście zmiana skończonej ilości

wyrazów nie zmienia asymptotycznych własności ciągu). Metoda ta nie jest uniwersalna i do pewnych równań nie może być stosowana. Co więcej, istnieją równania, dla których asymptotyczne własności rozwiązań uogólnionych są znacznie bogatsze od asymptotycznych własności rozwiązań pełnych. W pracy [H3] przedstawiono kilka prostych przykładów takich równań. Poniżej omówimy trzy z nich.
W [H3, Example 5.7] przy założeniu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ rozważane jest równanie

$$\Delta x_n = a_n|x_{n-1}|.$$

Jeśli $a_p = 0$ i $a_{p+1} = 1$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$, to każda liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest granicą pewnego uogólnionego rozwiązania. Jeśli jednak λ jest granicą pełnego rozwiązania, to $\lambda \geq 0$.
W [H3, Example 5.8] rozważane jest równanie

$$\Delta^2 x_n = a_n x_n^2.$$

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < \infty$ i $a_p = 1$ dla pewnego wskaźnika p, to każda liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest granicą pewnego uogólnionego rozwiązania. Jeśli jednak λ jest granicą pełnego rozwiązania, to $\lambda < 2$.
Najbardziej spektakularny jest przykład [H3, Example 5.9] rozważane jest w nim równanie

$$\Delta x_n = a_n x_n + a_n$$

przy założeniu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$. Wtedy każda liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest granicą pewnego uogólnionego rozwiązania. Jeśli jednak $a_p = -1$ dla pewnego wskaźnika p i x jest p-rozwiązaniem, to $x_n = -1$ dla każdego $n \geq p$. To oznacza, że wtedy zbiorem granic rozwiązań uogólnionych jest $\mathbb{R}$, a zbiorem granic rozwiązań pełnych jest jednoelementowy zbiór $\{-1\}$.

3.1.5 Pary asymptotyczne

Pary asymptotyczne zostały po raz pierwszy zdefiniowane w pracy [H6]. Podstawowe własności tych par zebrane są w następujących dwóch lematach.

Lemat 6. [H6, Lemma 2.4] *Zakładamy, że (A, Z) jest m-parą, $a, b, x \in \mathrm{SQ}$. Wtedy*

(a) *jeśli $a - b \in A$, to $\Delta^{-m}a + Z = \Delta^{-m}b + Z$,*

(b) *jeśli $b \in A$, to $\Delta^{-m}b + Z = \mathrm{Pol}(m-1) + Z$,*

(c) *jeśli $a \in A$ i $\Delta^m x \in \mathrm{O}(a) + b$, to $x \in \Delta^{-m}b + Z$,*

(d) *jeśli $\Delta^m x \in A$, to $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + Z$.*

Lemat 7. [H6, Lemma 2.4] *Jeśli (A, Z) jest zanikającą m-parą, to $A \subset \mathrm{A}(m)$ i $r^m A \subset Z$.*

Poniżej przedstawiamy najważniejsze przykłady par asymptotycznych.

Przykład 1. *Załóżmy, że $(A,\, Z)$ jest m-parą. Jeśli Z^* jest liniową podprzestrzenią przestrzeni SQ taką, że $Z \subset Z_*$, to $(A,\, Z^*)$ jest m-parą. Podobnie, jeśli A_* jest liniową podprzestrzenią przestrzeni A taką, że $\mathrm{O}(1)A_* \subset A_*$, to $(A_*,\, Z)$ jest m-parą.*

Przykład 2. *Jeśli X jest liniową podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{A}(m)$, $\mathrm{Fin}+X \subset X$ i $\mathrm{O}(1)X \subset X$, to $(X,\, r^m X)$ jest zanikającą m-parą. W szczególności, jeśli $a \in \mathrm{A}(m)$, to*

$$(\mathrm{o}(a),\, r^m\mathrm{o}(a)) \quad i \quad (\mathrm{O}(a),\, r^m\mathrm{O}(a)) \quad \textit{są zanikającymi } m\textit{-parami.}$$

Przykład 3. *Jeśli* $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $(s+1)(s+2)\dots(s+m) \neq 0$, $\lambda \in (1,\infty)$, *to*

$$(\mathrm{o}(n^s),\, \mathrm{o}(n^{s+m})), \quad (\mathrm{O}(n^s),\, \mathrm{O}(n^{s+m})), \quad (\mathrm{o}(\lambda^n),\, \mathrm{o}(\lambda^n)), \quad (\mathrm{O}(\lambda^n),\, \mathrm{O}(\lambda^n)) \quad \text{\textit{są m-parami.}}$$

Przykład 4. *Jeśli* $s \in (-\infty,-m)$, $t \in (-\infty,0]$, $u \in [1,\infty)$ *i* $\lambda \in (0,1)$, *to*

$$(\mathrm{o}(n^s),\, \mathrm{o}(n^{s+m})), \quad (\mathrm{O}(n^s),\, \mathrm{O}(n^{s+m})), \quad (\mathrm{A}(m-t),\, \mathrm{o}(n^t)), \quad (\mathrm{A}(m+u),\, \mathrm{A}(u)),$$

$$(\mathrm{o}(\lambda^n),\, \mathrm{o}(\lambda^n)), \quad (\mathrm{O}(\lambda^n),\, \mathrm{O}(\lambda^n)) \quad \text{\textit{są zanikającymi m-parami.}}$$

Przykład 5. *Jeśli* $m \in \mathbb{N}$, $t \in (-\infty, m-1]$, $k \in \mathbb{N}_0^{m-1}$, *to*

$$(\mathrm{A}(m-t),\, \mathrm{o}(n^t)), \quad (\mathrm{A}(m-k),\, \mathrm{o}(n^k)), \quad (\mathrm{A}(m-k),\, \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)) \quad \text{\textit{są m-parami.}}$$

Poniżej przedstawiamy dwa twierdzenia z pracy [H6]. Pierwsze dotyczy problemu aproksymatywnych p-rozwiązań równania autonomicznego i jest uogólnieniem twierdzenia 6. Drugie twierdzenie jest wnioskiem z pierwszego i dotyczy problemu uogólnionych rozwiązań aproksymatywnych.

Twierdzenie 8. [H6, Theorem 4.3] *Jeśli* (A, Z) *jest zanikającą m-parą,* $a \in A$, $M > 0$, *funkcja* f *jest ciągła na zbiorze* $B = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M\}$, $p \in \mathbb{N}$, $y \in \Delta^{-m}b$ *i*

$$(y \circ \sigma)(\mathbb{N}_p) \subset \mathrm{Int}\big(B,\, Mr_p^m|a|\big) \quad \text{to} \quad y \in \mathrm{Sol}_p(\mathrm{AE}) + Z.$$

Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $y \in \mathrm{SQ}$ jest f**-regularny** jeśli istnieje indeks p taki, że funkcja f jest ciągła i ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru $y(\mathbb{N}_p)$.

Twierdzenie 9. *Jeśli* (A, Z) *jest zanikającą m-parą,* $a \in A$ *i ciąg* $y \in \Delta^{-m}b$ *jest f-regularny, to* $y \in \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE}) + Z$.

3.2 Aproksymacja rozwiązań

Aproksymacja rozwiązań to drugi najważnejszy temat w badaniach asymptotycznych własności rozwiązań. W latach 1998-2016 autor przedstawił szereg wyników dotyczących tego zagadnienia. Poniżej przedstawione zostaną najważniejsze z nich. Pierwsze twierdzenie dotyczy aproksymacji wszystkich rozwiązań ciągami wielomianowymi.

Twierdzenie 10. [H2, Theorem 7.4] *Zakładamy, że funkcja* g *jest niemalejąca,*

$$s \in (-\infty, m-1], \qquad k \in \mathbb{N}(0, m-1), \qquad w \in \mathrm{O}(n^{1-m}), \qquad \int_1^\infty \frac{dt}{g(t)} = \infty,$$

$\sigma(n) \leq n$ *dla dużych* n *i funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest* (g, w)*-ograniczona. Wtedy*

(*a*) *jeśli* $a, b \in \mathrm{A}(m-s)$, *to* $\mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{E}) \subset \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^s)$,

(*b*) *jeśli* $a, b \in \mathrm{A}(m-k)$, *to* $\mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{E}) \subset \mathrm{Pol}(m-1) + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)$.

Następne trzy twierdzenia dotyczą aproksymacji rozwiązań f-ograniczonych.

Twierdzenie 11. [H2, Theorem 7.5] *Zakładamy, że* $s \in (-\infty, m-1]$, $k \in \mathbb{N}(0, m-1)$ *i* x *jest f-ograniczonym rozwiązaniem równania* (E). *Wtedy*

(*a*) *jeśli* $a \in \mathrm{A}(m-s)$, *to* $x \in \Delta^{-m}b + \mathrm{o}(n^s)$,

(*b*) *jeśli* $a, b \in \mathrm{A}(m-s)$, *to* $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^s)$,

(*c*) *jeśli* $a \in \mathrm{A}(m-k)$, *to* $x \in \Delta^{-m}b + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)$,

(*d*) *jeśli* $a, b \in \mathrm{A}(m-k)$, *to* $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \Delta^{-k}\mathrm{o}(1)$.

Twierdzenie 12. [H4, Theorem 5.3] *Jeśli* $p \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathrm{A}(m+p)$, *to każde* f*-ograniczone rozwiązanie równania* (AE) *jest elementem przestrzeni* $\mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{A}(p)$.

Twierdzenie 13. [H6, Theorem 4.6] *Jeśli* (A, Z) *jest* m*-parą i* $a \in A$ *to każde* f*-ograniczone rozwiązanie równania* (AE) *jest elementem zbioru* $\Delta^{-m}b + Z$.

W dowodzie twierdzenia 13 główna rolę pełnił następujący lemat.

Lemat 8. [H6, Lemma 3.7] *Jeśli* (A, Z) *jest* m*-parą,* $a \in A$ *i* $\Delta^m x \in \mathrm{O}(a) + b$, *to* $x \in \Delta^{-m}b + Z$.

W dowodach poprzednich twierdzeń były użyte "wcześniejsze" wersje tego lematu. Następne, ostatnie, twierdzenie jest swego rodzaju ciekawostką. Dotyczy wszystkich rozwiązań równania autonomicznego przy tym na funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie są nałożone żadne warunki.

Twierdzenie 14. [H6, Theorem 4.2] *Jeśli* (A, Z) *jest* m*-parą,* $a \in A$ *i* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *to dla każdego* $x \in \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE})$ *spełniona jest alternatywa*

$$x \in \Delta^{-m}b + Z \quad \textit{lub} \quad \mathrm{L}(x) \cap \mathrm{U}(f) \neq \emptyset.$$

3.3 Aproksymacja zbioru rozwiązań

Dwa najważniejsze tematy badań asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych: problem aproksymacji rozwiązań i problem rozwiązań aproksymatywnych są w znanej literaturze traktowane niezależnie. Poniżej przedstawiamy typowe przykłady twierdzeń pierwszego i drugiego rodzaju. Zakładamy, że $W \subset \mathrm{SQ}$.

(A) Dla każdego rozwiązania x równania (AE) takiego, że $x \in W$ istnieje rozwiązanie y równania $\Delta^m y = b$ takie, że $x_n = y_n + \mathrm{o}(1)$.

(B) Dla każdego rozwiązania y równania $\Delta^m y = b$ takiego, że $y \in W$ istnieje rozwiązanie x równania (AE) takie, że $y_n = x_n + \mathrm{o}(1)$.

Twierdzenia te można zapisać w postaci następujących inkluzji

$$\text{(A)} \quad W \cap \mathrm{Sol}(\mathrm{AE}) \subset \Delta^{-m}b + \mathrm{o}(1), \qquad \text{(B)} \quad W \cap \Delta^{-m}b \subset \mathrm{Sol}(\mathrm{AE}) + \mathrm{o}(1)$$

Nasuwa to myśl, że być może, zbiory

$$W \cap \mathrm{Sol}(\mathrm{AE}) \quad \text{i} \quad W \cap \Delta^{-m}b$$

są sobie równe "modulo" $\mathrm{o}(1)$. Istotnie, tak może być. W pracy [H6] przedstawiono tego typu wynik. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że zbiór $W \subset \mathrm{SQ}$ jest

f**-zwyczajny** jeśli dla każdego $x \in W$ funkcja f jest ograniczona na zbiorze $x(\mathbb{N})$,

f**-regularny** jeśli dla każdego $x \in W$ funkcja f jest ciągła i ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru $x(\mathbb{N})$.

Twierdzenie 15. [H6, Theorem 4.11] *Jeśli* (A, Z) *jest zanikającą* m*-parą,* $a \in A$ *i* $W \subset \mathrm{SQ}$, *to*

(T1) *jeśli* W *jest* f*-zwyczajny, to* $W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE}) \subset \Delta^{-m}b + Z$,

(T2) *jeśli* W *jest* f*-regularny to* $W \cap \Delta^{-m}b \subset \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE}) + Z$, (T3) *jeśli* W *jest* f*-regularny i* Z*-niezmienniczy, to*

$$W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE}) + Z = W \cap \Delta^{-m} b + Z.$$

Twierdzenia (T1) i (T2) uogólniają znane wcześniej wyniki. (T1) dotyczy problemu aproksymacji rozwiązań, (T2) problemu aproksymatywnych rozwiązań. (T3) jest twierdzeniem nowego typu, dotyczy obu powyższych problemów i pozwala "obliczyć modulo Z" zbiór $W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE})$.
Niech S oznacza zbiór wszystkich rozwiązań danego równania różnicowego i niech $X \subset S$. Problem wyznaczenia pewnego zbioru $Y \subset \mathrm{SQ}$ i liniowej podprzestrzeni Z przestrzeni $\mathrm{o}(1)$ takich, że $X + Z = Y + Z$ nazywamy problemem aproksymacji zbioru rozwiązań.
W pracy [H6] przedstawiono jeszcze jeden wynik tego typu.

Twierdzenie 16. [H6, Theorem 4.9] *Jeśli* (A, Z) *jest zanikającą* m*-parą,* $a \in A$, $p \in \mathbb{N}$ *i funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i ograniczona, to*

$$\mathrm{Sol}(\mathrm{AE}) + Z = \mathrm{Sol}_p(\mathrm{AE}) + Z = \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AE}) + Z = \Delta^{-m} b + Z.$$

Oczywiście każdy zbiór f-regularny jest też f-zwyczajny. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów zbiorów f-regularnych. Pokazują one, że twierdzenia (T1), (T2) i (T3) "są użyteczne".
Zakładamy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i (A, Z) jest zanikającą m-parą.

Przykład 6. [H6, Example 4.14] *Jeśli* f *jest ciągła i ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru* Y, *to zbiory* $W = \{y \in \mathrm{SQ} : \lim_{n\to\infty} y_n \in Y\}$ *i* $V = \{y \in \mathrm{SQ} : \mathrm{L}(y) \subset Y\}$ *są* f*-regularne i* Z*-niezmiennicze.*

Przykład 7. *Jeśli* f *jest ciągła, to zbiory:* SQ, $\mathrm{O}(1)$ *i zbiór wszystkich ciągów zbieżnych są* f*-regularne i* Z*-niezmiennicze.*

Przykład 8. [H6, Example 4.19] *Jeśli* $f(t) = e^t$, *to zbiory:* $\{x \in \mathrm{SQ} : \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty\}$ *i* $\{x \in \mathrm{SQ} : \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\}$ *są* f*-regularne i* Z*-niezmiennicze.*

3.4 Rozwiązania równań abstrakcyjnych

W tym paragrafie omówimy kilka wyników z pracy [H7], w której uogólniono niektóre wcześniejsze wyniki na równania, nazywane abstrakcyjnymi, postaci

$$\Delta^m x_n = a_n F(x)(n) + b_n \qquad F : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}. \tag{AB}$$

Wprowadzimy najpierw potrzebną terminologię. Niech $X \subset \mathrm{SQ}$. Mówimy, że operator F jest:
ograniczony na X jeśli $\sup\{|F(x)(n)| : (x, n) \in X \times \mathbb{N}\} < \infty$,
paraciągły na X jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $x, z \in X$ i $\|x - z\| < \delta$ to $|F(x)(n) - F(z)(n)| < \varepsilon$,
mezociągły na X jeśli jest paraciągły na każdym ograniczonym podzbiorze zbioru X.
Ponieważ każdy podzbiór przestrzeni SQ traktujemy jako przestrzeń topologiczną z topologią regionalną, a każdy zwyczajny podzbiór przestrzeni SQ jako przestrzeń metryczną z metryką $d(x, y) = \|x - y\|$, więc w naturalny sposób zdefiowana jest ciągłość operatorów określonych na podzbiorach przestrzeni SQ i jednostajna ciągłość operatorów określonych na zwyczajnych podzbiorach przestrzeni SQ.

Ciąg $y \in \mathrm{SQ}$ nazywamy F-**ograniczonym** jeśli operator F jest ograniczony na pewnym otoczeniu ciągu y. Mówimy, że zbór $W \subset \mathrm{SQ}$ jest

F-**zwyczajny** jeśli dla każdego $y \in W$ ciąg $F(y)$ jest ograniczony,

F-**regularny** jeśli F jest mezociągły na W i każdy $y \in W$ jest F-ograniczony,

F-**optymalny** jeśli $W + \mathrm{o}(1) = W$, F jest mezociągły na W i ograniczony na każdym zbiorze postaci $W \cap \mathrm{Reg}(y)$, gdzie $y \in W$.

Przedstawimy teraz cztery twierdzenia: twierdzenie 17 dotyczy problemu aproksymatywnych p-rozwiązań równania (AB), twierdzenie 18 jest wnioskiem z twierdzenia 17 i dotyczy uogólnionych rozwiązań aproksymatywnych, twierdzenie 19 rozwiązuje problem aproksymacji rozwiązań równania (AB), a twierdzenie 20 dotyczy aproksymacji zbioru rozwiązań tego równania.

Twierdzenie 17. [H7, Theorem 4.1] *Zakładamy, że* (A, Z) *jest zanikającą* m*-parą,* $a \in A$,

$$p \in \mathbb{N}, \quad M > 0, \quad y \in \Delta^{-m}b, \quad \rho = Mr^m|a|,$$

$$B = \{x \in \mathrm{SQ} : |x - y| \le \rho \ \ i \ \ x_n = y_n \ \ dla \ \ n < p\}, \qquad |F(x)| \le M \ \ dla \ \ x \in B$$

i operator F *jest ciągły lub paraciągły na* B. *Wtedy* $y \in \mathrm{Sol}_p(\mathrm{AB}) + Z$.

Twierdzenie 18. *Jeśli* (A, Z) *jest zanikającą* m*-parą,* $a \in A$, *operator* F *jest mezociągły i* $y \in \Delta^{-m}b$ *jest ciągiem* F*-ograniczonym, to* $y \in \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AB}) + Z$.

Twierdzenie 19. [H7, Theorem 4.4] *Zakładamy, że* (A, Z) *jest* m*-parą,* $a \in A$ *i* W *jest* F*-zwyczajnym podzbiorem przestrzeni* SQ. *Wtedy* $W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AB}) \subset \Delta^{-m}b + Z$.

Twierdzenie 20. [H7, Theorem 4.7] *Zakładamy, że* (A, Z) *jest zanikającą* m*-parą,* $a \in A$ *i* W *jest* Z*-niezmienniczym podzbiorem przestrzeni* SQ. *Wtedy*

(*a*) *jeśli* W *jest* F*-regularny, to* $W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AB}) + Z = W \cap \Delta^{-m}b + Z$,

(*b*) *jeśli* W *jest* F*-optymalny, to* $W \cap \mathrm{Sol}(\mathrm{AB}) + Z = W \cap \mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{AB}) + Z = W \cap \Delta^{-m}b + Z$.

Mezociągłość operatorów jest naturalnym odpowiednikiem ciągłości funkcji używanych w klasycznych równaniach. Pokazują to następujace dwa przykłady.

Przykład 9. [H7, Example 3.4] *Jeśli* $k \in \mathbb{N}$, *funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *jest ciagła i* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *to operator*

$$H : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}, \quad H(x)(n) = f(n, x_{\sigma_1(n)}, \ldots, x_{\sigma_k(n)}) \quad \textit{jest mezociągły.}$$

Przykład 10. [H7, Example 3.5] *Jeśli* $k \in \mathbb{N}$ *i funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to operator*

$$H : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}, \quad H(x)(n) = f(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \ldots, \Delta^k x_n) \quad \textit{jest mezociągły.}$$

Ciągłość i mezociągłość są niezależne. Pokazują to następujące dwa przykłady.

Przykład 11. [H7, Example 3.6] *Zakładamy, że* B *jest ograniczonym podzbiorem prostej,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *obcięcie* $f|B$ *jest funkcją ciagłą, ale nie jednostajnie ciągłą,* $p \in \mathbb{N}$,

$$W = \{x \in \mathrm{SQ} : x(\mathbb{N}) \subset B\} \quad i \quad H : W \to \mathrm{SQ}, \quad H(x)(n) := \begin{cases} f(x_p) & dla\ n = p \\ x_n & dla\ n \neq p. \end{cases}$$

Wtedy operator H *jest ciągły, ale nie jest mezociągły.*

Przykład 12. [H7, Example 3.7] *Niech*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}, \quad H(x)(n) = f(x_n). \quad \textit{Wtedy}$$

(*a*) *jeśli funkcja* f *jest jednostajnie ciągła, to operator* H *jest jednostajnie ciągły,*

(*b*) *jeśli funkcja* f *jest ciągła, to operator* H *jest mezociągły,*

(*c*) *jeśli funkcja* f *nie jest jednostajnie ciągła, to operator* H *jest nieciągły.*

Jako ostatni wynik przedstawimy twierdzenie 21. Jest to uogólnienie twierdzenia 14. Twierdzenie 21 dotyczy wszystkich rozwiązań równania (AB), a na operator F nie nakładamy żadnych ograniczeń.

Mówimy, że operator $F : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}$ jest **nieograniczony** w punkcie $p \in [-\infty, \infty]$ jeśli istnieją: ciąg $x \in \mathrm{SQ}$ i rosnący ciąg $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} x(\alpha(n)) = p \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} |F(x)(\alpha(n))| = \infty.$$

Niech $\mathrm{U}(F)$ oznacza zbiór wszystkich $p \in [-\infty, \infty]$, w których F jest nieograniczony.

Twierdzenie 21. [H7, Theorem 4.8] *Zakładamy, że* (A, Z) *jest* m*-parą,* $a \in A$, $b \in \mathrm{SQ}$. *Wtedy dla każdego rozwiązania* x *równania* (AB) *spełniona jest alternatywa*

$$x \in \Delta^{-m} b + Z \quad \textit{lub} \quad \mathrm{L}(x) \cap \mathrm{U}(F) \neq \emptyset.$$

3.5 Rozwiązania równań typu neutralnego

Własności rozwiązań równań różnicowych typu neutralnego były badane przez wielu autorów. Badania te idą w kilku kierunkach. Np. prace [38], [70], [15], [18] i [111] są poświęcone klasyfikacji rozwiązań. W pracach: [28], [29], [31], [37], [71], [104] i [109] badane były rozwiązania oscylujące. Problem aproksymatywnych rozwiązań był badany między innymi w: [50], [65], [74], [75], [76], [77], [78], [99] i [100]. W pracach: [16], [66], [80], [103], [102], [107] badane były rozwiązania asymptotycznie wielomianowe.

Teraz przedstawione zostaną główne wyniki prac [H8] i [H9]. W pracy [H8] przedstawiono nową metodę poszukiwania aproksymatywnych rozwiązań równań, typu neutralnego, postaci

$$\Delta^m(x_n - u_n x_{n-k}) = a_n f(x_n) + b_n, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Rozwiązywanie problemu zostało podzielone na dwa etapy. Najpierw, w twierdzeniu 22, wyznaczono wszystkie rozwiązania równania

$$\Delta^m(x_n - \lambda x_{n-k}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{F}$$

W pracy [H8] równanie to jest nazywane **fundamentalnym równaniem typu neutralnego**. Następnie, w twierdzeniu 23, przedstawiono warunki wystarczające na to, aby dane rozwiązanie równania (F) było aproksymatywnym rozwiązaniem równania (11). Symbolami

$$\mathrm{PG}(m, \lambda, k), \qquad \mathrm{Geo}(\lambda, k)$$

oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania (F) i zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_n - \lambda x_{n-k} = 0,$$

odpowiednio. Niech $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0 \neq \lambda$. Określamy

$$n \operatorname{div} k := \operatorname{sgn} k \max\{j \in \mathbb{Z} : \ j|k| \leq n\}, \qquad n \operatorname{mod} k := n - |k|\,(n \operatorname{div} |k|).$$

Twierdzenie 22. [H8, Lemma 3.1,Theorem 3.1] *Jeśli* $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \neq \lambda \neq 1$, *to*

$$\mathrm{Geo}(\lambda, k) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \ x_n = \lambda^{n \operatorname{div} k} x_{n \bmod k} \quad \textit{dla każdego} \quad n \geq 0\},$$

$$\mathrm{PG}(m, \lambda, k) = \mathrm{Pol}(m-1) \oplus \mathrm{Geo}(\lambda, k).$$

Z twierdzenia 22 wynika, że każde rozwiązanie y równania (F) jest postaci

$$y_n = \varphi(n) + \omega_n \mu^n,$$

gdzie $\varphi \in \mathrm{Pol}(m-1)$, $\mu = \sqrt[k]{|\lambda|}$, a ω jest ciągiem $2|k|$-okresowym.
Ciąg $x \in \mathrm{SQ}$ nazywamy **jednostajnie f-ograniczonym** jeśli funkcja f jest ograniczona na pewnym jednostajnym otoczeniu zbioru $x(\mathbb{N})$. Ostatecznym celem pracy [H8] było następujące twierdzenie, udowodnione przy pomocy regionalnej wersji twierdzenia Krasnosielskiego.

Twierdzenie 23. [H8, Theorem 4.1] *Zakładamy, że* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0 \neq \lambda$, $s \leq 0$, $a, b \in \mathrm{A}(m-s)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą i spełniony jest jeden z warunków:*

(*A*) $k > 0$, $|\lambda| < \alpha < 1$, $u_n = \lambda + \mathrm{o}(n^{s-m+1})$,

(*B*) $k < 0$, $|\lambda| < \alpha < 1$, $u_n = \lambda$,

(*C*) $k > 0$, $|\lambda| > \alpha > 1$, $u_n = \lambda$,

(*D*) $k < 0$, $|\lambda| > \alpha > 1$, $u_n = \lambda + \mathrm{o}(n^{s-m+1})$.

Wtedy dla każdego jednostajnie f-ograniczonego ciągu $y \in \mathrm{PG}(m, \lambda, k)$ *istnieje rozwiązanie* x *równania* $\Delta^m(x_n - u_n x_{n-k}) = a_n f(x_n) + b_n$ *takie, że* $x_n = y_n + \mathrm{o}(n^s)$.

Stosowana do tej pory, właściwie przez wszystkich autorów, metoda wyznaczania aproksymatywnych rozwiązań równań typu neutralnego jest analogiczna do opisanego we Wstępie zastosowania twierdzenia Schaudera w teorii równań zwyczajnych. Aby wykazać, że ciąg y jest aproksymatywnym rozwiązaniem tworzy się odpowiedni zbiór X złożony z ciągów asymptotycznie bliskich ciągowi y. Następnie konstruuje się odpowiedni operator $X \to X$ i przy pomocy twierdzenia Krasnosielskiego otrzymuje się punkt stały tego operatora. Operator jest tak dobrany, że jego punkt stały x jest rozwiązaniem danego równania, a ponieważ $x \in X$, więc ciągi x i y są "asymptotycznie bliskie". Największy problem stanowi wybór ciągu y, bo musimy "trafić" na taki ciąg, który faktycznie jest aproksymatywnym rozwiązaniem danego równania. Wymaga to sporej intuicji i najprawdopodobniej wielu prób. W przedstawionej powyżej metodzie problem intuicyjnego "odgadywania" aproksymatywnego rozwiaząnia został zastąpiony problemem technicznego sprawdzenia, czy dany ciąg $y \in \mathrm{PG}(m, \lambda, k)$ jest jednostajnie f-ograniczony.

Poniżej omówione będą wyniki z pracy [H9], w której badano aproksymację rozwiązań ciągami wielomianowymi.

W znanej literaturze, np. [102, Theorem 3], [107, Theorem 3.1], [80, Theorem 1] dla równań m-tego rzędu, "najlepszym" uzyskanym wynikiem jest przedstawienie warunków, przy których dla każdego nieoscylującego rozwiązania x istnieje stała $a \in \mathbb{R}$ taka, że

$$x_n = an^{m-1} + \mathrm{o}(n^{m-1}).$$

Podobnie jest w przypadku ciągłym. W poniższym twierdzeniu przedstawione są między innymi warunki, przy których zakładając, że $s \in (-\infty, m-1]$ dla każdego nieoscylującego rozwiązania x istnieje ciąg wielomianowy $\varphi \in \mathrm{Pol}(m-1)$ taki, że

$$x_n = \varphi(n) + \mathrm{o}(n^s).$$

Nawet w przypadku $s = 0$ jest to daleko idące uogólnienie znanych rezultatów.

Twierdzenie 24. [H9, Theorem 1] *Zakładamy, że* $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| \neq 1$,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \in (-\infty, m-1], \quad a, b \in \mathrm{A}(m-s), \quad u_n = c + \mathrm{o}(n^{s+1-m}),$$

funkcja g *jest niemalejąca,* $\int_1^\infty dt/g(t) = \infty$, x *jest rozwiązaniem równania*

$$\Delta^m(x_n + u_n x_{n-k}) = a_n f(n, x_{\sigma(n)}) + b_n$$

i spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:

(*a*) $\sigma(n) \leq n$ *dla dużych* n, f *jest* (g, n^{1-m})*-ograniczona i* x *jest nieoscylujący,*

(*b*) f *jest ograniczona i spełniona jest alternatywa:*

$$|c| < 0 \quad \textit{lub} \quad x \in \mathrm{O}(n^\infty) \quad \textit{lub} \quad x \text{ \textit{jest nieoscylujący.}}$$

Wtedy $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^s)$.

Powód, dla którego w pracach innych autorów przedstawiono jedynie warunki, przy których każde nieoscylujące rozwiązanie jest elementem przestrzeni $\mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^{m-1})$ jest następujący. Powszechnie znany i stosowany jest

Lemat. *Jeśli* $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| \neq 1$, $u_n = c + \mathrm{o}(1)$, $z_n = x_n + u_n x_{n-k}$ *i spełniona jest alternatywa:* $|c| < 1$ *lub* x *jest ograniczony to ze zbieżności ciągu* z *wynika zbieżność ciągu* x.
Stosując ten lemat i twierdzenie Stolza uzyskuje się zwykle, dla rozwiązania x równania rzędu m, zbieżność ciągu (x_n/n^{m-1}) co jest równoważne z warunkiem $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^{m-1})$.

Następujace daleko idące uogólnienie powyższego lematu grało kluczową rolę w dowodzie Twierdzenia 24.

Lemat 9. [H9, Lemma 3.5] *Jeśli* $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| \neq 1$, $s \in (-\infty, m]$, $u_n = c + \mathrm{o}(n^{s-m})$, $z_n = x_n + u_n x_{n+k}$ *i spełniona jest alternatywa* $k(|c| - 1) \geq 0$ *lub* $x \in \mathrm{O}(n^\infty)$, *to* $z \in \mathrm{Pol}(m) + \mathrm{o}(n^s) \Rightarrow x \in \mathrm{Pol}(m) + \mathrm{o}(n^s)$.

Dowody głównych wyników prac [H8] i [H9] są obszerne i skomplikowane technicznie. Praktycznie cała praca [H8] stanowi dowód ostatniego w tej pracy twierdzenia [H8, Theorem 4.1]. Podobnie, prawie cała praca [H9] stanowi dowód twierdzenia [H9, Theorem 1].

Asymptotycznie wielomianowe rozwiązania równań typu neutralnego są badane także w "przypadku ciągłym". Zgodnie z wiedzą autora nie jest jednak znany "ciągły odpowiednik" twierdzenia 24. W pracy [62] Hasanbulli i Rogovchenko przedstawili warunki wystarczające na to, aby każde nieoscylujące rozwiązanie x pewnego równania różniczkowego typu neutralnego spełniało warunek $x(t) = at^{m-1} + \mathrm{o}(t^{m-1})$ co jest odpowiednikiem relacji $x \in \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^{m-1})$. Uwagi dotyczące historii tematu można znaleźć w [48] i [62].

3.6 Operator reszt

Większość podstawowych własności przestrzeni $\mathrm{S}(m)$ ciągów m-krotnie sumowalnych i operatora

$$r^m : \mathrm{S}(m) \to \mathrm{o}(1), \quad r^m(x)(n) = r_n^m x = \sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} x_{i_m}$$

jest zebrana w następującym lemacie.

Lemat 10. [H4, Lemma 3.1] *Zakładamy, że* $x, y \in \mathrm{SQ}$, $m, k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ *i* $q \in \mathbb{N}_0^{m-1}$. *Wtedy*

(01) *jeśli* $|x| \in \mathrm{S}(m)$, *to* $x \in \mathrm{S}(m)$ *i* $|r^m x| \le r^m |x|$,

(02) $|x| \in \mathrm{S}(m)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^{m-1} |x_n| < \infty$,

(03) $|x| \in \mathrm{S}(m)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} |x_n| < \infty$,

(04) $|x| \in \mathrm{S}(m)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{O}(x) \subset \mathrm{S}(m)$,

(05) *jeśli* $|x| \in \mathrm{S}(m)$, *to* $r_n^m x = s_1^{m-1} x_n + s_2^{m-1} x_{n+1} + s_3^{m-1} x_{n+2} + \dots$,

(06) *jeśli* $|x| \in \mathrm{S}(m)$, *to* $r_k^m |x| \le \sum_{n=k}^{\infty} n^{m-1} |x_n|$,

(07) *jeśli* $x \in \mathrm{S}(m)$, *to* $\Delta^m r^m x = (-1)^m x$,

(08) *jeśli* $x = \mathrm{o}(1)$, *to* $\Delta^m x \in \mathrm{S}(m)$ *and* $r^m \Delta^m x = (-1)^m x$,

(09) $\Delta^m \mathrm{S}(0) = \mathrm{S}(m)$, $\quad r^m \mathrm{S}(m) = \mathrm{S}(0)$,

(10) $\Delta^p \mathrm{S}(m) = \mathrm{S}(m+p)$, $\quad r^p \mathrm{S}(m+p) = \mathrm{S}(m)$,

(11) *jeśli* $x, y \in \mathrm{S}(m)$ *i* $x_n \le y_n$ *dla* $n \ge p$, *to* $r_n^m x \le r_n^m y$ *dla* $n \ge p$,

(12) *jeśli* $x \in \mathrm{S}(m)$ *i* $y_n = x_n$ *dla* $n \ge p$, *to* $y \in \mathrm{S}(m)$ *i* $r_n^m y = r_n^m x$ *dla* $n \ge p$,

(13) *jeśli* $y \in \mathrm{S}(m)$ *i* $0 \le x \le y$, *to* $x \in \mathrm{S}(m)$,

(14) *jeśli* $|x| \in \mathrm{S}(m)$ *i* y *jest ograniczony, to* $yx \in \mathrm{S}(m)$ *i* $|r^m(yx)| \le \|y\| r^m |x|$,

(15) *jeśli* $|yx| \in \mathrm{S}(m)$, $|y|$ *jest niemalejący i dodatni, to* $|x| \in \mathrm{S}(m)$,

$$|y| r^m |x| \le r^m |yx| \quad i \quad \Delta^q r^m x = \mathrm{o}(n^{-q} y^{-1}),$$

(16) *jeśli* $t \in (-\infty, 0]$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-t-1} |x_n| < \infty$, *to* $\Delta^q r^m x = \mathrm{o}(n^{t-q})$.

Istotna informacja jest też zawarta w lemacie

Lemat 11. [H2, Lemma 4.2] *Jeśli* $s \in (-\infty, 0]$ *i* $x \in \mathrm{A}(m-s)$, *to* $x \in \mathrm{S}(m)$, $r^m x = \mathrm{o}(n^s)$ *i*

$$r_n^m x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m-1} x_{n+k}.$$

Uwaga 1. *Niech* $k, p \in \mathbb{N}_0$ *i* $m \in \mathbb{N}_0^k$. *Wprowadzając oznaczenia:*

$$\mathrm{S}_k^{k+p} = \Delta^p \mathrm{A}(k), \quad \mathrm{S}_k^{k-m} = r^m \mathrm{A}(k), \quad \mathrm{S}_k^{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}_k^n, \quad \mathrm{S}_{\infty}^n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{S}_k^n, \quad \mathrm{S}_{\infty}^{\infty} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{S}_k^k$$

możemy narysować diagram, w którym każda strzałka oznacza inkluzję właściwą.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{S}_\infty^0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{S}_3^0 & \longrightarrow & \mathrm{S}_2^0 & \longrightarrow & \mathrm{S}_1^0 & \longrightarrow & \mathrm{S}_0^0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}_\infty^1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{S}_3^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}_2^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}_1^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}_0^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}_\infty^2 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{S}_3^2 & \longrightarrow & \mathrm{S}_2^2 & \longrightarrow & \mathrm{S}_1^2 & \longrightarrow & \mathrm{S}_0^2 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}_\infty^3 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{S}_3^3 & \longrightarrow & \mathrm{S}_2^3 & \longrightarrow & \mathrm{S}_1^3 & \longrightarrow & \mathrm{S}_0^3 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{S}_\infty^\infty & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{S}_3^\infty & \longrightarrow & \mathrm{S}_2^\infty & \longrightarrow & \mathrm{S}_1^\infty & \longrightarrow & \mathrm{S}_0^\infty
\end{array}$$

Zauważmy, że operatory Δ^p i r^m "zachowują kolumny", operator Δ^p obniża przestrzeń o p poziomów, a operator r^m podnosi przestrzeń o m poziomów (z wyjątkiem przestrzeni z najniższego wiersza). Precyzyjniej, jeśli $k, n, p \in \mathbb{N}_0$ i $m \in \mathbb{N}_0^n$, to

$$\Delta^p \mathrm{S}_k^n = \mathrm{S}_k^{n+p}, \qquad r^m \mathrm{S}_k^n = \mathrm{S}_k^{n-m}, \qquad \Delta^p \mathrm{S}_\infty^n = \mathrm{S}_\infty^{n+p}, \qquad r^m \mathrm{S}_\infty^n = \mathrm{S}_\infty^{n-m},$$

$$\Delta^m \mathrm{S}_k^\infty = S_k^\infty = r^m \mathrm{S}_k^\infty, \qquad \Delta^m \mathrm{S}_\infty^\infty = S_\infty^\infty = r^m \mathrm{S}_\infty^\infty.$$

Zauważmy też, że

$$\mathrm{S}_\infty^\infty = \mathrm{A}(\infty) = \mathrm{o}(n^{-\infty}).$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli $p \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{N}_1^p$, to $(\mathrm{A}(p), \mathrm{S}_p^{p-m})$ jest asymptotyczną parą różnicową rzędu m. Ponadto $(\mathrm{A}(\infty), \mathrm{A}(\infty))$ jest asymptotyczną parą różnicową dowolnego rzędu.

Zastosowanie twierdzenia Schaudera i jego uogólnień, w badaniach asymptotycznych własności rozwiązań, wymaga ciągłości tworzonych operatorów. Ciągłość ta jest konsekwencją następującego lematu.

Lemat 12. [H2, Lemma 4.3] *Jeśli* $\rho \in \mathrm{A}(m)$ *i* $S = \{x \in \mathrm{SQ} : |x| \le |\rho|\}$, *to* $S \subset \mathrm{S}(m)$ *i odwzorowanie* $r^m|S$ *jest ciągłe.*

Jednak zagadnienie ciągłości operatora r^m jest subtelne. Wynika to z następującej uwagi.

Uwaga 2. *Operator* $r^m : \mathrm{S}(m) \to \mathrm{S}(0)$ *jest nieciągły. Np. jeśli*

$$u_k \in \mathrm{SQ}, \qquad u_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \le k \\ 0 & \text{dla } n > k, \end{cases}$$

to $u_k \in \mathrm{S}(m)$, $\|u_k\| = 1$ *i* $\|r^m(u_k)\| \geq \|r(u_k)\| = k$. *Wobec tego* r^m *jest operatorem liniowym nieograniczonym. Jest więc nieciągły. Więcej, ponieważ* $u_k \in \mathrm{Fin}$ *dla każdego* k *więc odwzorowanie* $r^m|\mathrm{Fin}$ *jest nieciągłe.*

Naturalny porządek prostej rzeczywistej określa częściowy porządek w przestrzeni ciągów SQ. W przeciwności do problemów związanych z ciągłością operatora r^m bardzo łatwo stwierdzić, że operator ten jest niemalejący. Daje to możliwość zastosowania twierdzenia Knastera-Tarskiego o punkcie stałym zamiast twierdzenia Schaudera. Takie zastosowania przedstawione są w [H2, Theorem 6.1] i [H2, Theorem 6.2].

3.7 Topologia regionalna

W badaniach asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych zwyczajnych użycie topologii regionalnej nie było potrzebne. Motywacją wprowadzenia tej topologii było następujące twierdzenie użyte w pracy [H5] do poszukiwania aproksymatywnych rozwiązań równań różniczkowych.

Twierdzenie 25 (Uogólnione twierdzenie Schaudera). [H5, Theorem 3.1]
Jeśli Q jest domkniętym i wypukłym podzbiorem regionalnej przestrzeni Banacha X, to każde ciągłe odwzorowanie $H : Q \to Q$ takie, że obraz HQ jest zwyczajny i całkowicie ograniczony ma punkt stały.

W [H5] przedstawiono też przykład pokazujący, że założenie zwyczajności zbioru HQ w twierdzeniu 25 jest istotne. Drugim powodem wprowadzenia topologii regionalnej było poniższe twierdzenie użyte w pracy [H8] do badania aproksymatywnych rozwiązań równań różnicowych typu neutralnego.

Twierdzenie 26 (Uogólnione twierdzenie Krasnosielskiego). [H8, Theorem 2.1]
Zakładamy, że M jest zwyczajnym, zwartym i wypukłym podzbiorem regionalnej przestrzeni Banacha X,

$$\alpha \in (0,1), \quad A, B : M \to X, \quad AM + BM \subset M,$$

A jest ciągłe i B jest α-kontrakcją. Wtedy istnieje punkt $x \in M$ taki, że $Ax + Bx = x$.

Do zastosowania w [H5] uogólnionego twierdzenia Schaudera potrzebna była uogólniona wersja klasycznego twierdzenia Ascoliego i kilka pojęć, których definicje przedstawiamy poniżej. Zakładamy, że X jest lokalnie zwartą przestrzenią metryczną i $F \subset \mathbb{R}^X$. Mówimy, że rodzina F jest:

punktowo ograniczona jeśli dla każdego $x \in X$ zbiór $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ jest ograniczony,

znikająca w nieskończoności jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarty podzbiór Z przestrzeni X taki, że $|f(s)| < \varepsilon$ dla każdego $s \notin Z$ i każdej funkcji $f \in F$,

jednakowo ciągła w nieskończoności jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarty podzbiór Z przestrzeni X taki, że $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ dla dowolnych $s, t \notin Z$ i $f \in F$,

stabilna w nieskończoności jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarty podzbiór Z przestrzeni X taki, że $|f(s) - g(s)| < \varepsilon$ dla każdego $s \notin Z$ i dowolnych $f, g \in F$,

jednorodna w nieskończoności jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarty podzbiór Z przestrzeni X taki, że $|(f-g)(s)-(f-g)(t)| < \varepsilon$ dla dowolnych $s,t \notin Z$ i $f,g \in F$.

Dwa pierwsze pojęcia są używane przez innych autorów, pozostałe trzy zostały po raz pierwszy zdefiniowane w [H5]. Oczywiście każda rodzina znikająca w nieskończoności jest też stabilna w nieskończoności i jednakowo ciągła w nieskończoności. Ponadto każda rodzina stabilna w nieskończoności i każda rodzina jednakowo ciągła w nieskończoności jest jednorodna w nieskończoności.

Twierdzenie 27 (Uogólnione twierdzenie Ascoliego). [H5, Theorem 3.2] *Jeśli X jest lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, to każda jednakowo ciagła, punktowo ograniczona i jednorodna w nieskończoności rodzina funkcji ciągłych na X jest całkowicie ograniczona.*

Łatwo sprawdzić, że ciąg (y_n) w SQ jest zbieżny do y_0 względem topologii regionalnej wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg różnic $(y_n - y_0)$ jest zbieżny jednostajnie (w zwykłym sensie) do ciągu zerowego. Wobec tego topologia regionalna może być nazywana topologią zbieżności jednostajnej. Poza konstatacją terminologiczną, wynika stąd też, że topologia regionalna jest naturalnym narzędziem w badaniach asymptotycznych własności ciągów.

Jeśli M jest dowolnym zbiorem to oczywiście wzór

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| : p \in M\}$$

określa normę regionalną na przestrzeni wszystkich funkcji $\mathbb{R}^M$. Z analitycznego punktu widzenia topologia regionalna w $\mathbb{R}^M$ jest topologią zbieżności jednostajnej, bo warunek $f_n \to g$ jest równoważny z warunkiem $\|f_n - g\| \to 0$. Ta naturalna topologia zbieżności jednostajnej powszechnie stosowana na przestrzeniach funkcji ograniczonych nie jest używana na zbiorach funkcji nieograniczonych. Prawdopodobną przyczyną jest fakt, że topologia ta na przestrzeni $\mathbb{R}^M$ w przypadku nieskończonego zbioru M nie jest liniowa.

Jeśli X jest dowolną regionalną przestrzenią unormowaną i nie jest zwyczajna, to topologia w X nie jest liniowa bo mnożenie przez skalary $\mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ jest nieciągłe. Jest natomiast zbliżona do liniowej bo dodawanie $X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto x+y$ jest ciągłe i dla dowolnej niezerowej liczby λ homotetia $X \to X$, $x \mapsto \lambda x$ jest homeomorfizmem.

W przestrzeni $\mathbb{R}^M$ topologia regionalna określona przez normę "sup" jest najsilniejszą topologią indukującą na każdym regionie topologię zbieżności jednostajnej. Prawdopodobnie topologię regionalną można osłabić tak, aby otrzymać topologię liniową, która w dalszym ciągu, na regionach indukowałaby topologię zbieżności jednostajnej. Wtedy można by próbować zastosować np. twierdzenie Schaudera-Tichonowa o punkcie stałym. Należy jednak pamiętać, że należałoby wtedy kontrolować topologie na przestrzeniach dopełniających do przestrzeni funkcji ograniczonych. Dla topologii regionalnej są to topologie dyskretne i można o nich "zapomnieć". Z drugiej strony w badaniach asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych mniej istotne jest narzędzie czy metoda otrzymania punktu stałego, który jest rozwiązaniem danego równania, bardziej istotna jest informacja o asymptotycznych własnościach tego punktu stałego, a informację tę uzyskujemy przy pomocy, nieco głębszej niż zazwyczaj stosowana, wiedzy o operatorze reszt

$$r^m(x)(n) = \sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} x_{i_m}.$$

3.8 Kryteria wielokrotnej zbieżności szeregów

Podstawowym przykładem asymptotycznej m-pary jest para $(\mathrm{A}(m), \mathrm{o}(1))$. Niejawnie pojawia się ona w pracach różnych autorów. Ze względu na zastosowania, w szczególności w omawianej teorii, bardzo ważna jest odpowiedź na pytanie: czy dla danego ciągu a spełniona jest relacja $a \in \mathrm{A}(m)$. W przypadku $m = 1$ jest to pytanie o bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ogólnie, jest to pytanie o zbieżność szeregu

$$\sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} |a_{i_m}|.$$

W klasycznej analizie znanych jest bardzo wiele kryteriów bezwzględnej zbieżności szeregów. W pracach [H4] i [H6], niektóre z tych kryteriów zostały uogólnione na przypadek dowolnego $m \in \mathbb{N}$. Np. z kryterium Raabe'go wynika, że

$$\text{jeśli} \quad \liminf n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) > 1, \quad \text{to} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Z [H4, Lemma 4.5] wynika, że

$$\text{jeśli} \quad \liminf n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) > 2, \quad \text{to} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \infty$$

i ogólniej,

$$\text{jeśli} \quad \liminf n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) > m, \quad \text{to} \quad \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} |a_{i_m}| < \infty.$$

Z drugiej strony,

$$\text{jeśli} \quad n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) \le m \quad \text{dla dużych } n, \ \text{to} \quad \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{\infty} |a_{i_m}| = \infty.$$

Poniżej przedstawiamy uogólnione kryteria z prac [H4] i [H6].

Twierdzenie 28 (Uogólnione kryterium logarytmiczne). [H4, Lemma 4.4]
Zakładamy, że $a \in \mathrm{SQ}$, $m \in \mathbb{N}$ *i*

$$u_n = \frac{\log |a_n|}{\log n}. \qquad \textit{Wtedy}$$

(*a*) *jeśli* $\limsup u_n < -m$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$,

(*b*) *jeśli* $u_n \ge -m$ *dla dużych* n, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(*c*) *jeśli* $\liminf u_n > -m$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(*d*) *jeśli* $\lim u_n = -\infty$, *to* $a \in \mathrm{A}(\infty)$.

Twierdzenie 29 (Uogólnione kryterium Raabe). [H4, Lemma 4.5]
Zakładamy, że $a \in \mathrm{SQ}$, $m \in \mathbb{N}$ *i*

$$u_n = n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right). \qquad \textit{Wtedy}$$

(*a*) *jeśli* $\liminf u_n > m$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$, (*b*) *jeśli* $u_n \le m$ *dla dużych* n, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(*c*) *jeśli* $\limsup u_n < m$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(*d*) *jeśli* $\lim u_n = \infty$, *to* $a \in \mathrm{A}(\infty)$.

Twierdzenie 30 (Uogólnione kryterium Gaussa). [H4, Lemma 4.6]
Niech $a \in \mathrm{SQ}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s < -1$ *i*

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \mathrm{O}(n^s). \qquad \textit{Wtedy}$$

(*a*) *jeśli* $\alpha > \lambda > 1$, *to* $a \in \mathrm{o}(\lambda^n)$,

(*b*) *jeśli* $\alpha < 1$, *to* $a \notin \mathrm{o}(1)$,

(*c*) *jeśli* $\alpha = 1$ *i* $\beta > m$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$,

(*d*) *jeśli* $\alpha = 1$ *i* $\beta \le m$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$.

Twierdzenie 31 (Uogólnione kryterium Bertranda). [H4, Lemma 4.7]
Zakładamy, że $a \in \mathrm{SQ}$, $m \in \mathbb{N}$ *i*

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{\lambda_n}{n \log n}. \qquad \textit{Wtedy}$$

(*a*) *jeśli* $\liminf \lambda_n > 1$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$,

(*b*) *jeśli* $\lambda_n \le 1$ *dla dużych* n, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(*c*) *jeśli* $\limsup \lambda_n < 1$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$.

Twierdzenie 32 (Uogólnione kryterium Schlömilcha). [H6, Lemma 6.4]
Zakładamy, że $a \in \mathrm{SQ}$, $m \in \mathbb{N}$ *i*

$$u_n = n \ln \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \qquad \textit{Wtedy}$$

(1) *jeśli* $\liminf u_n > m$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$,

(2) *jeśli* $u_n \le m$ *dla dużych* n, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(3) *jeśli* $\limsup u_n < m$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(4) *jeśli* $\lim u_n = \infty$, *to* $a \in \mathrm{A}(\infty)$.

Twierdzenie 33 (Uogólnione kryterium Kummera). [H6, Lemma 6.6]
Zakładamy, że a, c *są ciągami dodatnimi*, $m \in \mathbb{N}$ *i*

$$K_n = \frac{c_n a_n}{a_{n+1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m-1} - c_{n+1}. \qquad \textit{Wtedy}$$

(1) *jeśli* $\liminf K_n > 0$, *to* $a \in \mathrm{A}(m)$,

(2) *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}$ *jest rozbieżny i* $K_n \le 0$ *dla dużych* n, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$,

(3) *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}$ *jest rozbieżny i* $\limsup K_n < 0$, *to* $a \notin \mathrm{A}(m)$.

Uwaga. Łatwo sprawdzić, że

$$\{a \in \mathrm{SQ} : \limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} < 1\} \subset \mathrm{A}(\infty) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{o}(n^s) = \mathrm{o}(n^{-\infty}).$$

To oznacza, że każdy ciąg, którego sumowalność wynika z klasycznego kryterium pierwiastkowego lub ilorazowego jest elementem przestrzeni $\mathrm{A}(\infty)$.

Z formalnego punktu widzenia tytuł niniejszego paragrafu powinien być sformułowany następujaco: Kryteria wielokrotnej bezwzględnej zbieżności szeregów. Nie jest to jednak konieczne, bo sytuacja jest analogiczna do przypadku klasycznego gdzie kryteria bezwzględnej zbieżności szeregów są w istocie kryteriami zwykłej zbieżności szeregów nieujemnych.

3.9 Rozwiązania równań różniczkowych

Równania różniczkowe to dziedzina matematyki znacznie szerzej rozwinięta niż równania różnicowe. Wiadomo, że istnieje bardzo wiele analogii, ale też wiele różnic między teorią równań różniczkowych i teorią równań różnicowych. Z punktu widzenia badania asymptotycznych własności rozwiązań najbardziej istotną różnicą wydaje się być następująca: jeśli x jest ciągiem zbieżnym do zera, to Δx też jest zbieżny do zera, a jeśli $f(t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to z warunku $\lim_{t\to\infty} f(x) = 0$ nie wynika $\lim_{t\to\infty} f'(x) = 0$. Inna różnica, powód wprowadzenia topologii regionalnej, była opisana wcześniej. Oczywiście, również w badaniach asymptotycznych własności rozwiązań istnieją analogie. W pracy [H5] autor przedstawił dwa ciągi wyników prowadzących do analogicznych twierdzeń, z których pierwsze dotyczy równań różnicowych, a drugie równań różniczkowych. To drugie twierdzenie przedstawiamy poniżej.

Zakładamy, że $f \in \mathrm{C}[t_0,\infty)$ i $\int_{t_0}^{\infty} s^{m-1}|f(s)|ds < \infty$. Określamy funkcję

$$r^m f : [t_0,\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{wzorem} \quad (r^m f)(t) = \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds.$$

Twierdzenie 34. [H5, Theorem 5.1] *Zakładamy, że* $U \subset \mathbb{R}$, $M \ge 1$, $t_0 \in [0,\infty)$, $\mu > 0$,

$$\alpha \in (-\infty, 0], \quad I = [t_0,\infty), \quad f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \|f|I \times U\| \le M,$$

$f|I \times U$ *jest ciągła,* $a, b \in \mathrm{C}(I)$, $y \in \mathrm{C}^m(I)$, $y^{(m)} = b$,

$$M \int_{t_0}^{\infty} s^{m-1-\alpha}|a(s)|ds \le \mu \quad i \quad y(I) \subset \mathrm{Int}(U,\mu).$$

Wtedy istnieje funkcja $x \in \mathrm{C}^m(I)$ *taka, że* $x(t) = y(t) + \mathrm{o}(t^\alpha)$ *i*

$$x^{(m)}(t) = a(t)f(t,x(t)) + b(t) \quad dla \quad t > t_0.$$

3.10 Uwagi

Nowa teoria jakościowej aproksymacji rozwiązań równań różnicowych znajduje się na wstępnym etapie rozwoju. Na razie tylko w dwóch pracach [H6] i [H7] zostały użyte ogólne asymptotyczne m-pary. Prawdopodobnie większość wcześniejszych wyników dotyczących równań zwyczajnych można uogólnić używając abstrakcyjnych asymptotycznych m-par.

Innym kierunkiem rozwoju bądą poszukiwania nowych przykładów m-par. Wydaje się, że badanie różnych podprzestrzeni przestrzeni $\mathrm{A}(\infty)$ bądzie jednym ze źródeł nowych m-par. Pary takie pozwolą aproksymować rozwiązania w stopniu znacznie wyższym niż dotychczas stosowane.

Prawdopodobnie większość wyników uzyskanych dla równań autonomicznych np. w pracach [H4] i [H6] można "uogólnić" na przypadek nieautonomiczny. Problem nie jest trywialny, a uogólnienie zwykle nie jest bezpośrednie. Główna trudność polega na tym, że w przypadku autonomicznym używamy funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i z ograniczoności ciągu $(f(x_n))$ wynika ograniczoność ciągu $(f(x_{\sigma(n)}))$ dla dowolnego $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, natomiast w przypadku nieautonomicznym używamy funkcji $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i z ograniczoności ciągu $(f(n, x_n))$ nie wynika ograniczoność ciągu $(f(n, x_{\sigma(n)}))$ nawet dla bardzo regularnych ciągów σ np. $\sigma(n) = n - 1$ dla $n \geq 2$. Przykład odpowiadających sobie twierdzeń w przypadku autonomicznym i nieautonomicznym stanowią twierdzenie 6 i twierdzenie 7.

W pracy [22] zastosowano nową teorię do badania asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych Volterry. Użyto tam jednak tylko m-par postaci $(\mathrm{A}(m-s), \mathrm{o}(n^s))$. Prawdopodobnie większość wyników z [22] można uogólnić na przypadek dowolnych zanikających m-par. Wyniki z [22] można uogólnić także w innym kierunku. Mianowicie można zastąpić funkcję $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operatorem $F : \mathrm{SQ} \to \mathrm{SQ}$, rozważać równanie postaci

$$\Delta^m x_n = b_n + \sum_{i=1}^{n} K(n,i) F(x(i))$$

i zastosować wyniki lub metody z pracy [H7].

Prawdopodobnie duża część wyników nowej teorii jakościowej aproksymacji rozwiązań równań różnicowych ma swoje odpowiedniki w teorii równań różniczkowych. Można tak sądzić na podstawie wyników opublikowanych w pracy [H5]. W ostatnich latach rozwijana jest teoria systemów dynamicznych na tzw. skalach czasowych. Teoria ta zawiera jako szczególne przypadki teorie równań różniczkowych i równań różnicowych. Część wyników autora ma odpowiedniki w ogólnej teorii systemów dynamicznych na skalach czasowych. Np. niektóre wyniki z pracy [12] zostały uogólnione przez Akyn-Bohner i innych w [32].

4 Omówienie wyników pozostałych prac naukowych

4.1 Rozwiązania dyskretnych równań Volterry

Równania różnicowe Volterry opisują procesy, których stan w danej chwili jest zależny od całej poprzedniej historii. Są one szeroko stosowane w modelowaniu wielu zjawisk, a także w metodach numerycznych rozwiązywania całkowych równań Volterry. Asymptotyczne własności rozwiązań równań różnicowych Volterry były badane przez wielu autorów. W szczególności ograniczoność rozwiązań była badana np. w pracach: [40], [45], [52], [56], [58], [67], [79], [81], [83]. Asymptotycznie okresowe rozwiązania były badane np. w pracach: [33], [43, 44], [57].

Przedstawimy teraz cztery twierdzenia z pracy [22], w której były badane asymptotyczne własności rozwiązań dyskretnych równań Volterry. Zakładamy, że

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad K(n,i) = 0 \quad \text{dla} \quad n < i$$

i rozważamy nieliniowe równanie różnicowe Volterry postaci

$$\Delta^m x_n = b_n + \sum_{i=1}^{n} K(n,i) f(i, x_i) . \tag{VE}$$

Traktujemy to równanie jako uogólnienie równania zwyczajnego postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(n, x_n) + b_n. \tag{12}$$

Istotnie, jeśli $K(n,i) = 0$ dla $i < n$ i $a_n = K(n,n)$, to równanie (VE) przybiera postać (12).

$$\text{Zakładamy, że} \quad s \in (-\infty, m-1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1-s} \sum_{i=1}^{n} |K(n,i)| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}(0, m-1)$$

i f jest funkcją ciągłą i (g, n^{-k})-ograniczoną.

Twierdzenie 35. [22, Theorem 3.1] *Jeśli* $p \in \mathbb{N}$, $Q, L, M > 0$, $g(t) \le M$ *dla* $t \le L$,

$$s \le 0, \quad y \in \Delta^{-m} b, \quad M \sum_{n=p}^{\infty} n^{m-1} \sum_{i=1}^{n} |K(n,i)| \le Q \quad i \quad |y_n| \le Ln^k - Q, \quad \textit{dla każdego} \;\; n$$

to istnieje p*-rozwiązanie* x *równania* (VE) *takie, że* $x = y + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 36. [22, Theorem 3.2] *Jeśli* $s \le 0$, *funkcja* g *jest lokalne ograniczona i* $y \in \mathrm{O}(n^k) \cap \Delta^{-m} b$, *to istnieje rozwiązanie* x *równania* (VE) *takie, że* $x = y + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 37. [22, Theorem 3.5] *Jeśli* $s \le 0$, g *jest lokalnie ograniczona i* $b \in \mathrm{A}(m-s)$ *to dla każdego ciągu* $\varphi \in \mathrm{Pol}(k)$ *istnieje rozwiązanie* x *równania* (VE) *takie, że* $x = \varphi + \mathrm{o}(n^s)$.

Twierdzenie 38. [22, Theorem 3.11] *Jeśli* $k = m-1$, g *jest niemalejąca,* $b \in \mathrm{A}(m-s)$ *i* $\int_1^\infty dt/g(t) = \infty$, *to* $\mathrm{Sol}_\infty(\mathrm{VE}) \subset \mathrm{Pol}(m-1) + \mathrm{o}(n^s)$.

4.2 Rozwiązania równań typu neutralnego

W pracy [16] autor przedstawił następujący lemat i twierdzenie uogólnione później w [H9].

Lemat 13. [16, Lemma 4] *Zakładamy, że* $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| \ne 1$, $u_n = c + \mathrm{o}(1)$, $z_n = x_n + u_n x_{n-k}$ *i spełniona jest alternatywa* $|c| < 1$ *lub* $x \in \mathrm{O}(n^\infty)$. *Wtedy*

$$z \in \mathrm{Pol}(1) + \mathrm{o}(1) \;\Rightarrow\; x \in \mathrm{Pol}(1) + \mathrm{o}(1).$$

Twierdzenie 39. [16, Theorem 2] *Zakładamy, że* $p \in [0,1) \cup (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, *funkcja* g *jest niemalejąca,* $a \in \mathrm{A}(2)$ *funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest* (g, n^{-1})*-ograniczona,* $\int_1^\infty dt/g(t) = \infty$ *i* x *jest nieoscylującym rozwiązaniem równania*

$$\Delta^2 (x_n + p x_{n-k}) = f(n, x_n),$$

Wtedy istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ *takie, że* $x_n = an + b + \mathrm{o}(1)$.

4.3 Rozwiązania równań wyższych rzędów

Wyniki z prac [12], [19], [20] dotyczących rozwiązań równań różnicowych zwyczajnych wyższych rzędów zostały w następnych pracach w większości uogólnione. W pracy [19] badane były rozwiązania równań autonomicznych postaci

$$\Delta^m x_n = a_n f(x_{\sigma_1(n)}, \dots, x_{\sigma_k(n)}) + b_n, \quad f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad \sigma_1, \dots \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$

W pracy [20] po raz pierwszy badany był operator reszt r^m. Na uwagę zasługują następujące dwa lematy.

Lemat 14. [19, Lemma 2] *Jeśli* $x \in \mathrm{o}(1)$, *to*

$$x_n = (-1)^m \sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i=i_{m-1}}^{\infty} \Delta^m x_{i_m} \quad \textit{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemat 15. [20, Lemma 6] *Jeśli ciąg* $x \in \mathrm{SQ}$ *jest zbieżny do* c, *to*

$$\Delta^m x \in \mathrm{S}(m) \quad i \quad r^m \Delta^m x = (-1)^m (x - c).$$

4.4 Rozwiązania równań rzędu 1 i 2

W pracach [14], [10], [11], [13] przedstawione zostały różne wyniki dotyczące asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych zwyczajnych rzędu 1 i 2. Większość z nich została później uogólniona. Następujące twierdzenie nie było później uogólniane.

Twierdzenie 40. [14, Theorem 4] *Zakładamy, że* $a, b \in \mathrm{SQ}$, (φ_n) *jest ciągiem funkcji* $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\varphi_n(0) = 0$ *dla każdego* n, $A, B \subset \mathbb{R}$, $a_n \in A$ *dla każdego* n, $\varphi_n(t)/t \in B$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *i* $t \neq 0$. *Niech* x *oznacza nietrywialne rozwiązanie równania*

$$\Delta x_n = a_n \varphi_n(x_{\sigma(n)}) + b_n.$$

Wtedy

(*a*) *jeśli* $AB \subset (-\infty, 1]$, *to* x *ma stały znak dla dużych* n,

(*b*) *jeśli* $AB \subset [1, \infty)$, *to* x *jest naprzemienny dla dużych* n,

(*c*) *jeśli* $AB \subset [0, 2]$, *to* $|x|$ *jest niemalejący,*

(*d*) *jeśli* $AB \subset (0, 2)$, *to* $|x|$ *jest rosnący dla dużych* n,

(*e*) *jeśli* $AB \subset [\varepsilon, 2 - \varepsilon]$, *to* x *jest nieograniczony,*

(*f*) *jeśli* $AB \subset (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, *to* $|x|$ *jest nierosnący dla dużych* n,

(*g*) *jeśli* $AB \subset (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, *to* $|x|$ *jest malejący dla dużych* n,

(*h*) *jeśli* $AB \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [2 + \varepsilon, \infty)$, *to* x *jest zbieżny do zera.*

Badania asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych w ostatnich latach dotyczą najczęściej równań wyższych rzędów. Dla równań niskich rzędów badane są zagadnienia specjalne. Jednak niektóre "klasyczne" problemy pozostają lub długo pozostawały nierozwiązane. Jednym z nich było następujące zagadnienie:

Od dawna wiadomo, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła na pewnym otoczeniu punktu b, to równanie

$$\Delta x_n = a_n f(x_n)$$

posiada rozwiązanie zbieżne do b. Pytanie o to, czy ciągłość funkcji f na otoczeniu punktu b może być zastąpiona ciągłością w punkcie b pozostawało bez odpowiedzi do 2016 r. W [24] autor przedstawił poniższy kontrprzykład.

Przykład 13. [24, Example 1] *Zakładamy, że* $a_n = 2^{-2^n}$. *Wtedy każde rozwiązanie równania*

$$\Delta x_n = a_n f(x_n), \qquad f(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \in \mathbb{Q} \\ t & dla \quad t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

jest ciągiem zbieżnym do niewymiernej granicy a funkcja f *jest ciągła w punkcie* $1 \in \mathbb{Q}$.

Ciągłość w punkcie b nie jest więc warunkiem wystarczającym do istnienia rozwiązania zbieżnego do b. Nie jest też warunkiem koniecznym co wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 41. [24, Theorem 1] *Zakładamy, że* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny i spełniony jest przynajmniej jeden z warunków:*

(*a*) $a_n \geq 0$ *dla dużych* n, f *jest ciągła na* (a, b), *istnieje i jest dodatnia granica* $\lim\limits_{t \to b-} f(t)$,

(*b*) $a_n \geq 0$ *dla dużych* n, f *jest ciągła na* (b, c), *istnieje i jest ujemna granica* $\lim\limits_{t \to b+} f(t)$,

(*c*) $a_n \leq 0$ *dla dużych* n, f *jest ciągła na* (a, b), *istnieje i jest ujemna granica* $\lim\limits_{t \to b-} f(t)$,

(*d*) $a_n \leq 0$ *dla dużych* n, f *jest ciągła na* (b, c), *istnieje i jest dodatnia granica* $\lim\limits_{t \to b+} f(t)$.

Wtedy istnieje rozwiązanie równania $\Delta x_n = a_n f(x_{\sigma(n)})$ *zbieżne do* b.

4.5 Nieprzemienne twierdzenie Gelfanda-Najmarka

W tym paragrafie omówione zostanie uogólnienie twierdzenia Gelfanda-Najmarka przedstawione w pracy [26]. Gelfand i Najmark udowodnili, że jeśli A jest przemienną C*-algebrą to tzw. transformacja Gelfanda $A \to \mathrm{C}_0(M_A)$ jest $*$-izomorfizmem algebry A na algebrę $\mathrm{C}_0(M_A)$ funkcji ciągłych i znikających w nieskończoności na przestrzeni M_A ideałów maksymalnych algebry A. Twierdzenie to zostało uogólnione przez J. M. G. Fella w pracy [115] i, niezależnie, przez J. Tomiyamę w pracy [116] na klasę C*-algebr, których prymitywne spektrum jest przestrzenią Hausdorffa. Następnie nieco inną metodą zostało uogólnione, na klasę C*-algebr z jedynką, przez J. Daunsa i K. H. Hofmanna w pracy [112]. Twierdzenie 43 jest uogólnieniem obu tych rezultatów na klasę wszystkich C*-algebr.

Omówienie tego twierdzenia wymaga sporej dawki terminologii. Zostanie ona przedstawiona w największym skrócie. Ogólne informacje na temat C*-algebr i topologii prymitywnego spektrum można znaleźć w książce [113]. Informacji na temat C*-wiązek można szukać w [114]. Omówienie znaczenia twierdzenia 43 wymaga przytoczenia kilku rezultatów z [25]. Niestety z różnych, niematematycznych, powodów wyniki te nie zostały opublikowane.

Ideałem prymitywnym C*-algebry A nazywamy jądro nieprzywiedlnej reprezentacji tej algebry tzn. $*$-morfizmu $\varphi : A \to \mathrm{B}(H)$, gdzie $\mathrm{B}(H)$ jest algebrą operatorów ograniczonych na pewnej przestrzeni Hilberta H, spełniającego warunek: jeśli K jest liniową podprzestrzenią przestrzeni H taką, że $\varphi(A)K \subset K$, to $K = H$ lub $K = 0$.

Zbiór $\check{A}$ wszystkich ideałów prymitywnych C*-algebry A wyposażony w topologię Jacobsona (zbiór $T \subset \check{A}$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór S algebry A taki, że

$T = \{P \in \check{A} : S \subset P\}$) nazywamy prymitywnym spektrum tej algebry.

Przestrzeń topologiczną X nazywamy quasizwartą jeśli każde jej pokrycie otwarte zawiera skończone podpokrycie, jeśli ponadto jest przestrzenią Hausdorffa, to mówimy, że jest zwarta. Jeśli każdy punkt przestrzeni X posiada quasizwarte otoczenie, to mówimy, że X jest lokalnie quasizwarta, jeśli ponadto jest przestrzenią Hausdorffa, to mówimy, że jest lokalnie zwarta.

Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ przestrzeni topologicznej X znika w nieskończoności jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje quasizwarty podzbiór Z przestrzeni X taki, że $|f(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \notin Z$.

Prymitywne spektrum każdej C*-algebry A jest przestrzenią lokalnie quasizwartą, jeśli ponadto algebra A ma jedynkę, to $\check{A}$ jest przestrzenią quasizwartą.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną i τ jest relacją na X określoną następująco: $x \,\tau\, y$ jeśli każdy zbiór otwarty zawierający x ma niepusty przekrój z każdym zbiorem otwartym zawierającym y, to τ jest relacją równoważności, przestrzeń ilorazowa X/τ jest przestrzenią Hausdorffa a odwzorowanie ilorazowe $X \to X/\tau$ nazywamy hausdorffizacją przestrzeni X.

Zakładamy, że $p : T \to X$ jest ciągłą i otwartą surjekcją przestrzeni topologicznej T na przestrzeń topologiczną X,

$$\xi = (T, p, X), \qquad T \oplus T = \{(t, u) \in T \times T : p(t) = p(u)\}$$

Mówimy, że ξ jest FC*-wiązką jeśli dla każdego $x \in X$ zbiór $T_x = p^{-1}x$ jest C*-algebrą, odwzorowania: $T \oplus T \to T$, $(t, u) \mapsto t + u$, $(t, u) \mapsto tu$,

$$\mathbb{C} \times T \to T,\ (\lambda, t) \mapsto \lambda t, \quad T \to T,\ t \mapsto t^*, \quad T \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|t\|$$

są ciągłe i jeśli W jest otoczeniem w T punktu 0_x oznaczającego zero algebry T_x to istnieją: otoczenie V punktu x w X i $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\{t \in T : p(t) \in V \text{ i } \|t\| < \varepsilon\} \subset W.$$

Jeśli warunek ciągłości normy $t \mapsto \|t\|$ zastąpimy półciągłością z góry, to mówimy, że ξ jest HC*-wiązką. Przestrzenie T i X nazywamy odpowiednio: przestrzenią totalną i bazą wiązki ξ. Odwzorowanie p nazywamy rzutowaniem tej wiązki, a algebry T_x jej włóknami. Odwzorowanie

$$s : X \to T$$

nazywamy cięciem tej wiązki jeśli jest ciągłe i spełnia warunek: $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Cięcie s nazywamy ograniczonym jeśli funkcja $x \mapsto \|s(x)\|$ jest ograniczona, jeśli ponadto funkcja ta znika w nieskończoności, to mówimy, że cięcie s znika w nieskończoności. Można wykazać, że jeśli ξ jest HC*-wiązką, to zbiór $\Gamma_b(\xi)$ wszystkich jej ograniczonych cięć z naturalnie określonymi działaniami jest C*-algebrą, a zbiór $\Gamma_0(\xi)$ wszystkich cięć znikających w nieskończoności jest C*-podalgebrą algebry $\Gamma_b(\xi)$.

H-rodziną C*-algebry A nazywamy rodzinę $\varphi = \{\varphi_x\}_{x \in X}$ $*$-epimorfizmów $\varphi_x : A \to \xi_x$, taką, że X jest przestrzenią topologiczną, $\xi = \{\xi_x\}_X$ jest rodziną C^*-algebr i dla każdego $s \in A$ funkcja $x \mapsto \|\varphi_x(s)\|$ jest półciągła z góry i znikająca w nieskończoności. Rodziną tą oznaczamy też symbolem $\varphi : A \to \xi$.

Załóżmy, że $\varphi : A \to \xi$ jest H-rodziną i $\xi = \{\xi_x\}_X$. Symbolem $b(\varphi)$ oznaczamy trójkę

$(p, \coprod \xi, X)$, gdzie $p : \coprod \xi \to X$ jest kanonicznym rzutowaniem sumy rozłącznej, $\coprod \xi$ jest wyposażona w topologię generowaną przez wszystkie zbiory postaci

$$T(V, s, \varepsilon) = \coprod_{x \in V} \mathrm{B}(\varphi_x(s), \varepsilon)$$

(rozłączna suma otwartch kul), gdzie V jest zbiorem otwartym w X, $s \in A$, $\varepsilon > 0$. Można wykazać, że $b(\varphi)$ jest HC*-wiązką i wzór $\tilde{\varphi}(s)(x) = \varphi_x(s)$ określa $*$-morfizm

$$\tilde{\varphi} : A \to \Gamma_0(b(\varphi)).$$

Zakładamy, że X jest zbiorem i $c : \check{A} \to X$. Dla każdego $x \in X$ symbolem

$$\bar{c}_x : A \to A / \bigcap c^{-1}(x)$$

oznaczamy kanoniczne odwzorowanie ilorazowe. Można wykazać, że jeśli X jest topologiczną przestrzenią Hausdorffa, to $\bar{c} = \{\bar{c}_x\}_{x \in X}$ jest H-rodziną C*-algebry A.

Następujące twierdzenie pełniło kluczową rolę w dowodzie twierdzenia 43.

Twierdzenie 42 (Twierdzenie Stone-Weierstrassa dla H-rodzin). [26, Theorem 1] *Zakładamy, że* $\varphi : A \to \{\xi_x\}_X$ *jest H-rodziną,* B *jest C*-podalgebrą algebry* A *taką, że* $B + (\operatorname{Ker} \varphi_x \cap \operatorname{Ker} \varphi_y) = A$ *dla wszystkich* $x, y \in X$. *Wtedy* $B + \bigcap_{x \in X} \operatorname{Ker} \varphi_x = A$.

Twierdzenie 43 (Nieprzemienne twierdzenie Gelfanda-Najmarka). [26, Theorem 2] *Jeśli* $h : \check{A} \to h(\check{A})$ *jest hausdorfizacją prymitywnego spektrum C*-algebry* A, *to transformacja* $\tilde{\bar{h}}$ *jest* $*$*-izomorfizmem algebry* A *na algebrę* $\Gamma_0(b(\bar{h}))$.

Jeśli spektrum $\check{A}$ jest przestrzenią Hausdorffa, to twierdzenie 43 pokrywa się z uogólnieniem twierdzenia Gelfanda-Najmarka otrzymanym przez J. M. G. Fella i J. Tomiyamę. Jeśli A jest C*-algebrą z jedynką, to twierdzenie 43 pokrywa się z uogólnieniem twierdzenia Gelfanda-Najmarka otrzymanym przez J. Daunsa i K. H. Hofmanna. Oczywiście w przypadku przemiennych C*-algebr wszystkie te twierdzenia pokrywają się z klasycznym twierdzeniem Gelfanda-Najmarka.
Twierdzenia Fella-Tomiyamy i Daunsa-Hofmanna różnią się jakościowo. Mianowicie, C*-wiązka $b(\bar{h})$ z Twierdzenia 43 w przypadku Fella-Tomiyamy jest zawsze FC*-wiązką, którą dla większej wyrazistości możemy nazwać ciągłą C*-wiązką, a w przypadku Daunsa-Hofmanna może to być HC*-wiązka czyli półciągła C*-wiązka (litery F i H w nazwach tych wiązek pochodzą od nazwisk Fella i Hofmanna, którzy je po raz pierwszy wprowadzili).
Naturalne jest pytanie, czy używając tylko ciągłych C*-wiązek można uogólnić twierdzenie Gelfanda-Najmarka na klasę wszystkich C*-algebr ? Negatywna odpowiedź została przedstawiona w [25].
Reprezentacją Tomiyamy C*-algebry A nazywamy $*$-izomorfizm tej algebry na algebrę $\Gamma_0(\xi)$ gdzie ξ jest ciągłą C*-wiązką nad przestrzenią lokalnie zwartą. W naturalny sposób można określić równoważność dwóch reprezentacji Tomiyamy.
Niech T_A oznacza zbiór wszystkich klas równoważności reprezentacji Tomiyamy algebry A. Ponadto niech τ_A oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności σ na $\check{A}$ takich, że przestrzeń ilorazowa $\check{A}/\sigma$ jest przestrzenią Hausdorffa, a odwzorowanie ilorazowe $q_\sigma : \check{A} \to \check{A}/\sigma$ jest otwarte. J. Tomiyama w [116, Theorem 3.1] wykazał, że dla każdego elementu σ zbioru τ_A odwzorowanie $\tilde{\bar{q}}_\sigma$ jest reprezentacją Tomiyamy algebry A. W [25] wykazano, że przyporządkowanie

$$\sigma \mapsto [\tilde{\bar{q}}_\sigma]$$

każdemu elementowi σ zbioru τ_A klasy równoważności reprezentacji $\tilde{\tilde{q}}_\sigma$ jest bijekcją zbioru τ_A na zbiór T_A. To oznacza, że zbiór τ_A klasyfikuje z dokładnością do równoważności wszystkie reprezentacje Tomiyamy algebry A. Relacja inkluzji w zbiorze $\check{A}\times\check{A}$ określa naturalny częściowy porządek w τ_A. Jeśli spektrum $\check{A}$ jest przestrzenią Hausdorffa, to $\sigma = \mathrm{id}_{\check{A}}$ jest elementem najmniejszym w τ_A, a reprezentacja $\tilde{\tilde{q}}_\sigma$ jest uogólnieniem transformacji Gelfanda-Najmarka otrzymanym przez Tomiyamę i Fella.
Możemy teraz wprowadzić następującą definicję: C*-algebrę A nazywamy algebrą Tomiyamy jeśli w zbiorze τ_A istnieje element najmniejszy. Oczywiście, jeśli spektrum $\check{A}$ jest przestrzenią Hausdorffa, to A jest C*-algebrą Tomiyamy. Jeśli A jest algebrą Tomiyamy, to reprezentacja określona przez najmniejszy element w τ_A jest naturalnym uogólnieniem klasycznej transformacji Gelfanda-Najmarka.
W [25] skonstruowano przykłady C*-algebr Tomiyamy A takich, że spektrum $\check{A}$ nie jest przestrzenią Hausdorffa i przykłady C*-agebr, które nie są algebrami Tomiyamy. Z istnienia tych przykładów wynika, że używając ciągłych C*-wiązek można w istotny sposób rozszerzyć twierdzenie Fella-Tomiyamy na klasę C*-algebr Tomiyamy, ale nie można rozszerzyć na klasę wszystkich C*-algebr.

5 Sumaryczny impact factor, liczba cytowań i indeks Hirscha

Sumaryczny Impact Factor moich publikacji naukowych według listy Journal Citation Reports (JCR) zgodnie z rokiem opublikowania wynosi **8.763**, a według JCR Science Edition 2015: **10.223**.

Na podstawie bazy *Web of Science* (dane z „Cited References Search") moje prace były cytowane łącznie **103** razy.

Liczba cytowań według bazy Web of Science (WoS) wynosi **70** (w tym 34 to autocytowania).
Indeks Hirscha według bazy Web of Science (WoS) wynosi **5.**

Według MathSciNet moje prace były cytowane 51 razy przez 27 autorów (h-index =5).

6 Literatura

Prace autora

[1] J. Migda, *Asymptotically polynomial solutions of difference equations*, Adv. Difference Equ. (2013), 2013:92, 1–16.

[2] J. Migda, *Approximative solutions of difference equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2014), No. 13, 1–26.

[3] J. Migda, *Approximative full solutions of difference equations*, Int. J. Difference Equ. (2014), 9, 111–121.

[4] J. Migda, *Iterated remainder operator, tests for multiple convergence of series and solutions of difference equations*, Adv. Difference Equ. (2014), 2014:189, 1–18.

[5] J. Migda, *Regional topology and approximative solutions of difference and differential equations*, Tatra Mt. Math. Publ. 63 (2015), 183—203.

[6] J. Migda, *Qualitative approximation of solutions to difference equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2015), No. 32, 1–26.

[7] J. Migda, *Mezocontinuous operators and solutions of difference equations* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2016), No. 11, 1–16.

[8] J. Migda, *Approximative solutions to difference equations of neutral type*, Appl. Math. Comput. (2015), 268, 763—774.

[9] J. Migda, *Asymptotically polynomial solutions to difference equations of neutral type*, Appl. Math. Comput. (2016), 279, 16–27.

[10] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic properties of the solutions of the second order difference equations*, Archivum Math. 34 (1998), 467–476.

[11] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic behaviour of solutions of difference equations of second order*, Demonstratio Math. 32, 4(1999), 767–773.

[12] M. Migda, J. Migda, *On the asymptotic behavior of solutions of higher order nonlinear difference equations,* Nonlinear Anal. 47 (2001), 4687–4695.

[13] A. Drozdowicz, J. Migda, *On asymptotic behavior of solutions of some difference equation*, Math. Slovaca 52 (2002), no. 2, 207–214.

[14] J. Migda, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear difference equations*, Math. Bohem. 129 (2004), no. 4, 349–359.

[15] M. Migda, J. Migda, *On a class of first order nonlinear difference equations of neutral type*, Math. Comput. Modelling 40 (2004), 297–306.

[16] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic properties of solutions of second-order neutral difference equations*, Nonlinear Anal. 63 (2005), e789–e799.

[17] J. Migda, M. Migda, *Asymptotically polynomial solutions of higher order difference equations*, (English) Ruffing, A. (ed.) et al., Communications of the Laufen colloquium on science, 2007. Aachen: Shaker. Berichte aus der Mathematik, 11. 1–12 (2007).

[18] M. Migda, J. Migda, *Oscillatory and asymptotic properties of solutions of even order neutral difference equations*, J. Difference Equ. Appl. 15 (11–12) (2009), 1077–1084.

[19] J. Migda, *Asymptotic properties of solutions of higher order difference equations*, Math. Bohem. 135 (2010), no. 1, 29–39.

[20] J. Migda, *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Difference Equations*, Arch. Math.(Brno) 46 (2010), 1–11.

[21] M. Migda, J. Migda, *On first-order nonlinear difference equations of neutral type*, Elaydi, Saber (ed.) et al., Discrete dynamics and difference equations. Proceedings of the twelfth international conference on difference equations and applications (ICDEA), Lisbon, Portugal, July 23–27, 2007. Hackensack, NJ: World Scientific. 345–354 (2010).

[22] J. Migda, M. Migda, *Asymptotic behavior of solutions of discrete Volterra equations*, Opuscula Math. 36 (2016), no. 2, 265–278.

[23] M. Migda, J. Migda, *Bounded solutions of nonlinear discrete Volterra equations*, Math. Slovaca 66 (2016), no. 5, 1–10.

[24] J. Migda, *Convergence of solutions to first order difference equations*, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016, ICNAAM 2016, Rhodes, Greece, Sept. 18-25, Regalscope Limited 1 Pallados Street, PC 8046, Paphos, Cyprus (conf. org.), AIP Conf. Proc., (publ. by) American Institute of Physics, 2016 (w druku).

[25] J. Migda, *Włókniste reprezentacje C*-algebr*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu 1986, praca doktorska.

[26] J. Migda, *Noncommutative Gelfand-Naimark theorem*, Comment. Math. Univ. Carolin. 34 (1993), no.2, 253–255.

Cytowane prace innych autorów

[27] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: theory, methods, and applications.* Second edition. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[28] R.P. Agarwal, M. Bohner, T. Li, C. Zhang, *Oscillation of second-order Emden-Fowler neutral delay differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. 193 (2014), no. 6, 1861–1875.

[29] R.P. Agarwal, M. Bohner, T. Li, C. Zhang, *Comparison theorems for oscillation of second-order neutral dynamic equations*, Mediterr. J. Math. 11 (2014), no. 4, 1115–1127.

[30] R. P. Agarwal, S. Djebali, T. Moussaoui, O. G. Mustafa, *On the asymptotic integration of nonlinear differential equations*, J. Comput. Appl. Math. 202 (2007), 352–376.

[31] R.P. Agarwal, M.M.S. Manuel, E. Thandapani, *Oscillatory and nonoscillatory behavior of second order neutral delay difference equations*, Math. Comput. Modelling 24(1996), 5–11.

[32] E. Akin-Bohner, M. Bohner, S. Djebali, T. Moussaoui, On the asymptotic integration of nonlinear dynamic equations. Adv. Difference Equ. 2008, Art. ID 739602, 17 pp.

[33] C.T.H. Baker, Y. Song, *Periodic solutions of non-linear discrete Volterra equations with finite memory*, J. Comput. Appl. Math. 234 (2010), no. 9, 2683–2698.

[34] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, XXV, 1940; third edition 1967.

[35] M. Bohner S. Stević, *Asymptotic behavior of second-order dynamic equations*, Appl. Math. Comput. 188 (2) (2007), 1503–1512.

[36] M. Bohner S. Stević, *Trench's perturbation theorem for dynamics equations*, Discrete Dyn. Nat. Soc. Vol. 2007, Article ID 75672, (2007), 11 pages.

[37] Y. Bolat, O. Akyn, *Oscillatory behaviour of a higher order nonlinear neutral type functional difference equation with oscillating coefficients*, Appl. Math. Lett. 17 (2004), 1073–1078.

[38] G.E. Chatzarakis, J. Diblik, G.N. Miliaras, I.P. Stavroulakis, *Classification of neutral difference equations of any order with respect to the asymptotic behavior of their solutions*, Appl. Math. Comput. 228 (2014), 77–90.

[39] S. S. Cheng, W. T. Patula, *An existence theorem for a nonlinear difference equation*, Nonlinear Anal. 20 (1993), no. 3, 193–203.

[40] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo and A. Vecchio, *Boundedness of discrete Volterra equations*, J. Math. Anal. Appl. 211(1997), 106–130.

[41] V. B. Demidovič, *A certain criterion for the stability of difference equations*, (Russian), Diff. Urav. 5 (1969), 1247–1255.

[42] J. Diblik, *A criterion of asymptotic convergence for a class of nonlinear differential equations with delay*, Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 6, 4095–4106.

[43] J. Diblík, M. Růžičková, E. Schmeidel, *Asymptotically periodic solutions of Volterra difference equations*, Tatra Mt. Math. Publ. 43, (2009), 43–61.

[44] J. Diblík,, M. Růžičková, L, E. Schmeidel, M. Zbaszyniak, *Weighted asymptotically periodic solutions of linear Volterra difference equations*, Abstr. Appl. Anal. (2011), Art. ID 370982, 14 pp.

[45] J. Diblík and E. Schmeidel, *On the existence of solutions of linear Volterra difference equations asymptotically equivalent to a given sequence*, Appl. Math. Comput. 218(18) (2012), 9310–9320.

[46] A. Drozdowicz, J. Popenda, *Asymptotic behavior of the solutions of the second order difference equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1) (1987), 135–140.

[47] A. Drozdowicz, J. Popenda, *Asymptotic behavior of the solutions of an n-th order difference equations*, Annales Soc. Math. Pol., Com. Math. XXIX (1990), 161–168.

[48] J. Džurina, *Asymptotic behavior of solutions of neutral nonlinear differential equations*, Arch. Math. (Brno), 38 (4) (2002), 319–325.

[49] M. Ehrnstrom, *Linear asymptotic behaviour of second order ordinary differential equations*, Glasgow Math. J. 49 (2007) 105–120.

[50] M. Galewski, R. Jankowski, M. Nockowska-Rosiak, E. Schmeidel, *On the existence of bounded solutions for nonlinear second order neutral difference equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2014), No. 72, 1–12.

[51] A. Gleska, J. Werbowski, *Comparison theorems for the asymptotic behavior of solutions of nonlinear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 226 (1998), no. 2, 456–465.

[52] T. Gronek, E. Schmeidel, *Existence of bounded solution of Volterra difference equations via Darbo fixed-point theorem*, J. Difference Equ. Appl. 19 (2013), no. 10, 1645–1653.

[53] Z. Guo, M. Liu, *Existence of non-oscillatory solutions for a higher-order nonlinear neutral difference equation*, Electron. J. Differential Equations (2010), No. 146, 1–7.

[54] I. Gyori, G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[55] I. Győri, F. Hartung, *Asymptotic behavior of nonlinear difference equations*, J. Difference Equ. Appl. 18(2012) no. 9, 1485–1509.

[56] I. Győri and L. Horvath, *Asymptotic representation of the solutions of linear Volterra difference equations,* Adv. Difference Equ. (2008), ID 932831, 22 pp.

[57] I. Győri and D.W. Reynolds, *On asymptotically periodic solutions of linear discrete Volterra equations*, Fasciculi Mathematici, (2010) no. 44, 53–67.

[58] I. Győri, E. Awwad, *On the boundedness of the solutions in nonlinear discrete Volterra difference equations,* Adv. Difference Equ. (2012)(2) pp. 1–20.

[59] T. G. Hallam, *Asymptotic behavior of the solutions of an nth order nonhomogeneous ordinary differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 177–194.

[60] T. G. Hallam, *Asymptotic integration of second order differential equation with integrable coefficients*, SIAM J. Appl. Math. 19 (1970), 430–439.

[61] J. Hao, S. M. Kang, *Bounded positive solutions of second order nonlinear neutral difference equation*, International Journal of Pure and Applied Mathematics. 79 (2012), no. 4, 655–665.

[62] M. Hasanbulli, Y.V. Rogovchenko, *Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions to n-th order nonlinear neutral differential equations,* Nonlinear Anal. 69 (2008), 1208–1218.

[63] L. He, S. M. Kang, C. Y. Jung, *Bounded positive solutions for a second order neutral delay difference equation*, International Journal of Pure and Applied Mathematics. 77 (2012), no. 1, 63–72.

[64] J. W. Hooker, W. T. Patula, *A second-order nonlinear difference equation: oscillation and asymptotic behavior*, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983), no. 1, 9–29.

[65] X. Huang, Z. Xu, *Nonoscillatory solutions of certain higher order neutral difference equations*, Southeast Asian Bull. Math. 32 (2008), 445–458.

[66] R. Jankowski, E. Schmeidel, *Asymptotically zero solution of a class of higher nonlinear neutral difference equations with quasidifferences,* Discrete Contin. Dyn. Syst. (B) 19 (2014), 8, 2691–2696.

[67] V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, *Some conditions for boundedness of solutions of difference Volterra equations*, Appl. Math. Lett., 16(2003), 857–862.

[68] Q. Kong, *Asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of nth order*, Proc. Amer. Math. Soc., 103(1988), 831–838.

[69] W. T. Li, S. S. Cheng, *Asymptotically linear solutions of a discrete Emden-Fowler equation*, Far East J. Math. Sci., 6 (4) (1998), 521–542.

[70] W. T. Li, S. S. Cheng, *Asymptotic trichotomy for positive solutions of a class of odd order nonlinear neutral difference equations*, Comput. Math. Appl. 35 (1998) no. 8, 101–108.

[71] B. Karpuz, R.N. Rath, S.K. Rath, *On Oscillation and asymptotic behaviour of a higher order functional difference equation of neutral type*, Int. J. Difference Equ. 4(1) (2009), 69–96.

[72] T. Kusano, W. F. Trench, *Global existence theorems for solutions of nonlinear differential equations with prescribed asymptotic behavior*, J. London Math. Soc. 31 (1985), 478–486.

[73] O. Lipovan, *On the asymptotic behavior of the solutions to a class of second order nonlinear differential equations*, Glasgow Math. J. 45 (2003), 179–187.

[74] M. Liu, Z. Guo, *Solvability of a higher-order nonlinear neutral delay difference equation,* Adv. Difference Equ. (2010), Art. ID 767620, 14 pp.

[75] Z. Liu, L. Zhao, S.M. Kang, J.S. Ume, *Existence of uncountably many bounded positive solutions for second order nonlinear neutral delay difference equations,* Comput. Math. Appl. 61 (2011), no. 9, 2535–2545.

[76] Z. Liu, M. Jia, S. M Kang, Y. C. Kwun, *Bounded positive solutions for a third order discrete equation*, Abstr. Appl. Anal. 2012, Art. ID 237036, 12 pp.

[77] Z. Liu, W. Sun, J. S. Ume, S. M. Kang, *Positive solutions of a second-order nonlinear neutral delay difference equation*, Abstr. Appl. Anal. 2012, Art. ID 172939, 30 pp.

[78] Z. Liu, Y. Xu, S.M. Kang, *Global solvability for a second order nonlinear neutral delay difference equation,* Comput. Math. Appl. 57 (2009), no. 4, 587–595.

[79] R. Medina, *Asymptotic behavior of Volterra difference equations*, Comput. Math. Appl. 41(2001), no. 5-6, 679–687.

[80] M. Migda, *Asymptotic properties of nonoscillatory solutions of higher order neutral difference equations*, Opuscula Math. 26 (2006), no. 26, 497–504.

[81] M. Migda, J. Morchało, *Asymptotic properties of solutions of difference equations with several delays and Volterra summation equations*, Appl. Math. Comput. 220 (2013), 365–373.

[82] A.B. Mingarelli, K. Sadarangani, *Asymptotic solutions of forced nonlinear second order differential equations and their extensions*, Electr. J. Differ. Eqs. 2007 (2007) 1–40.

[83] J. Morchało, *Volterra summation equations and second order difference equations*, Math. Bohem. 135(1), (2010), 41–56.

[84] O. G. Mustafa, Y. V. Rogovchenko, *Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations*, Nonlinear Anal., 51, (2002), 339–368.

[85] O. G. Mustafa, Y. V. Rogovchenko, *Global existence and asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations*, Funkcial. Ekvac. 47 (2004), 167–186.

[86] O. G. Mustafa, Y. V. Rogovchenko, *Asymptotic integration of a class of nonlinear differential equations*, Appl. Math. Lett. 19 (2006), 849–853.

[87] O. G. Mustafa, Y. V. Rogovchenko, *Positive solutions of second-order differential equations with prescribed behavior of the first derivative*, pp. 835–842 in Proc. Conf. Differential and Difference Eqns. Appl. (Melbourne, Florida, August 1-5, 2005), eds. R.P. Agarwal, K. Perera, Hindawi Publ. Corp., New York, 2007.

[88] O. G. Mustafa, C. Tunc, *Asymptotically linear solutions of differential equations via Lyapunov functions*, Appl. Math. Comput. 215(8) (2009), 3076–3081.

[89] M. Naito, *An asymptotic theorem for a class of nonlinear neutral differential equations*, Czechoslovak Math. J. 48 (1998), 419–432.

[90] Ch, G. Philos, I. K. Purnaras, P. Ch. Tsamatos, *Asymptotic to polynomials solutions for nonlinear differential equations*, Nonlinear Anal. 59 (2004), 1157–1179.

[91] Ch. G. Philos, P. Ch. Tsamatos, *Solutions approaching polynomials at infinity to nonlinear ordinary differential equations*, Electron. J. Differential Equations 79 (2005), 1–25.

[92] J. Popenda, *Asymptotic properties of solutions of difference equations*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 95(2)(1986), 141–153.

[93] J. Popenda, J. Werbowski, *On the asymptotic behaviour of the solutions of difference equations of second order*, Comment. Math. Prace Mat. 22 (1980), 135–142.

[94] J. Popenda, E. Schmeidel, *On the asymptotic behaviour of nonhomogeneous linear difference equations*, Indian J. Pure Appl. Math. 28(3) (1997), 319–327.

[95] Y. V. Rogovchenko, *On the asymptotic behavior of solutions for a class of second order nonlinear differential equations*, Collect. Math. 49 (1998), 113–120.

[96] S. P. Rogovchenko, Y.V. Rogovchenko, *Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations*, Portugal. Math. 57 (2000), 17–33.

[97] Y. V. Rogovchenko, G. Villari, *Asymptotic behaviour of solutions for second order nonlinear autonomous differential equations*, Nonlinear Differential Equations Appl. 4 (1997), 271–282.

[98] S. Stević, *Asymptotic behaviour of second-order difference equation*, ANZIAM J. 46 (1) (2004), 157–170.

[99] S. Stević, *On solutions of a class of systems of nonlinear functional differential equations of neutral type with complicated deviations of an argument*, Appl. Math. Comput. (2012), 219, 3693–3700.

[100] S. Stević, *Existence of bounded solutions of a class of neutral systems of functional differential equations*, Appl. Math. Comput. (2014), 231, 478–488.

[101] E. Thandapani, R. Arul, J.R. Graef and P.W. Spikes, *Asymptotic behavior of solutions of second order difference equations with summable coefficients*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 27, (1999), 1–22.

[102] E. Thandapani, R. Arul, P.S. Raja, *The asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of nonlinear neutral type difference equations*, Math. Comput. Modelling 39, (2004), 1457–1465.

[103] E. Thandapani, S.L. Marian, J.R. Graef, *Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of neutral difference equations*, IV. Comput. Math. Appl. 45 (2003), no. 6-9, 1461–1468.

[104] E. Thandapani, P. Sundaram, J.R. Graef, P.W. Spikes, *Asymptotic behaviour and oscillation of solutions of neutral delay difference equations of arbitrary order*, Math. Slovaca 47 (1997), no. 5, 539–551.

[105] W. F. Trench, *Asymptotic behavior of solutions of an n-th order differential equation*, Rocky Mountain J. Math. 14 (1984), no. 2, 441–450.

[106] P. Waltman, *On the asymptotic behavior of solutions of a nonlinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 918–923.

[107] Z. Wang, J. Sun, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear higher-order neutral type difference equations*, J. Difference Equ. Appl. 12 (2006), 419–432.

[108] A. Zafer, *Oscillatory and asymptotic behavior of higher order difference equations*, Math. Comput. Modelling 21, 4(1995), 43–50.

[109] C. Zhang, R.P. Agarwal, M. Bohner T. Li, *New oscillation results for second-order neutral delay dynamic equations*, Adv. Difference Equ. (2012), 2012:227, 1–14.

[110] Y. Zhou, B. G. Zhang, *Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral delay difference equations with variable coefficients*, Comput. Math. Appl. 45 (2003), no. 6-9, 991–1000.

[111] Z. Q. Zhu, G. Q. Wang, S. S. Cheng, *A classification scheme for nonoscillatory solutions of a higher order neutral difference equation*, Adv. Difference Equ. 2006, Art. 47654, 1–19.

[112] J. Dauns, K. H. Hofmann, *Representations of rings by sections*, Mem. Amer. Math. Soc. 83 (1968).

[113] J. Dixmier, *C*-algebras*, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[114] M. J. Dupre, M. R. Gillette, *Banach bundles, Banach modules and automorphisms of C*-algebras*, Research Notes in Math. 92, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1983.

[115] J. M. G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math. 106 (1961) 233–280.

[116] J. Tomiyama, *Topological representations of C*-algebras*, Tohoku Math. J. 14 (1962) 187–204.

Janusz Migda