O grafach Reeba i powiązanych obiektach

Łukasz Patryk Michalak

Niniejsza rozprawa przedstawia wyniki dotyczące grafów Reeba funkcji gładkich na rozmaitości. Jednym z podstawowych problemów w tej tematyce, badanym przez różnych autorów, jest wyróżnienie i scharakteryzowanie grafów, które mogą być grafami Reeba określonych klas funkcji. Znacznie trudniejszym problemem jest pytanie o zbiór dopuszczalnych grafów Reeba funkcji na ustalonej rozmaitości. W ten sposób z niezmiennika funkcji otrzymujemy właściwości charakteryzujące rozmaitość samą w sobie. Korzystając z teorii Morse'a oraz metod kombinatorycznych podajemy szereg twierdzeń realizacyjnych dla grafów Reeba, począwszy na wyznaczeniu możliwych rang cyklicznych występujących grafów Reeba, a skończywszy na opisaniu ich typów homeomorfizmu czy izomorfizmu.

Z grafem Reeba w naturalny sposób związane są dwa rodzaje obiektów: epimorfizmy na grupę wolną, zwane epimorfizmami Reeba, które są indukowane na grupach podstawowych przez odwzorowania ilorazowe z rozmaitości do grafu Reeba, oraz systemy hiperpowierzchni w rozmaitości, odpowiadające krawędziom w grafie Reeba poza drzewami rozpinającymi. Przedstawiamy szereg własności tych obiektów i ich związków z grafami Reeba. W szczególności dowodzimy, że każdy epimorfizm z grupy podstawowej rozmaitości na grupę wolną jest indukowany przez system hiperpowierzchni, który nie rozspójnia tej rozmaitości. Pokazujemy także związek klas kobordyzmu obramowanego systemów hiperpowierzchni modulo dyfeomorfizmy rozmaitości z klasami silnej równoważności epimorfizmów na grupy wolne. Dokonujemy pełnego wyliczenia tych klas dla powierzchni. Uzyskane wyniki pozwalają rozszerzyć twierdzenia realizacyjne w celu scharakteryzowania nie tylko grafów Reeba, ale także epimorfizmów Reeba funkcji Morse'a. W przypadku powierzchni podajemy pełną charakteryzację epimorfizmów Reeba prostych funkcji Morse'a oraz ich związek z topologiczną sprzężonością funkcji.

Łukasz Michalak