dr hab. Tomasz Połacik Katowice, 15 lipca 2018

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski
Katowice

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Lidii Typańskiej

Krata rozszerzeń logiki relewantnej E

Logiki relewantne zostały wprowadzone w celu wyeliminowania paradoksów materialnej i ścisłej implikacji jakim, zdaniem części logików, są one obarczone. Jedną z najwcześniej rozważanych logik relewantnych jest logika E (od słowa *entailment*) wprowadzona w roku 1958. Spośród innych najważniejszych logik relewantnych należy wspomnieć również o logice **R** i **RM**. Impuls do badań w tej dziedzinie spowodowała książka A.R. Andersona i N. Belnapa *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity* opublikowana w roku 1975. Obecnie logiki relewantne wciąż stanowią obszar prowadzenia intensywnych badań. W szczególności długą i ugruntowaną tradycję ma badanie krat rozszerzeń logik. W przypadku logik relewantnych do tej pory znane były wyniki dotyczące logiki **R** oraz **RM**. Mianowicie, wiadomo, że logika **RM** ma tylko jedno pre-maksymalne rozszerzenie (czyli istnieje tylko jedna logika relewantna pomiędzy logiką **RM**, a logiką klasyczną), logika **R** ma trzy takie rozszerzenia (K. Świrydowicz), a pomiędzy logiką **R** a **RM** istnieje continuum logik relewantnych (W. Dziobiak). Badania przedstawione w pracy doktorskiej pani mgr Lidii Typańskiej poświęcone są logice relewantnej E. Głównym ich wynikiem jest twierdzenie mówiące, że istnieje continuum pre-maksymalnych rozszerzeń tej logiki. Wynik ten jest zaskakujący w świetle analogicznych badań logik **R** i **RM**.

Praca doktorska pani mgr Lidii Typańskiej składa się z Wstępu, który zawiera krótkie omówienie treści poszczególnych rozdziałów pracy, oraz czterech zasadniczych rozdziałów, Zakończenia i bibliografii.

Rozdział 1 rozpoczyna krótki rys historyczny dotyczący logik relewantnych **E** i **R** oraz pewnych intuicji dotyczących implikacji relewantnych. Kolejny podrozdział jest poświęcony aksjomatykom logiki **E**. Autorka prezentuje trzy ujęcia, z których jedno z nich — autorstwa A.R. Andersona i N.D. Belnapa — będzie potem podstawą do zdefiniowania pojęcia **E**-algebry. Kilka uwag Autorka poświęciła logikom **R** i **RM**. Rozdział ten kończy przedstawienie systemu dedukcji naturalnej Fitcha. Jedyny przykład dowodu w tym systemie zaprezentowany jest w dowodzie Lematu 4.

W Rozdziale 2 podane są dwa warianty pojęcia **E**-algebry. Względem pierwszej definicji udowodnione jest twierdzenie o pełności logiki **E**. Autorka konkluduje ponadto, że klasa wszystkich E-algebr jest rozmaitością, a algebra Lindenbauma logiki **E** jest algebrą wolną w klasie wszystkich E-algebr. W rozdziale tym została również podana definicja matrycy oraz udowodniono kilka technicznych lematów wykorzystywanych w dalszej części pracy. Rozdział ten kończą interesujące przykłady i kontrprzykłady.

Zasadnicza część pracy obejmuje Rozdział 3 i Rozdział 4. W Rozdziale 3 Autorka zdefiniowała pewną klasę skończonych algebr będących celem dalszych badań. Stanowią je skończone łańcuchy z wyróżnionym filtrem generowanym przez atom, czyli element będący bezpośrednim następnikiem elementu najmniejszego. Autorka przeprowadza szczegółową konstrukcję wszystkich możliwych E-algebr tego typu, czyli takich łańcuchów, które spełniają warunki definicji E-algebry. Wszystkie rozważane takie algebry mają parzystą liczbę elementów i każda z nich może być w pewien sposób rozszerzona poprzez dodanie następnych dwóch nowych elementów. Powstaje w ten sposób klasa skończonych E-algebr $\mathbf{A}_n$, gdzie n jest liczbą naturalną. Na klasę tę składają się dwa przeliczalne ciągi E-algebr nie mających nietrywialnych podalgebr.

W Rozdziale 4 Autorka konstruuje przeliczalne (nieskończone) E-algebry proste, których uniwersum stanowią łańcuchy. Konstrukcja ta jest pewnego rodzaju uogólnieniem konstrukcji z poprzedniego rozdziału. Startując od algebr skończonych typu $\mathbf{A}_n$, poprzez rozszerzenia otrzymanych już wcześniej algebr, definiowane są nowe algebry. Powstaje w ten sposób struktura drzewa binarnego rozważanych przez Autorkę rozszerzeń. Wówczas każda gałąź drzewa wyznacza, jako sumę, nieskończoną E-algebrę. Ponieważ tak wyznaczone algebry są parami nieizomorficzne, otrzymujemy continuum parami nieizomorficznych przeliczalnych E-algebr prostych. Rozdział ten wieńczy główne twierdzenie rozprawy pani mgr Lidii Typańskiej, w którym stwierdza się, że istnieje continuum pre-maksymalnych podrozmaitości rozmaitości E-algebr. W konsekwencji, istnieje continuum pre-maksymalnych rozszerzeń logiki E.

Zakończenie przynosi — dosłownie — ilustrację wyników uzyskanych w rozprawie. Na bibliografię składa się 15 pozycji adekwatnych do treści rozprawy.

Praca doktorska pani mgr Lidii Typańskiej przynosi rozstrzygnięcie interesującego zagadnienia dotyczącego logik relewantnych prowadzącego do zaskakującego wyniku. Udowodnienie głównego twierdzenia pracy wymagało od Autorki, oprócz niezbędnej wiedzy i umiejętności matematycznych, pomysłowości oraz umiejętności konstrukcji licznych algebr. Konstrukcje te zostały przedstawione w pracy pani mgr Lidii Typańskiej bardzo szczegółowo i na ogół zrozumiale. Generalnie, przedstawiony materiał pozwala stwierdzić, że pani mgr Lidia Typańska wykazuje się odpowiednią znajomością algebry uniwersalnej i logiki oraz potrafi prowadzić badania naukowe osiągając wartościowe wyniki. Jednak, o ile wyniki zawarte w pracy są bardzo satysfakcjonujące, to dostrzegam mankamenty dotyczące sposobu ich przedstawienia. Praca doktorska pani mgr Lidii Typańskiej sprawia wrażenie napisanej pośpiesznie i niestarannie. Znajdują się w niej liczne usterki typograficzne, redakcyjne, interpunkcyjne i potknięcia językowe. W tym miejscu ograniczę się tylko do najważniejszych uwag merytorycznych.

Jednym z kluczowych pojęć pracy jest pojęcie E-algebry zdefiniowane w Definicji 1. W definicji tej konstytuujące własności E-algebry otrzymane są przez „przetłumaczenie" aksjomatów logiki **E** na język algebry. Jako aksjomatykę logiki **E** wybrana została aksjomatyka Andersona i Belnapa podana przez Autorkę na stronie 8. Taka definicja pozwala na łatwe udowodnienie Twierdzenia o Pełności logiki **E** sformułowane i udowodnione przez Autorkę jako Twierdzenie 6. Jednak w pracy pojawia się inna definicja E-algebry, mianowicie Definicja 8, którą to Autorka przyjmuje jako tę, którą „będziemy się dalej posługiwać". Rozumiem, że własności sformułowane w Definicji 8 umożliwiają łatwiejsze przeprowadzenie niektórych dowodów. Jednak konieczne w tej sytuacji jest udowodnienie równoważności obu definicji. Taki dowód nie był w pracy przeprowadzony, nie znalazłem go też w literaturze.

Kolejnym kluczowym elementem rozprawy pani mgr Lidii Typańskiej są konstrukcje (ciągów) algebr, które w zamierzeniu mają być E-algebrami. W pracy znajdujemy sformułowanie twierdzeń: Twierdzenie 26 i Twierdzenie 29 głoszące, że konstruowane przez Autorkę algebry są nimi w istocie. Nie podano jednak żadnego argumentu przemawiającego na poparcie wypowiedzi rozważanych twierdzeń. Owszem, czytelnik weźmie pod uwagę liniową strukturę algebr i kompletny opis „tabelek operacji", etc. Ale moim zdaniem, brak jest zebrania tych wszystkich elementów w uzasadnienie (jeśli nie dowód) stwierdzanych zdań. Podobnie rzecz się ma z deklarowaną przez Autorkę prostotą konstruowanych algebr.

Największy niedosyt mam jednak przy rozważaniu Twierdzenia 30, które wieńczy pracę pani mgr Lidii Typańskiej. Po pierwsze nie przedstawiono go w zapowiadanej we Wstępie formie (mówiącej, że logika **E** ma continuum rozszerzeń znajdujących się bezpośrednio pod logiką klasyczną), lecz zostało wysłowione w terminach algebraicznych. Nie to jednak jest głównym powodem mojej krytyki, lecz to, że dowód Twierdzenia 30 jest nieczytelny i chaotycznie zredagowany. Uzasadnienie głównego twierdzenia pracy wykorzystuje Twierdzenie Jónnsona oraz standardowe wyniki teorii modeli. Odnoszę wrażenie, że Autorka gubi się w swoim rozumowaniu i, moim zdaniem, nie udało się jej przytoczyć spójnej i przekonywującej argumentacji popierającej tezę Twierdzenia 30. Zaznaczam, że opinia moja dotyczy wyłącznie sposobu prezentacji argumentów i nie podważam prawdziwości zawartej w twierdzeniu tezy.

Niektóre szczegółowe uwagi

1. *Strona* 6_7. Jaki jest związek między stałą f a modalnością $\Box$?
2. *Strona* 10^7. Czym ma być „miejsce w dowodzie"?
3. *Strona* 11^{18}. Przykład do metody Fitcha niewiele wyjaśnia, jest raczej przykładem notacji, a nie przykładem dowodu formuły.
4. *Strona* 12^4. Zamiast $\psi_{(b)}$ powinno być $\psi_{(a)}$.
5. *Strona* 12. Mimo zapowiedzi bezpośrednio przed Lematem 2, pominięto dowód tego lematu, który byłby naturalną ilustracją zastosowania systemu Fitcha.
6. *Strona* 13, *dowód Lematu 3.* Uzasadnienie jest niejasne.
7. *Strona* 13^{18}, *Lemat 4.* Zmienna zdaniowa nie może mieć postaci implikacji.
8. *Strona* 13_7, *dowód Lematu 4.* Zamiast 2,8 powinno być 3,7.
9. *Strona* 13, *Twierdzenie 5.* Nieprecyzyjne sformułowanie, brak kwantyfikacji.
10. *Strona* 14, *dowód Twierdzenia 5.* Baza indukcji jest niejasna, w szczególności formuła w linii 5 jest niepoprawna. W liniach 8 oraz 14: reguła wprowadzania koniunkcji była oznaczana przez (**AD**) a nie przez (**DK**), podobnie na stronie 16_6. W linii 11: powinno być $(t_s \to D_i \wedge D_j)$ zamiast $(t_j \to D_i \wedge D_j)$. W dwóch ostatnich liniach: zamiast D_k powinno być D_j.
11. *Strona* 15^{4-6}. Jak należy rozumieć sformułowanie „semantyka maksymalnie bliska językowi logiki"? Powinno być „Rodriguez" zamiast „Rdriguez".
12. *Strona* 15_4. Niekonsekwentna numeracja. Do Definicji 1 Autorka odwołuje się jako do Definicji 2.1 (na przykład na stronie 21^5).
13. *Strona* 16^{1-13}. W (1) trzeci składnik koniunkcji po lewej stronie nierówności jest niepełny. W (3) brak nawiasu. Zamiast (9) powinno być

    $$(x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (z \to z) \leqslant (x \to z) \wedge (y \to z) \to ((x \vee y) \to z).$$

    Zamiast (11) powinno być

    $$(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (x \to \neg y) \wedge (y \to \neg x).$$
14. *Strona* 16^{20}. Zamiast „$h \longrightarrow \mathbf{A}$" powinno być „$h : VAR \longrightarrow \mathbf{A}$", gdzie VAR oznacza zbiór zmiennych zdaniowych.
15. *Strona* 18, *Definicja 8.* Brakuje dowodu, że Definicja 8 jest równoważna Definicji 1.
16. *Strona* 19^5. Powinno być „dla pewnego t_i".
17. *Strona* 20^8. W dowodzie przechodniości nie pokazano, że $z \to x \in \nabla$.
18. *Strona* 20_4. Nieprawidłowy zapis $\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{A}}) = \{\nabla : \nabla \text{ oraz } \nabla_{\mathbf{A}} \subseteq \nabla\}$.
19. *Strona* 21, *Lemat 21.* Sformułowanie lematu jest niestaranne. Zamiast $x \in \nabla$ powinno być $x \in \nabla_{\mathbf{A}}$. Pomyłka prowadzić może do nieporozumień, gdyż symbolem ∇ oznacza się w pracy dowolny filtr rozszerzający $\nabla_{\mathbf{A}}$. Usterka ta powtarza się w wielu innych miejscach pracy.

20. *Strona* 21^{14}. Brak kwantyfikacji, powinno być „Zatem $\mathbf{t_i} \leqslant x$, dla pewnego $\mathbf{t_i}$".
21. *Strona* 22, *Wniosek 23.* Wniosek nie poparty jest żadnym argumentem.
22. *Strona* 26. W tabeli operacji $\rightarrow$ wartość dla $\neg a \rightarrow a$ powinna być 0, a nie a.
23. *Strona* 27^{8}. Powinno być **2** zamiast 2.
24. *Strona* 32_{3}. Niezręczne sformułowanie „Konstrukcja ... jest dokładnie taka sama"; powinno być raczej „... jest analogiczna".
25. *Strona* 35, *Twierdzenie 26, Twierdzenie 27.* Dobrze byłoby, gdyby dwa fundamentalne dla pracy wyniki opatrzone były, jeśli nie dowodami, to przynajmniej krótkim uzasadnieniem.
26. *Strona* 46^{5}. Czym jest „liczebność algebry"?
27. *Strona* 51^{1}. Pierwsze zdanie podrozdziału ma identyczną treść jak punkt 2 Twierdzenia 29.
28. *Strona* 51, *Twierdzenie 29.* Jest to kolejny fundamentalny wynik pracy nie poparty żadnym uzasadnieniem.
29. *Strona* 51, *Twierdzenie 30.* Dowód twierdzenia jest niepełny i nieprecyzyjny.

Podsumowując, praca doktorska pani mgr Lidii Typańskiej zawiera interesujące i oryginalne wyniki. Rezultaty te pozytywnie świadczą o umiejętnościach i wiedzy Autorki rozprawy. Pomimo przedstawionych powyżej uwag krytycznych stwierdzam, że praca doktorska pani mgr Lidii Typańskiej spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki* i wnioskuję o dopuszczenie pani mgr Lidii Typańskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Katowice, 15 lipca 2018,

T. Połacik

Tomasz Połacik