ZAKŁAD PRZESTRZENI FUNKCYJNYCH I RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

prof. UAM dr hab. Marek Wisła

HISTORIA

- Zakład Teorii Przestrzeni Funkcyjnych powstał w 1987 roku.
- Celem powstania zakładu było zintensyfikowanie badań naukowych nad geometrycznymi własnościami przestrzeni Banacha zapoczątkowanych w Zakładzie Teorii Funkcji Rzeczywistych kierowanym przez prof. dr hab. Juliana Musielaka oraz omawianych na seminariach Oddziału Poznańskiego Instytutu Matematycznego PAN pod kierunkiem prof. dr hab. Władysława Orlicza.
- Od chwili powstania do roku 2016 kierownikiem zakładu był prof. dr hab. Henryk Hudzik.
- Przez jeden rok kierownikiem zakładu był prof. dr hab. Marian Nowak.

HISTORIA

- W roku 2017 nastąpiło połączenie dwóch zakładów – Zakładu Teorii Przestrzeni Funkcyjnych i Zakładu Równań Różniczkowych.
- Do chwili połączenia, Zakładem Równań Różniczkowych kierował prof. dr hab. Ireneusz Kubiaczyk.
- O historii ZRR i badaniach w zakresie równań różniczkowych będzie mówił prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń w drugiej części wykładu.

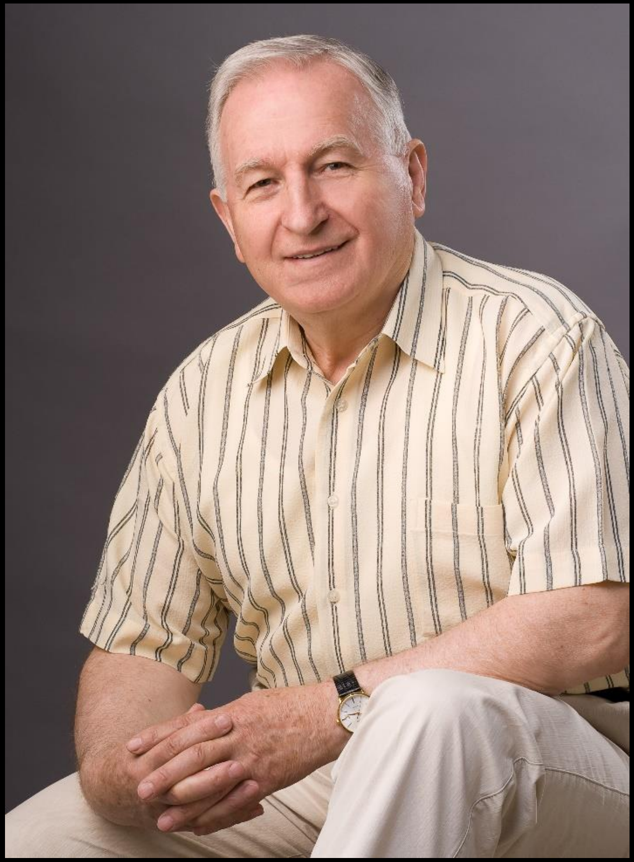
SKŁAD OSOBOWY

- Obecnie w Zakładzie Przestrzeni Funkcyjnych i Równań Różniczkowych pracują:
  - Mieczysław Cichoń
  - Paweł Foralewski
  - Radosław Kaczmarek
  - Aneta Sikorska-Nowak
  - Marek Wisła

SKŁAD OSOBOWY

- W ciągu minionych lat przez ZTPF przewinęło się wiele osób, m.in.
  - Henryk Hudzik
  - Marian Nowak
  - Marek Wisła
  - Łukasz Raczkowski
  - Wojciech Kowalewski
  - Roman Bednarek
  - Paweł Foralewski
  - Karol Wlaźlak
  - Radosław Kaczmarek

HENRYK HUDZIK



- Opublikował ponad 220 artykułów naukowych w ponad 40 czasopismach o międzynarodowym zasięgu.
- Był redaktorem naczelnym Commentationes Mathematicae (Prace Matematyczne), był również członkiem redakcji ponad 15 innych międzynarodowych czasopism.
- Sprawował funkcję prezesa Oddziału Poznańskiego PTM, był członkiem Prezydium Zarządu Głównego PTM.
- Był promotorem 16 rozpraw doktorskich, w tym doktorantów zagranicznych (pięciu z Chin i jednego z Syrii).

DOKTORANCI

- Od chwili powstania ZTPF wypromowanych zostało 19 doktorów, w tym pięciu zagranicznych:

  - Ghassan Alherk (University of Aleppo, Syria)
  - Małgorzata Doman (Akademia Ekonomiczna w Poznaniu)
  - Zenon Zbąszyniak (Politechnika Poznańska)
  - Yunan Cui (Harbin University of Science and Technology, Chiny)
  - Paweł Foralewski (UAM)
  - Lifang Liu (Xiamen University, Chiny)
  - Wojciech Kowalewski (UAM)
  - Agata Narloch (Uniwersytet Szczeciński)
  - Yuwen Wang (Harbin Normal University, Harbin, Chiny)

DOKTORANCI (2)

- Karol Wlaźlak (UAM)
- Lucjan Szymaszkiewicz (Uniwersytet Szczeciński)
- Xinbo Liu (Harbin Normal University, Harbin Chiny)
- Alicja Szymaszkiewicz (Politechnika Szczecińska)
- Radosław Kaczmarek (UAM)
- Haifeng Ma (Harbin Normal University, Harbin, Chiny)
- Ewa Kasior (Uniwersytet Szczeciński)
- Tomasz Chawziuk (UAM)
- Agata Panfil (Politechnika Poznańska, UAM)
- Joanna Kończak (UAM)

SEMINARIA NAUKOWE

- W ramach zakładu prowadzone są cotygodniowe seminaria naukowe.
- W latach 1988-2006 było prowadzone Środowiskowe Seminarium z Geometrii Przestrzeni Banacha, Teorii Przestrzeni Funkcyjnych oraz Teorii Interpolacji - współprowadzącymi byli dr Wiesław Kurc (do 2001r.) i prof. dr hab. Mieczysław Mastyło.
- Od 2006 r. do 2017 r. odbywało się Środowiskowe Seminarium z Geometrii Przestrzeni Banacha oraz Teorii Przestrzeni Funkcyjnych - współprowadzącymi byli prof. dr hab. Ryszard Płuciennik i prof. dr hab. Paweł Kolwicz z Politechniki Poznańskiej.

TEMATYKA BADAWCZA

- Własności topologiczne i geometryczne wybranych przestrzeni unormowanych, quasi-unormowanych oraz F-unormowanych i ich zastosowania, w tym:
  - ścisła, lokalna i jednostajna wypukłość,
  - ścisła, lokalna i jednostajna monotoniczność,
  - niekwadratowość, lokalna i jednostajna niekwadratowość normy,
  - własności typu Kadeca-Klee,
  - własność najlepszego przybliżenia,
  - własności geometryczne związane z teorią punktu stałego.

MOTYWACJA BADAŃ: WŁASNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO

- W 1965 r. W. A. Kirk udowodnił, że refleksywne przestrzenie Banacha ze strukturą normalną posiadają własność FPP (na operatorach nierozszerzających).
- B. Murray pokazał, że izometrie na przestrzeniach superrefleksywnych posiadają własność FPP.
- R.C. James udowodnił, że przestrzeń Banacha jest superrefleksywna, gdy istnieje równoważna norma, która jest jednostajnie wypukła lub jednostajnie niekwadratowa.

- W.A. Kirk, 'A fixed point theorem for mappings which do not increase distances', Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.
- B . Maurey , Points fixes des contractions de certains faiblement compact de L 1 , Seminair e d'Analyse Fonctionelle 1980-81 (Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1981)
- R.C. James, Super-reflexive Banach spaces, Canad. J. Math. 24 (1972), 896-904

MOTYWACJA BADAŃ: ELEMENT NAJLEPSZEGO PRZYBLIŻENIA

- Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset X$, funkcję $P_A(x): X \to 2^X$ zdefiniowaną wzorem

$$P_A(x) = \{z \in A: d(x, A) = \|x - z\|\}$$

nazywamy projekcją z X na A.

- W szczególności, jeśli A jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym to (dla wszystkich $x \in X$):
  - $P_A(x) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow\ X$ jest refleksywna,
  - $card\big(P_A(x)\big) \leq 1 \Leftrightarrow\ X$ jest ściśle wypukła,
  - $card\big(P_A(x)\big) = 1 \Leftrightarrow\ X$ jest refleksywna i ściśle wypukła.

WSPÓŁPRACA

- Harbin Normal University
- Harbin University of Science and Technology
- Harbin Isnstitute of Technology
- Schanghaj University
- Pekin University
- Memphis University
- Universidad Complutense de Madrid
- Universidad de Barcelona
- Universidad de Valencia
- Instytut Matematyki Czeskiej Akademii Nauk w Pradze

WSPÓŁPRACA

- Politechnika Poznańska
- UMCS Lublin
- Uniwersytet Jagielloński
- Uniwersytet Szczeciński
- Uniwersytet Śląski
- Uniwersytet Zielonogórski

RODZINY NORM NA PRZESTRZENI ORLICZA

- Na przestrzeni funkcji mierzalnych nad zupełną, σ −skończoną przestrzenią z miarą (T, Σ, μ) i dla wypukłej funkcji Orlicza $\Phi: \mathrm{R} \to [0, \infty]$ definiujemy przestrzeń liniową

$$L^{\Phi} = \{x: T \to R: \ \exists\, \lambda > 0 \ \ I_{\Phi}(\lambda x) = \int_T \Phi(\lambda x) d\mu < \infty\}$$

- Na tej przestrzeni można zdefiniować dwie klasyczne (równoważne w sensie topologicznym) normy
- $\|x\|_L = \inf\{k > 0: \ I_{\Phi}\left(\frac{x}{k}\right) \leq 1\} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_{\Phi}(kx)\}$
- $\|x\|_O = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx))$

NORMY p-AMEMIYA

- Jest wiadome, że normy Luxemburga i Orlicza są względem siebie dualne w sensie Köthego (przy odpowiednich funkcjach dopełniających).
- Okazuje się, że na przestrzeni Orlicza można zdefiniować naturalną rodzinę norm, których wartości leżą między normą Luxemburga (najmniejsza wartość), a normą Orlicza (największa wartość).
- Istnieje wiele takich rodzin norm. Na przykład ciąg norm p-Amemiya (H. Hudzik, L. Maligranda (2000))

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \left(I_\Phi(kx)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ gdzie } 1 \le p \le \infty,$$

spełnia warunki $\|x\|_L \le \|x\|_{\Phi,p} \le \|x\|_O$.

NORMY p-AMEMIYA

- Na ogół własności geometryczne normy p −Amemiya (dla $1 < p < \infty$) różnią się od własności normy Luxemburga i Orlicza. Główną przyczyną jest fakt, iż funkcja zewnętrzna
$$s_p(u) = (1 + u^p)^{\frac{1}{p}}$$
wykorzystana do wygenerowania tej normy jest ściśle wypukła dla $1 < p < \infty$.
- W ostatnich latach pojawiło się wiele publikacji naukowych, w których badane były własności geometryczne normy p-Amemiya.

PUBLIKACJE

- Cui Yunan, Hudzik H., Wisła M., Lifen Duan, *Basic theory of p-Amemiya norm in Orlicz spaces; Extreme points and rotundity in Orlicz spaces endowed with these norms*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (2008)
- Cui Yunan, Hudzik H., Wisła M., Li J., *Strongly extreme points in Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (2009)
- Cui Yunan, Hudzik H., Wisła M., Wlaźlak K., *Non-squareness properties of Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (2012)
- Cui Yunan, Hudzik H., Wisła M., *Monotonicity properties and dominated best approximation problems in Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2015)

PUBLIKACJE

- Cui Yunan, Hudzik H., Wisła M., *M-constants, Dominguez-Benavides coefficient and weak fixed point property in Orlicz sequence spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Fixed Point Theory and Applications (2016)
- Wisła M., *Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm,* Journal of Mathematical Analysis and Applications (2018)
- Kaczmarek R., *Uniform rotundity of Orlicz function spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Mathematische Nachrichten (2018)
- Kaczmarek R., *Uniform rotundity in every direction of Orlicz function spaces equipped with the p-Amemiya norm*, Collectanea Mathematica (2019)

DRUGA DYSTRYBUANTA

- Niech $X\colon \Omega \to [0, \infty)$ będzie nieujemną zmienną losową o wartości oczekiwanej $E(X) \leq 1$. Drugą dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję
$$F_X^{(2)}(u) = \int_0^u F_X(t)dt$$
- Druga dystrybuanta jest funkcją niemalejącą, wypukłą, posiadającą asymptotę $u = 0$ w zerze oraz asymptotę ukośną $y = u - E(X)$ w nieskończoności
(Ogryczak W., Ruszczyński A., *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures*, European Journal of Operational Research 116 (1999), 33–50).

s-NORMA

- Oznaczając $s_X(u) = 1 + F_X^{(2)}(u)$ możemy, dla każdej takiej zmiennej losowej X, zdefiniować na przestrzeni Orlicza s-normę
$$\|x\|_{\Phi,s} = \inf_{\mathrm{k}>0} \frac{1}{k} s_X(I_\Phi(kx))$$
- W szczególności, dla zmiennej losowej $X \equiv 0$ otrzymujemy normę Orlicza, a dla zmiennej $X \equiv 1$ normę Luxemburga.
- Biorąc $X \equiv a$ dla $0 \leq a \leq 1$ otrzymujemy rodzinę norm
$$\|x\|_{\Phi,a} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kx) + a\},$$
która w sposób „ciągły" wypełnia przestrzeń między normami Luxemburga i Orlicza.

KÖTHE PREDUAL

- Niech Φ , Ψ będą komplementarnymi funkcjami Orlicza (w sensie Younga) przyjmującymi skończone wartości i niech s^* będzie minimalną funkcją zewnętrzną sprzężoną do s w sensie Höldera, tzn. taką, że dla wszystkich $u, v \geq 0$,
$$u + v \leq s(u)s^*(v).$$

Jeśli norma $\|\cdot\|_{\Psi,s^*}$ jest k^*-skończona, to
$$\left(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s}\right)' = \left(L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,s^*}\right).$$

PUBLIKACJE

- Wisła M., *Orlicz spaces equipped with s-norms*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2020)
- Cui Yunan, Wisła M., *Monotonicity properties and solvability of dominated best approximation problem in Orlicz spaces equipped with s-norms*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales Serie A-Matematicas (2021)
- Cui Yunan, Wisła M., *Kadec-Klee Property in Orlicz Function Spaces Equipped with s-Norms*, Journal of Function Spaces (2022)
- Esra Başar, Serap Öztop, Badik Hüseyin Uysal, Şeyma Yaşar, *Extreme points in Orlicz spaces equipped with s-norms and closedness*, Mathematische Nachrichten (2023)

PRZESTRZENIE ORLICZA-LORENTZA

- Przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\Phi,w}$ jest przestrzenią rzeczywistych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcji x takich, że

$$I_{\Phi,\mathrm{w}}(\lambda x) = \int_0^\infty \Phi\big(\lambda x^*(t)\big) w(t) dt < \infty ,$$

gdzie $w(t)$ jest nieujemną, nierosnącą, lokalnie całkowalną funkcją wagową, a x^* jest nierosnącym przestawieniem (rearrangement) funkcji x, tzn.

$$x^*(t) = \inf \{u > 0 : d_x(u) \leq t\} ,$$

gdzie $d_x(u) = m\{s > 0 : |x(s)| > u\}$.

WYNIKI

- Charakteryzacja własności Kadeca-Klee.
- Podania kryteriów własności niekwadratowościowych w przestrzeniach Orlicza-Lorentza z normą Luksemburga.
- Wprowadzenie i zbadanie uogólnionych przestrzeni Orlicza-Lorentza.
- Badanie przestrzeni Orlicza-Lorentza z normą Orlicza dla dowolnej funkcji Orlicza, z zastosowaniem do klasycznych przestrzeni Orlicza.

PUBLIKACJE

- Foralewski P., *Some fundamental geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz function spaces,* Math. Nachr. (2011)
- Foralewski, P. *On some geometric properties of generalized Orlicz–Lorentz function spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications (2012)
- Foralewski P, Hudzik H., Kolwicz P., *Non-squareness properties of Orlicz-Lorentz sequence spaces*, J. Funct. Anal. (2013)
- Foralewski P., Kończak J., *Local uniform non-squareness of Orlicz-Lorentz function spaces,* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM (2019)

PUBLIKACJE

- Cui Yunan, Foralewski P., Hudzik H., Kaczmarek R., *Kadec-Klee properties of Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped with the Orlicz norm,* Positivity (2021)
- Cui Yunan, Foralewski P., Kończak J., *Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped with the Orlicz norm*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) (2022)

PRZESTRZENIE CALDERONA-LOZANOWSKIEGO

- Dla dowolnego ideału Banacha E i dowolnej funckcji Orlicza Φ, definiujemy na $L^0(\mu)$ modular ρ_Φ^E wzorem

$$\rho_\Phi^E(x) = \begin{cases} \|\Phi(|x|)\|_E, & \text{jeśli } \Phi(|x|) \in E, \\ \infty, & \text{w przec. przypadku.} \end{cases}$$

- Przestrzeń Calderona-Łozanowskiego E_Φ określona wzorem

$$E_\Phi = \left\{ x \in L^0(\mu)\colon \lim_{\lambda \to 0} \rho_\Phi^E(\lambda x) = 0 \right\}$$

z normą

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{ \lambda > 0\colon \ \rho_\Phi^E\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1 \right\}$$

jest przestrzenią Banacha.

PUBLIKACJE

- Foralewski P., Hudzik H., *Some basic properties of generalized Calderón-Lozanovskii spaces*, Collectanea Mathematica (1997)
- Foralewski P., Hudzik H., *On some geometrical and topological properties of generalized Calderón-Lozanovskii sequence spaces*, Houston Journal of Mathematics (1999)
- Foralewski P., Kolwicz P., *Local uniform rotundity in Calderón-Lozanovskiı spaces*, Journal of Convex Analysis (2007)
- Kasior E., Wisła M., *Closedness of the set of extreme points in Calderon-Lozanovskii spaces*, Journal of Convex Analysis (2014)
- Foralewski P., Hudzik H., Kolwicz P., *Quasi-modular spaces with applications to quasi-normed Calderón-Lozanovskiı spaces,* wysłany do czasopisma.

PRZESTRZENIE F-UNORMOWANE

- Nieujemną funkcję $x \to \|x\|$ zdefiniowaną na rzeczywistej przestrzeni liniowej X nazywamy F-normą, gdy zeruje się tylko w zerze, spełnia warunek trójkąta, jest funkcją parzystą oraz $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \to 0$ o ile $\|x_n - x\| \to 0$ oraz $\lambda_n \to \lambda$.

- F-unormowaną przestrzeń $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy F-unormowaną przestrzenią Köthego jeżeli jest liniową podprzestrzenią $L^0(\mu)$ spełniające następujące warunki:
  - (i) Jeżeli $x \in L^0(\mu)$, $y \in E$ i $|x| \leq |y|$ μ-p.w., to $x \in E$ i $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.
  - (ii) Istnieje ściśle dodatni element $x \in E$ (zwany słabą jedynką).

NORMA MAZURA-ORLICZA

Dla nieujemnej, niemalejącej i ciągłej funkcji Orlicza Φ porządkowy ideał

$$L^{\Phi}(\mu) = \{x \in L^0(\mu) \colon \; \exists\, \lambda > 0 \;\; I_\Phi(\lambda x) < \infty\}$$

nazywamy przestrzenią Orlicza.
Przestrzeń ta z F-normą Mazura-Orlicza:

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \; I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le \lambda\right\}$$

jest F-unormowaną przestrzenią Köthego.

WYNIKI

- Uzyskanie warunków koniecznych i dostatecznych dla własności monotonicznościowych w F-unormowanych funkcyjnych i ciągowych przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza generowanych przez monotoniczną (niekoniecznie wypukłą) funkcję Orlicza Φ.
- Ścisła monotoniczność i porządkowa ciągłość w F-unormowanych przestrzeniach Köthego ma naturalne powiązanie z teorią zdominowanej najlepszej aproksymacji.

WYNIKI

- Własności Kadeca-Klee w F-kratach Orlicza.
- Istnienie liniowej, porządkowo-izometrycznej kopii przestrzeni ℓ^∞ w funkcyjnych i ciągowych przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza.
- Zawieranie liniowej, porządkowo-izometrycznej kopii $L_p(\mu)$, $0 < p \leq 1$, w przestrzeniach Orlicza z F-normą Mazura-Orlicza.
- Własności monotonicznościowe dla s-uwklęśnień $(0 < s < 1)$ unormowanych przestrzeni Köthego E.

PUBLIKACJE

- Hudzik H., Kaczmarek R., Wójtowicz M., *Some monotonicity properties in certain s-normed (0 < s < 1) and F-normed lattices*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis (2016)
- Cui Yunan, Hudzik H., Kaczmarek R., Kolwicz P., *Geometric properties of F-normed Orlicz spaces*, Aequat. Math. 93 (2019)
- Hudzik H., Kaczmarek R., Wang Yuwen, Wójtowicz M., *Problems of existence of order copies of* ℓ^{∞} *and* $L^{p}(\nu)$ *in some non-Banach Köthe spaces*, Positivity (2019)
- Kaczmarek R., *Some monotonicity properties in F-normed Musielak-Orlicz spaces*, Aequat. Math. (2020)
- Cui Yunan, Hudzik H., Kaczmarek R., Kolwicz P., *Uniform monotonicity of Orlicz spaces equipped with the Mazur-Orlicz F-norm and dominated best approximation in F-normed Köthe spaces*, Mathematische Nachrichten (2022)

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!