ROZRÓŻNIAJĄCE KOLOROWANIA GRAFÓW

autoreferat

dr Monika Pilśniak

Kraków 2017

Imię i nazwisko: Monika Pilśniak

Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- magister matematyki:
  Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Fizyki, 2000 r.
- magister informatyki:
  Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, 2002 r.
- doktor nauk matematycznych:
  Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica, Wydział Matematyki Stosowanej, 2004 r.

  rozprawa: „*Pakowania i rozkłady w turniejach przechodnich*",
  promotor: prof. dr hab. Mariusz Woźniak.

Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej
Katedra Matematyki Dyskretnej

- asystent 1 X 2000 – 28 II 2005
- adiunkt od 1 III 2005

Spis treści

1. Osiągnięcie naukowe

1.1. Tytuł i prace

Rozróżniające kolorowania grafów

[H1] R. Kalinowski, M. Pilśniak, J. Przybyło, M. Woźniak, *How to personalize the vertices of a graph?*, European J. Combin. 40 (2014), 116–123.

[H2] R. Kalinowski, M. Pilśniak, *Distinguishing graphs by edge-colourings*, European J. Combin. 45 (2015), 124–131.

[H3] W. Imrich, R. Kalinowski, M. Pilśniak, M. Shekarriz, *Bounds for Distinguishing Invariants of Infinite Graphs*, Electron. J. Combin. 24(3) (2017), P3.6.

[H4] R. Kalinowski, M. Pilśniak, M. Woźniak, *A note on Breaking Small Automorphisms in Graphs*, Discrete Appl. Math. 232 (2017) 221–225.

[H5] M. Pilśniak, *Edge motion and the distinguishing index*, Theoret. Comput. Sci. 678 (2017), 56–62.

[H6] M. Pilśniak, *Improving upper bounds for the distinguishing index*, Ars Math. Contemp. 13 (2017), 259–274.

1.2. Cel naukowy i osiągnięte wyniki

1.2.1. Wprowadzenie

Obiektem moich badań w ostatnich kilku latach są kolorowania rozróżniające grafów, czyli takie, które nie są zachowywane przez żaden automorfizm różny od identyczności. Przez kolorowania należy tu rozumieć kolorowania wierzchołkowe, krawędziowe bądź totalne. Nie zawsze muszą być one właściwe - można by zatem mówić o etykietowaniach, ale w literaturze najczęściej używany jest termin: kolorowania. Głównym celem naukowym były oszacowania najmniejszej możliwej liczby kolorów w takich kolorowaniach. Ten cel został osiągnięty przez uzyskanie oszacowań – na ogół ostrych – dla grafów skończonych i nieskończonych w ogólności, a także dla pewnych naturalnych, ważnych z punktu widzenia zastosowań, klas grafów.

Dla wyjaśnienia istoty zagadnienia, a przy okazji jego zastosowania, przypuśćmy, że dany graf modeluje sieć komunikacyjną (np. komputerową, radiową lub tp.), w której każdy wierzchołek pełni inną funkcję. Chcemy więc mieć możliwość identyfikacji każdego wierzchołka tak, by nie mógł być zamieniony z innym, nawet jeśli struktura sieci na to pozwala, czyli jeśli istnieje automorfizm grafu. Najprostszym rozwiązaniem jest oczywiście oznaczenie każdego wierzchołka inną etykietą. Może ono być jednak nieprzydatne, np. dla wielkich sieci ze względu na konieczność pamiętania i operowania na dużych liczbach. Innym, oszczędniejszym rozwiązaniem jest zastosowanie kolorowania wierzchołków grafu, które nie byłoby zachowywane przez żaden nietrywialny automorfizm. Wówczas bowiem każdy wierzchołek grafu można zlokalizować w sposób jednoznaczny. Dodajmy od razu, że właśnie takie rozwiązanie stosowane jest w informatyce, np. w programowaniu rozproszonym w tzw. procedurze wyboru lidera (por. [4], [36], [47], [31], [32]).

Graf pełny K_n jest przykładem grafu, który wymaga bardzo wielu kolorów w wierzchołkowym kolorowaniu rozróżniającym – każdy wierzchołek musi bowiem mieć inny kolor. Sytuacja istotnie się zmienia, gdy rozważymy kolorowania krawędzi. Mianowicie, dla $n \geqslant 6$ wystarczą dwa kolory. To stanowi dodatkową motywację do badania kolorowań krawędziowych przełamujących wszystkie nietrywialne automorfizmy.

Dla jasności opisu sprecyzujmy podstawowe pojęcia. *Automorfizmem* grafu $G = (V, E)$ nazywamy taką permutację φ zbioru wierzchołków V, że uv jest krawędzią grafu G wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi(u)\varphi(v)$ też jest krawędzią w G. Zbiór wszystkich automorfizmów grafu G oznaczamy przez $\mathrm{Aut}(G)$.

Kolorowanie f grafu $G = (V, E)$ jest dowolną funkcją $f : M \to K$, gdzie K jest dowolnym zbiorem kolorów oraz $M \in \{V, E, V \cup E\}$ (powiemy odpowiednio, że kolorowanie f jest *wierzchołkowe*, *krawędziowe* albo *totalne*). Jeżeli dodatkowo każde dwa sąsiadujące bądź incydentne elementy zbioru M mają różne kolory, to kolorowanie f nazywamy *właściwym*.

Mówimy, że *kolorowanie* f *przełamuje automorfizm* φ, jeśli istnieje wierzchołek lub krawędź x, takie że $f(x) \neq f(\varphi(x))$ (przy czym jeśli x jest krawędzią uv, przez $\varphi(x)$ rozumiemy krawędź $\varphi(u)\varphi(v)$). Kolorowanie f nazywamy *rozróżniającym*, jeżeli f przełamuje wszystkie nietrywialne automorfizmy grafu.

Pomysł wierzchołkowych kolorowań rozróżniających został wprowadzony przez Albertsona i Collins [3] w 1996 r. jako ciekawe, czysto teoretyczne zagadnienie matematyczne. Przez pewien czas bowiem nie były znane jego zastosowania. Od tego czasu opublikowano około stu prac poświęconych kolorowaniom rozróżniającym. Szczególny rozwój datuje się od połowy ubiegłej dekady, kiedy tą problematyką zaczęła się zajmować większa liczba uznanych specjalistów z teorii grafów w kilkunastu krajach, między innymi P. Cameron (Wielka Brytania), M. Conder (Nowa Zelandia), Z. Furedi (Węgry, USA), W. Imrich (Austria), S. Klavžar (Słowenia), T. Tucker (USA), X. Zhu (Chiny). Albertson i Collins zdefiniowali *liczbę rozróżniającą* $D(G)$ grafu G jako najmniejszą liczbę kolorów w wierzchołkowym kolorowaniu rozróżniającym. W roku 2006 Collins i Trenk w pracy [19] zapoczątkowały badania właściwych wierzchołkowych kolorowań rozróżniających i odpowiedni parametr nazwały *chromatyczną liczbą rozróżniającą* $\chi_D(G)$.

Jest nieco zaskakujące, że do niedawna nikt nie rozważał innych kolorowań rozróżniających niż wierzchołkowe. Jedynym wyjątkiem jest praca Fishera i Isaaka [30] z roku 2008, w której autorzy dla wyznaczenia liczby rozróżniającej iloczynu kartezjańskiego grafów pełnych rozważyli rozróżniające kolorowania krawędzi grafów dwudzielnych pełnych. Nie sformułowali oni jednak ogólnego problemu, ani nie wprowadzili terminologii i oznaczeń. Z Kalinowskim w [H2] zdefiniowaliśmy *indeks rozróżniający* $D'(G)$ grafu G jako najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do kolorowania krawędzi grafu G przełamującego wszystkie nietrywialne automorfizmy. Dla kolorowań właściwych wprowadziliśmy *chromatyczny indeks rozróżniający* $\chi'_D(G)$.

Z Kalinowskim i Woźniakiem w pracy [P20] także zapoczątkowaliśmy badania totalnych kolorowań rozróżniających. Wprowadziliśmy definicje *totalnej liczby rozróżniającej* $D''(G)$ dla totalnych kolorowań ogólnych i *totalnej chromatycznej liczby rozróżniającej* $\chi''_D(G)$ dla totalnych kolorowań właściwych.

Zamieszczony na początku spis prac składających się na osiągnięcie naukowe jest podany chronologicznie w kolejności publikowania. Zawarte w nich wyniki będą jednak omówione tematycznie, ponieważ takie ich przedstawienie wydaje się bardziej przejrzyste. Kolejne rozdziały poświęcone więc będą z osobna rozróżniającym kolorowaniom właściwym i niewłaściwym. Na zakończenie w rozdziale 1.3 zarysujemy perspektywy rozwoju badanej przez nas tematyki kolorowań rozróżniających, która rozwija się ciągle bardzo intensywnie i stwarza wiele możliwości dalszych badań.

Należy jeszcze dodać, że w marcu 2017 r. zakończył się odmową nadania mi stopnia proces habilitacyjny (rozpoczęty w sierpniu 2016 r.). Osiągnięcie naukowe pt. *Kolorowania przełamujące automorfizmy grafów* zawierało osiem prac, z czego poniższy wniosek zawiera tylko dwie prace [H1] i [H2]. Prace te ukazały się w uznanym czasopiśmie i wiążą się tematycznie z przedstawianym cyklem publikacji. Przedkładane osiągnięcie obejmuje ponadto cztery tegoroczne prace rozłączne z poprzednim wnioskiem, w tym dwie samodzielne, które wówczas występowały w dorobku jako preprinty.

1.2.2. Kolorowania właściwe

A. Kolorowania wierzchołkowe

Jak już wspomniano we wprowadzeniu, historycznie pierwsze rozważane były rozróżniające kolorowania wierzchołków. Rozróżniające kolorowania właściwe jako pierwsze rozważały Collins i Trenk [19], które kontynuowały te badania m.in. w [18], [20]. Udowodniły one w [19], że dla skończonego grafu spójnego $\chi_D(G) \leqslant 2\Delta(G)$, oraz że równość zachodzi tylko dla C_6 i $K_{n,n}$.

W pracy **[H3]** główne wyniki dotyczą właściwego kolorowania wierzchołków spójnego grafu nieskończonego G ze skończonym maksymalnym stopniem $\Delta(G)$. Zacznijmy od górnego ograniczenia chromatycznej liczby rozróżniającej.

Twierdzenie 1. (Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Shekarriz [H3]) *Jeśli G jest nieskończonym grafem spójnym ze skończonym maksymalnym stopniem Δ, to $\chi_D(G) \leqslant 2\Delta - 1$.*

Dowód jest częściowo inspirowany dowodem twierdzenia Collins-Trenk dla grafów skończonych. Jest jednak mniej skomplikowany i obejmuje także grafy skończone. Przy okazji łatwo wskazaliśmy rodzinę grafów skończonych, która spełnia równość w powyższym twierdzeniu, choć Collins i Trenk przypuszczały, że takie grafy nie istnieją (por. Conj. 5.1. w [19]).

W przypadku grafów nieskończonych natomiast wydaje się, że jedynie dla dwustronnie nieskończonej ścieżki ograniczenie w powyższym twierdzeniu jest osiągane. Dla grafów nieskończonych ze skończonym maksymalnym stopniem $\Delta \geqslant 3$ podejrzewamy, że prawdziwe będzie ograniczenie górne $2\Delta - 2$ dla chromatycznego indeksu rozróżniającego. Potwierdziliśmy tę hipotezę dla grafów subkubicznych, czyli z maksymalnym stopniem 3 i z dodatkowym założeniem o nieskończonym ruchu (por. twierdzenie 4 poniżej). Graf G ma *nieskończony ruch*, jeśli każdy nietrywialny automorfizm przemieszcza nieskończenie wiele wierzchołków.

Nieskończony ruch, zapewniając, że każdy automorfizm przenosi nieskończenie wiele wierzchołków, pozwala często bardzo istotnie obniżyć ograniczenie na wartość indeksu. Ogólnie drzewa, w szczególności gwiazdy, potrzebują bardzo dużo kolorów do przełamania wszystkich automorfizmów. Bezpośrednio z dowodu twierdzenia 1 wynika, że potrzeba co najwyżej $\Delta + 1$ kolorów do przełamania automorfizmów drzew nieskończonych. Dla drzew *lokalnie skończonych* (tzn. z ograniczonym maksymalnym stopniem) i z nieskończonym ruchem udało nam się zredukować tę liczbę do stałej.

Twierdzenie 2. (Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Shekarriz [H3]) *Jeśli T jest lokalnie skończonym, spójnym drzewem z nieskończonym ruchem, to $\chi_D(T) \leqslant 3$.*

Każde drzewo ma kolorowanie właściwe dwoma kolorami. Istota dowodu leży w koncepcji przekolorowania trzecim kolorem niektórych wierzchołków tak, by zostały przełamane wszystkie nietrywialne automorfizmy. Wybieramy wierzchołek v i drugą sferę wokół niego kolorujemy trzecim kolorem. Jeśli zadbamy o to, by był to jedyny w całym grafie wierzchołek o tej własności, to każdy automorfizm zachowujący takie kolorowanie musi stabilizować v. Następnie stabilizujemy wierzchołki nieskończenie wielu sfer o środku v w następujący sposób. Dla każdego wierzchołka u danej sfery wybieramy jeden wierzchołek w odpowiedniej odległości na nieskończonym promieniu wychodzącym z wierzchołka v i przechodzącym przez wszystkie sfery o większych promieniach. Przekolorowujemy te wierzchołki trzecim kolorem, gwarantując przełamanie wszystkich automorfizmów. Jest to nowa technika, która pierwszy raz pojawiła się w tej pracy.

Następnie dla dowolnych nieskończonych drzew pokazaliśmy ograniczenie górne, które jest ostre dla nieskończonego promienia zakończonego gwiazdą z $\Delta - 1$ wiszącymi krawędziami.

Twierdzenie 3. **(Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Shekarriz [H3])** *Jeśli T jest nieskończonym drzewem z maksymalnym stopniem Δ, to $\chi_D(T) \leqslant \Delta$.*

W tym przypadku korzystamy istotnie z twierdzenia 2. Mianowicie istnieje maksymalne poddrzewo T_1 z nieskończonym ruchem, które kolorujemy trzema kolorami i w ten sposób stabilizujemy je. Następnie kolorujemy maksymalne poddrzewa skończone mające jeden wierzchołek w T_1. Używamy zatem co najwyżej $\Delta - 1$ kolorów do pokolorowania kolejnych wierzchołków w porządku algorytmu przeszukiwania wszerz zastosowanego w danym poddrzewie skończonym (i rozpoczętym w wierzchołku należącym do T_1), pamiętając, by rodzeństwo otrzymało zawsze różne kolory.

Na koniec tego rozdziału przytoczmy jeszcze najciekawszy wynik tej pracy.

Twierdzenie 4. **(Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Shekarriz [H3])** *Jeśli G jest nieskończonym grafem spójnym z maksymalnym stopniem $\Delta = 3$ i nieskończonym ruchem, to $\chi_D(G) \leqslant 4$.*

W dowodzie stosunkowo głęboko wnikamy w strukturę grafu, która wynika z nieskończonego ruchu. Podobnie jak w poprzednich dowodach wybieramy jeden wierzchołek, któremu zapewniamy, że będzie stały w każdym automorfizmie zachowującym definiowane kolorowanie, i rozważamy kolejne sfery w tym wierzchołku. Konstruujemy takie kolorowanie, w którym nieskończenie wiele sfer jest punktowo ustabilizowanych przez każdy automorfizm zachowujący to kolorowanie. To w połączeniu z nieskończonym ruchem gwarantuje, że kolorowanie jest rozróżniające.

Każdą taką sferę możemy podzielić na zbiór wierzchołków będących początkiem nieskończonych promieni przechodzących przez wszystkie sfery o większych promieniach oraz na pozostałe wierzchołki, które na pozór powinny być stałe w każdym automorfizmie ze względu na nieskończony ruch. To one sprawiły najwięcej kłopotów w dowodzie i skomplikowały nieco algorytm kolorowania. Te pierwsze wierzchołki, stabilizujemy używając ostrożnie i wielokrotnie pomysłu podobnego do tego z dowodu twierdzenia 2.

B. Kolorowania krawędziowe

W pracy [**H2**] zdefiniowaliśmy *chromatyczny indeks rozróżniający* $\chi'_D(G)$ grafu G jako najmniejszą liczbę kolorów w rozróżniającym kolorowaniu właściwym krawędzi. Najciekawszym wynikiem jest tu udowodnienie górnego ograniczenia chromatycznego indeksu rozróżniającego, które oznacza, że każdy graf klasy 2 (Wizinga) ma kolorowanie krawędzi minimalną liczbą kolorów (tj. równą indeksowi chromatycznemu), które łamie wszystkie nietrywialne automorfizmy.

Twierdzenie 5. (Kalinowski, Pilśniak [H2]) *Jeśli G jest grafem spójnym rzędu $n \geqslant 3$, różnym od C_4, K_4, C_6 i $K_{3,3}$, to*

$$\Delta(G) \leqslant \chi'_D(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Wśród grafów klasy 1, które potrzebują dodatkowego koloru do przełamania wszystkich automorfizmów, są np. drzewa bisymetryczne. Drzewo nazywamy *bisymetrycznym*, jeśli ma krawędź centralną, wszystkie liście jednakowo od niej oddalone oraz wszystkie wierzchołki niebędące liśćmi są tego samego stopnia.

Twierdzenie 5 jest wnioskiem z twierdzenia dotyczącego rozróżniania wierzchołków grafu kolorowymi drogami z pracy [**H1**], które rok wcześniej rozważaliśmy wspólnie z Kalinowskim, Przybyłą i Woźniakiem. Niech f będzie właściwym kolorowaniem krawędzi grafu G. Każda droga definiuje ciąg kolorów (α_i) zwany *kolorową drogą*. Niech $W_f(x)$ oznacza zbiór wszystkich kolorowych dróg rozpoczynających się w wierzchołku x. Przez $\mu(G)$ oznaczamy minimalną liczbę kolorów potrzebną do takiego kolorowania f, by każda para różnych wierzchołków otrzymała różne zbiory kolorowych dróg.

To podejście jest rozszerzeniem definicji wprowadzonej niezależnie przez Burris i Schelpa [15] oraz Černý'ego, Horňáka i Sotáka [16] w latach dziewięćdziesiątych XX w. Rozważali oni zbiór kolorów krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x i żądali od kolorowania, by parami różne wierzchołki otrzymywały różne zbiory kolorów. Minimalna liczba kolorów w takim kolorowaniu może być dowolnie większa od indeksu chromatycznego, np. cykl C_n wymaga co najmniej $\sqrt{2n}$ kolorów. Tymczasem, jeśli rozważymy w każdym wierzchołku zbiór wszystkich kolorowych dróg, a nie tylko tych długości jeden, wówczas minimalna liczba kolorów jest bardzo bliska indeksowi chromatycznemu danego grafu.

Twierdzenie 6. (Kalinowski, Pilśniak, Przybyło, Woźniak [H1]) *Jeśli G jest grafem spójnym rzędu $n \geqslant 3$, różnym od C_4, K_4, C_6 i $K_{3,3}$, to*

$$\mu(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

W pierwszym etapie dowodu pokazujemy, że $\mu(G) \leqslant \chi'(G) + 1$. Rozważamy w kolorowaniu właściwym krawędzi podgraf indukowany przez dwa kolory i przekolorowujemy jedną krawędź dodatkowym kolorem, jeśli chociaż jedna składowa tego podgrafu jest ścieżką, lub przekolorowujemy dwie krawędzie, jeśli w podgrafie indukowanym występuje cykl długości co najmniej 8. Dowód komplikuje się w przypadku, gdy w rozważanym kolorowaniu każda para kolorów indukuje tylko krótsze cykle.

W drugiej części dowodu, gdy graf G wymaga $\Delta(G)+1$ kolorów w kolorowaniu właściwym, wskazujemy taką modyfikację tego kolorowania (nie używając dodatkowego koloru), która każdej parze różnych wierzchołków x, y przypisuje różne zbiory kolorowych dróg, $W_f(x) \neq W_f(y)$. Minimalizujemy liczbę krawędzi w wybranym kolorze i wnikając głęboko w strukturę grafu precyzyjnie definiujemy ewentualne przekolorowanie dwukolorowych ścieżek.

Dla dowodu twierdzenia 5 wystarczyło zatem zauważyć, że $\chi'_D(G) \leqslant \mu(G)$. Podaliśmy też przykłady na ostrość każdej z następujących nierówności

$$\chi'(G) \leqslant \chi'_D(G) \leqslant \mu(G).$$

Przy okazji kolorowań właściwych wspomnijmy jeszcze, że dla rozróżniającego indeksu chromatycznego udowodniona została również w pracy [H6] nierówność typu Nordhausa-Gadduma.

Twierdzenie 7. (Pilśniak [H6]) *Niech G będzie grafem rzędu $n \geqslant 3$, takim że ani on, ani jego dopełnienie nie zawierają K_2 jako składowej spójnej. Wówczas*

$$n - 1 \leqslant \chi'_D(G) + \chi'_D(\overline{G}) \leqslant 2(n-1)$$

z wyjątkiem grafu $K_{1,4}$.

Mimo iż powyższe ograniczenia górne i dolne są takie same jak te udowodnione przez Wizinga [81] dla indeksu chromatycznego, dowód twierdzenia 7 nie wynika z tego rezultatu Wizinga. Korzystamy istotnie z tezy i dowodu twierdzenia 5.

Nadmieńmy ponadto, że z Kalinowskim i Woźniakiem rozważyliśmy w pracy [P20] właściwe kolorowania totalne, które przełamują wszystkie nietrywialne automorfizmy. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie, że każdy graf G mający totalny indeks chromatyczny $\chi''(G)$ co najmniej $\Delta(G)+2$ dopuszcza kolorowanie tylko $\chi''(G)$ kolorami przełamujące wszystkie nietrywialne automorfizmy.

1.2.3. Kolorowania niewłaściwe

W roku 2006 Collins i Trenk [19] udowodniły, niezależnie od Klavžara, Wong i Zhu [57], że liczba rozróżniająca $D(G)$ grafu spójnego G jest z góry ograniczona przez $\Delta(G)+1$ i równość zachodzi tylko dla K_n, $K_{n,n}$ i C_5. Następne badania skupiły się na pewnych klasach grafów, w szczególności na iloczynie kartezjańskim grafów, których strukturę automorfizmów opisali Imrich [43] i Miller [65], korzystając z jednoznacznego rozkładu na czynniki pierwsze względem tego iloczynu (którego istnienie pokazali Sabidussi [72] i Wizing [80]).

Dobrze znana struktura automorfizmów i potencjalne zastosowania w informatyce, gdzie często modeluje się sieci grafami iloczynowymi, były zapewne przyczyną szczególnych badań kolorowań wierzchołkowych tychże grafów. W 2005 r. Albertson [2] zaczął badać liczbę rozróżniającą grafu potęgowego względem iloczynu kartezjańskiego. Jego wynik został poprawiony przez Klavžara i Zhu [58], a ostatecznie w 2006 r. liczbę rozróżniającą dowolnej potęgi kartezjańskiej grafu spójnego podali Imrich i Klavžar [45]. W tej samej pracy autorzy badali też liczbę rozróżniającą iloczynu kartezjańskiego dwóch grafów względnie pierwszych. Udowodnili oni, że $D(G\Box H)\leqslant 2$ dla spójnych i względnie pierwszych grafów G i H, spełniających warunek $|G|\leqslant|H|\leqslant 2^{|G|}-|G|+1$. W pracy [P24] udowodniliśmy ich tezę bez konieczności założenia, że czynniki są względnie pierwsze, otrzymując dwa wyjątki.

A. Kolorowania krawędziowe - iloczyny kartezjańskie

Indeks rozróżniający grafu G definiujemy jako najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do kolorowania krawędziowego G przełamującego wszystkie nietrywialne automorfizmy grafu G i oznaczamy go $D'(G)$. Takie kolorowanie nie istnieje dla K_2. Zakładamy zatem zawsze, że K_2 nie jest składową spójną rozważanych grafów. Pierwszy raz definicję tę podaliśmy z Kalinowskim w pracy [H2].

Podobnie jak w przypadku kolorowań wierzchołkowych, pomocnym narzędziem w wyznaczeniu górnego ograniczenia indeksu rozróżniającego pewnych klas grafów okazał się ruch krawędziowy grafu i jego związek z liczbą automorfizmów. *Ruchem krawędziowym grafu G* nazywamy minimalną liczbę krawędzi przemieszczanych w każdym nietrywialnym automorfizmie grafu G i oznaczamy go $m^*(G)$. Badania w pracy **[H5]** zaczynamy od porównania ruchu krawędziowego grafu z ruchem wierzchołkowym, oznaczanym przez $m(G)$. Okazuje się, że dla drzew te parametry są równe lub wręcz czasami ruch krawędziowy jest mniejszy od wierzchołkowego. Jednak na ogół jest przeciwnie. Mianowicie dowodzimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. (Pilśniak [H5]) *Niech G będzie grafem spójnym rzędu $n \geqslant 3$ z minimalnym stopniem δ. Wtedy*

$$m^*(G) \geqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(\delta-1)m(G), & \text{jeśli } \delta \geqslant 3, \\ m(G)-2, & \text{jeśli } \delta \leqslant 2. \end{cases}$$

Ponadto, jeśli $\delta \geqslant 3$, to $m^*(G) = \frac{1}{2}(\delta-1)m(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy G jest regularny, $m(G) = |V(G)|$ i istnieje automorfizm $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, który jest iloczynem cykli długości dwa.

W pracy [H5] dowodzimy też krawędziową wersję lematu o ruchu Russlla i Sundarama [71], o związku indeksu rozróżniającego grafu z ruchem krawędziowym.

Twierdzenie 9. (Pilśniak [H5]) *Niech d będzie dowolną liczbą dodatnią, a G grafem skończonym. Wówczas $D'(G) \leqslant d$, jeśli*

$$d^{\frac{m^*(G)}{2}} \geqslant |\,\mathrm{Aut}(G)|.$$

Dowód jest analogiczny do wersji dla kolorowań wierzchołkowych. Wymaga jedynie dostosowania do kolorowania krawędzi. Zastosowaliśmy to twierdzenie do podania górnego ograniczenia indeksu rozróżniającego potęg cykli i grafów pełnych względem iloczynów kartezjańskiego, prostego i silnego.

Twierdzenie 10. (Pilśniak [H5]) *Niech n i r będą liczbami naturalnymi, takimi że $n \geqslant 3$ i $r \geqslant 2$. Jeżeli G jest jednym z grafów $K_n^{\square,r}$, $K_n^{\times,r}$, $K_n^{\boxtimes,r}$, $C_n^{\square,2}$, $C_{2n-1}^{\times,2}$, $C_{2n-1}^{\boxtimes,2}$, to $D'(G) = 2$ w wyjątkiem $K_3^{\square,2}$.*

Mimo że są to bardzo szczególne klasy grafów, przełamanie ich automorfizmów może okazać się cenne w potencjalnych zastosowaniach w informatyce, albowiem rozważane sieci są często modelowane przez bardzo proste i symetryczne grafy, jakimi są potęgi małych grafów [62]. Ponadto są to jedyne do tej pory wyniki dla rozróżniania grafów produktowych względem iloczynu prostego i silnego.

Rozważania iloczynu kartezjańskiego grafów spójnych, dla których indeks rozróżniający wynosi co najwyżej 2, kontynuowaliśmy w pracach [P25] i [P26].

B. Kolorowania krawędziowe - ogólne ograniczenia

Systematyczne badanie rozróżniających kolorowań krawędziowych zostało zainicjowane w pracy [**H2**], jak już wspomnieliśmy wcześniej. Co prawda z uogólnionej wersji [48] twierdzenia Whitneya wiadomo, że dla dowolnego spójnego grafu G na co najmniej pięciu wierzchołkach, w szczególności dla każdego grafu nieskończonego, istnieje naturalny izomorfizm grup automorfizmów $\mathrm{Aut}(G)$ i $\mathrm{Aut}(L(G))$, gdzie $L(G)$ jest grafem krawędziowym grafu G. Zatem rozróżniające kolorowanie krawędzi grafu G jest poprzez ten izomorfizm równoważne rozróżniającemu kolorowaniu wierzchołków grafu krawędziowego $L(G)$. Z drugiej zaś strony od ponad pięćdziesięciu lat, między innymi dzięki twierdzeniu Wizinga [81] o indeksie chromatycznym, obiektem intensywnych badań są kolorowania krawędziowe - niezależnie od kolorowań wierzchołkowych.

Zacznijmy od następującego prostego a użytecznego spostrzeżenia (graf nazywamy *asymetrycznym*, jeżeli identyczność jest jedynym jego automorfizmem).

Obserwacja 11. **(Pilśniak [H6])** *Jeśli graf G ma asymetryczny podgraf rozpinający H, to $D'(G) \leqslant 2$.*

Powyższa obserwacja pozwala natychmiast wyznaczyć indeks rozróżniający grafu pełnego rzędu co najmniej 6, ponieważ graf asymetryczny rzędu n istnieje dla wszystkich $n \geqslant 6$. Stąd $D'(K_n) = 2$, podczas gdy $D(K_n) = n$. Uwypukla to różnicę między parametrami D' i D. Później będziemy korzystać z mocniejszej wersji tej obserwacji: wystarczy bowiem, że podgraf H będzie rzędu $|G| - 1$.

Z drugiej strony zdefiniowaliśmy nieskończoną klasę drzew, które mają indeks większy niż liczbę rozróżniającą. W pracy między innymi udało się porównać te dwa parametry i pokazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12. **(Kalinowski, Pilśniak [H2])** *Jeśli G jest grafem spójnym rzędu co najmniej $n \geqslant 3$, to $D'(G) \leqslant D(G) + 1$.*

Ta sama nierówność spełniona jest również dla grafów nieskończonych, co udowodniliśmy w [**H3**].

Głównymi wynikami pracy [H2] i [H6] dla kolorowań niekoniecznie właściwych są górne ograniczenia indeksu rozróżniającego przez maksymalny stopień grafu. Biorąc pod uwagę twierdzenie 12 i znane ograniczenie dla $D(G)$, natychmiast otrzymujemy wniosek, że $D'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. To górne ograniczenie udało się jednak obniżyć w [H2].

Twierdzenie 13. **(Kalinowski, Pilśniak [H2])** *Jeśli G jest grafem spójnym rzędu co najmniej 3, to $D'(G) \leqslant \Delta(G)$ z wyjątkiem krótkich cykli C_3, C_4 i C_5.*

Dowód prowadzimy najpierw dla drzew i pokazujemy, że równość $D'(T) = \Delta(T)$ zachodzi wyłącznie dla drzew symetrycznych i bisymetrycznych. Analogicznie do definicji drzewa bisymetrycznego, drzewo nazywamy *symetrycznym*, jeśli ma wierzchołek centralny, wszystkie jego liście są jednakowo od niego oddalone oraz wszystkie wierzchołki niebędące liśćmi są tego samego stopnia. Następnie kontynuując dowód twierdzenia 13, rozważamy w grafie G krawędź $e = uv$, której jeden z końców jest minimalnego stopnia. Jeżeli G nie jest regularny, kolorujemy krawędź e kolorem 1 i więcej tego koloru już nie używamy. Pozostałe krawędzie sąsiednie z e kolorujemy różnymi zbiorami kolorów, by przełamać ewentualną transpozycję jej końców. Następnie rozważamy krawędzie łączące kolejne sfery w wierzchołku v i kolorujemy je różnymi kolorami, o ile mają wspólny koniec bliższy v. Jest ich zawsze co najwyżej $\Delta - 1$. Pozostałe krawędzie już nie grają roli w przełamywaniu automorfizmów i można je pokolorować dowolnie, na przykład kolorem 2.

Dla grafów regularnych dowód zdecydowanie komplikuje się. Wszystkie krawędzie incydentne z wyróżnionym wierzchołkiem x kolorujemy kolorem 1 i w dalszej konstrukcji kolorowania nie dopuszczamy do powstania takiego monochromatycznego wierzchołka. Dzięki temu x będzie stały względem dowolnego automorfizmu zachowującego to kolorowanie. Dla ustabilizowania jego sąsiadów dzielimy zbiór $N(x)$ na podzbiory według liczby sąsiednich wierzchołków w drugiej sferze $N_2(x)$ i dla każdego takiego podzbioru wskazujemy kolorowanie krawędzi incydentnych z poszczególnymi wierzchołkami, by były one stałe względem dowolnego automorfizmu zachowującego to kolorowanie.

Z podobnymi trudnościami, ale w znacznie większym nagromadzeniu, trzeba było uporać się chcąc podać charakteryzację grafów spójnych dla których indeks rozróżniający równy jest Δ. Dowód poniższego twierdzenia z pracy [**H6**] jest bardzo techniczny i długi, mimo że jest zwięźle zapisany.

Twierdzenie 14. **(Pilśniak [H6])** *Jeśli G jest grafem spójnym o stopniu maksymalnym co najmniej 3 i nie jest ani symetrycznym ani bisymetrycznym drzewem, to $D'(G) \leqslant \Delta(G) - 1$ z wyjątkiem grafów $K_{3,3}$ i K_4.*

W rzeczywistości twierdzenie powyższe daje pełną charakteryzację grafów spójnych, dla których indeks rozróżniający jest równy maksymalnemu stopniowi.

Wniosek 15. **(Pilśniak [H6])** *Niech G będzie grafem spójnym o stopniu maksymalnym Δ. Wówczas $D'(G) = \Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorficzny z $K_{3,3}$, K_4, cyklem C_n rzędu co najmniej 6 lub symetrycznym albo bisymetrycznym drzewem.*

W pracy [H6] udało się też znacznie zredukować górne ograniczenie dla pewnych szczególnych klas, takich jak grafy trasowalne, tj. zawierające ścieżkę Hamiltona, grafy planarne, czy grafy bez szponów. *Graf bez szponów* jest grafem, który nie zawiera $K_{1,3}$ jako podgrafu indukowanego. Zaznaczmy przy tym, że liczba rozróżniająca (dla kolorowań wierzchołkowych) jest nieuchwytna przez pryzmat zakazanych podgrafów czy własności typu hamiltonowskiego.

Twierdzenie 16. **(Pilśniak [H6])** *Jeśli G jest grafem trasowalnym rzędu co najmniej 7, to $D'(G) \leqslant 2$.*

Dowód tego twierdzenia, podobnie jak dwóch następnych twierdzeń, jest krótki dzięki obserwacji 11. Wynik ten jest szczególnie ciekawy w kontekście hipotezy Lovásza z 1969 r., że każdy spójny graf wierzchołkowo przechodni jest trasowalny.

W przypadku grafów bez szponów korzystaliśmy z twierdzenia Wina [86], iż w każdym takim grafie dwuspójnym istnieje drzewo rozpinające ze stopniem maksymalnym nie większym niż 3. Z pomocą tego drzewa znajdowaliśmy podgraf H, dla którego istnieje 2-kolorowanie rozróżniające. Gdy graf G był dwuspójny, a drzewo Wina symetryczne bądź bisymetryczne, korzystając z braku indukowanego $K_{1,3}$, dokładaliśmy odpowiednio krawędzie do drzewa Wina. Jeśli graf był jednospójny, rozważaliśmy graf bloków, który w tym przypadku jest ścieżką. Ostatecznie otrzymaliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 17. **(Pilśniak [H6])** *Jeśli G jest spójnym grafem bez szponów, to $D'(G) \leqslant 3$.*

Planarne grafy 4-spójne są hamiltonowskie ze znanego twierdzenia Tutte'a [79], zatem są 2-rozróżnialne z twierdzenia 16. Planarne grafy 3-spójne mają drzewo rozpinające ze stopniem maksymalnym 3, co udowodnił Barnette [5]. Ponownie korzystając z obserwacji 11, pokazaliśmy stałe ograniczenie górne.

Twierdzenie 18. (Pilśniak [H6]) *Jeśli G jest 3-spójnym grafem planarnym, to $D'(G) \leqslant 3$.*

Dla grafów 2-spójnych nie jest możliwe stałe ograniczenie indeksu rozróżniającego, o czym świadczy przykład dwudzielnych grafów pełnych K_{2,r^2}, które potrzebują $r+1$ kolorów.

W pracy [H6] rozważaliśmy także warunek typu Nordhaussa-Gadduma dla indeksu rozróżniającego grafu, czyli ograniczenia dolne i górne sumy indeksów grafu i jego dopełnienia. Niech $\Delta = \max\{\Delta(G), \Delta(\overline{G})\}$. Z pierwszych badań drzew wyłoniła się hipoteza.

Hipoteza 19. (Pilśniak [H6]) *Niech G będzie grafem rzędu $n \geqslant 7$, takim że ani on, ani jego dopełnienie nie zawierają K_2 jako składowej spójnej. Wówczas*

$$2 \leqslant D'(G) + D'(\overline{G}) \leqslant \Delta + 2.$$

Dolne ograniczenie równe 2 jest oczywiście osiągane przez grafy asymetryczne.

Dzięki twierdzeniu Hedetniemich i Slatera [38] o pakowaniu dwóch drzew w graf pełny, rozważając osobno przypadek gwiazdy, otrzymaliśmy nawet nieco silniejszą tezę dla drzew.

Twierdzenie 20. (Pilśniak [H6]) *Jeśli T jest drzewem rzędu $n \geqslant 7$, to*

$$D'(T) + D'(\overline{T}) \leqslant \Delta(T) + 2.$$

Powyższą hipotezę udowodniliśmy również dla grafów, dla których one same lub ich dopełnienia mają indeks rozróżniający nie większy niż 3. Okazuje się, że ten warunek spełniają 3-spójne grafy planarne, grafy bez szponów, grafy bez trójkątów oraz grafy ze ścieżką hamiltonowską. Istotna trudność w dowodzie spowodowana grafami niespójnymi, została pokonana przez rozpinanie podgrafu asymetrycznego w dwudzielnym grafie pełnym w dopełnieniu grafu niespójnego.

C. Małe automorfizmy

Praca [H4] łączy dwa zupełnie różne sposoby rozróżniania wierzchołków przez kolorowania krawędzi: kolorowania przełamujące automorfizmy grafu oraz kolorowania rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami kolorów incydentnych krawędzi. W tym celu rozważamy tylko niektóre, tak zwane *małe* automorfizmy, czyli te, które przynajmniej jeden wierzchołek przekształcają na swojego sąsiada. Przez $D'_s(G)$ oznaczamy minimalną liczbą kolorów potrzebną do kolorowania krawędzi grafu G, dla którego nie istnieje żaden mały automorfizm grafu G zachowujący to kolorowanie. Dowodzimy następującego twierdzenia, które można traktować jako słabszą wersję wciąż otwartej hipotezy 1-2-3 Karońskiego, Łuczaka i Thomasona [52], że trzy kolory $\{1, 2, 3\}$ zawsze wystarczą do rozróżnienia sąsiednich wierzchołków sumami.

Twierdzenie 21. (Kalinowski, Pilśniak, Woźniak [H4]) *Jeśli graf G nie zawiera K_2 jako składowej, to $D'_s(G) \leqslant 3$.*

Dowód tego twierdzenia jest stosunkowo krótki dzięki pomysłowi wykorzystania twierdzenia Kalkowskiego, o którym będzie mowa za chwilę, przy omawianiu kolorowania totalnego. Najpierw roważamy grafy mające wierzchołek v, który nie należy do żadnego trójkąta. Wszystkie incydentne z nim krawędzie kolorujemy kolorem 1 i zapewniamy w dalszym kolorowaniu, że nie będzie innego wierzchołka z monochromatyczną paletą $\{1\}$. W podgrafach indukowanych przez kolejne sfery w wierzchołku v używamy totalnych kolorowań Kalkowskiego. Następnie kolory z wierzchołków przenosimy na incydentne krawędzie w kierunku wierzchołka v i zachowujemy kolory krawędzi leżących wewnątrz sfer.

Jeśli każdy wierzchołek należy do jakiegoś trójkąta, rolę wierzchołka v gra najdłuższa ścieżka w grafie. Odpowiednio kolorujemy krawędzie podgrafu indukowanego przez wierzchołki tej ścieżki i korzystamy ze znanego faktu, że każde dwie najdłuższe ścieżki w grafie spójnym przecinają się. Następnie rozważamy kolorowania Kalkowskiego w kolejnych sferach wokół tej ścieżki jak w poprzednim przypadku.

Z Kalinowskim i Woźniakiem w pracy [P20] wprowadziliśmy kolorowania totalne, które przełamują wszystkie nietrywialne automorfizmy i udowodniliśmy, że $\sqrt{\Delta(G)}$ jest ostrym górnym ograniczeniem dla totalnej liczby rozróżniającej. Podobnie jak przy kolorowaniu krawędzi, rozważyliśmy też w [H4] totalne kolorowania przełamujące tylko małe automorfizmy.

Twierdzenie 22. **(Kalinowski, Pilśniak, Woźniak [H4])** *Dla każdego grafu G istnieje kolorowanie totalne dwoma kolorami, przełamujące wszystkie małe automorfizmy.*

Twierdzenie powyższe nawiązuje do hipotezy 1-2 Przybyły-Woźniaka, że dwa kolory $\{1, 2\}$ wystarczą w totalnym kolorowaniu rozróżniającym sąsiednie wierzchołki sumami kolorów na incydentnych krawędziach i koloru wierzchołka. Najlepszy znany wynik w kierunku tej hipotezy został uzyskany przez Kalkowskiego [50], który udowodnił, że wystarczą trzy kolory $\{1, 2, 3\}$, z których jeden nie jest używany na wierzchołkach. W dowodach twierdzeń 21 i 22 korzystaliśmy właśnie z tego wyniku.

1.3. Perspektywy dalszych badań

Rozróżniające kolorowania grafów są w dalszym ciągu intensywnie badane w co najmniej dwudziestu ośrodkach na świecie i co roku ukazują się nowe prace w uznanych czasopismach kombinatorycznych. Istnieje wiele otwartych problemów dotyczących kolorowań rozróżniających, z których najbardziej znana jest hipoteza o ruchu nieskończonym Tuckera [21]. Kilka hipotez sformułowanych zostało także w omawianych tu pracach stanowiących osiągnięcie naukowe.

Tematykę tę można także uogólnić na obiekty inne niż grafy nieskierowane. Podczas referatu jesienią 2015 r. w Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI) w Bordeaux koledzy, którzy mają istotny wkład w konstrukcję algorytmów wyboru lidera opartych na systemach samostabilizujących (por. [6]), zasugerowali naturalny kierunek badań kolorowań przełamujących nietrywialne automorfizmy - w **grafach skierowanych i zorientowanych**. Wydaje się, że ogromne pole niezbadanych grafów skierowanych skończonych i nieskończonych czeka na znalezienie kolorowań łuków i kolorowań totalnych przełamujących nietrywialne automorfizmy.

Definicję kolorowania wierzchołków czy krawędzi przełamującego automorfizmy można z powodzeniem rozważać w **hipergrafach**. Spodziewamy się zajmujących i niełatwych rozważań z poszukiwaniem kolorowań przełamujących nietrywialne automorfizmy hipergrafów. W szczególności hipergrafy jednolite jako struktury regularne mogą być interesujące.

Ciekawym kierunkiem rozważań optymalizacyjnych rozpoczętych już przez Boutin dla kolorowań wierzchołków jest badanie kosztu kolorowania przełamującego automorfizmy ([12], [13], [14]). Rozpatrujemy grafy 2-rozróżnialne i minimalizujemy liczbę wierzchołków w jednym z kolorów. Kolejnym naturalnym zatem kierunkiem badań może być wyznaczanie **kosztu kolorowania krawędziowego** bądź totalnego dla 2-rozróżnialnych grafów skończonych i nieskończonych.

2. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Pozostały dorobek publikacyjny mieści się w trzech tematach: pakowania grafów, digrafów i hipergrafów, podziały i rozkłady grafów oraz kolorowania rozróżniające wierzchołki grafu (w tym łamiące automorfizmy).

2.1. Prace

[P1] A.Gőrlich, M.Pilśniak, M.Woźniak, *On cyclically embeddable (n,n)-graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 23(1) (2003) 85–104.

[P2] A.Gőrlich, M.Pilśniak, M.Woźniak, I.Zioło, *A note on embedding graphs without short cycles*, Discrete Math., 286/1-2 (2004), 75–77.

[P3] M.Pilśniak, *Packing of three copies of a digraph into the transitive tournament*, Discuss. Math. Graph Theory 24(3) (2004) 443–456.

[P4] A.Gőrlich, M.Pilśniak, M.Woźniak, *A note on a packing problem in transitive tournaments*, Graphs Combin. 22:233–239 (2006).

[P5] A.Gőrlich, R.Kalinowski, M.Meszka, M.Pilśniak, M.Woźniak, *A note on decompositions of transitive tournaments*, Discrete Math. 307 (2007) 896–904.

[P6] M.Pilśniak, *Packing of two digraphs into the transitive tournament*, Discrete Math. 307/7-8 (2007) 971–974.

[P7] A.Gőrlich, M.Pilśniak, M.Woźniak, I.Zioło, *Fixed-point-free embeddings of digraphs with small size*, Discrete Math. 307/11-12 (2007), 1332–1340.

[P8] M.Pilśniak, M.Woźniak, *A note on packing of two copies of a hypergraph*, Discuss. Math. Graph Theory 27(1) (2007) 45–49.

[P9] A.Gőrlich, R.Kalinowski, M.Meszka, M.Pilśniak, M.Woźniak, *A note on decompositions of transitive tournaments II*, Australas. J. Combin. 37 (2007) 57–66;

[P10] R.Kalinowski, M.Pilśniak, M.Woźniak, I.Zioło, *Arbitrarily vertex decomposable suns with few rays*, Discrete Math. 309 (2009) 3726–3732.

[P11] R.Kalinowski, M.Pilśniak, M.Woźniak, I.Zioło, *On-line arbitrarily vertex decomposable suns*, Discrete Math. 309 (2009) 6328–6336.

[P12] A.Gőrlich, M.Pilśniak, *A note on an embedding problem in transitive tournaments*, Discrete Math. 310 (2010) 681–686.

[P13] M.Pilśniak, M.Woźniak, *On packing of two copies of a hypergraph*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 13:3 (2011) 67–74.

[P14] M.Borowiecki, J.Grytczuk, M.Pilśniak, *Coloring chip configurations on graphs and digraphs*, Inform. Process. Lett. 112 (2012) 1–4.

[P15] R.Kalinowski, M.Pilśniak, J.Przybyło, M.Woźniak, *Can colour-blind distinguish colour palettes?*, Electron. J. Combin. 20(3) (2013), 23.

[P16] W.Imrich, R.Kalinowski, F.Lehner, M.Pilśniak, *Endomorphism Breaking in Graphs*, Electron. J. Combin. 21 (2014), P1.16.

[P17] I.Broere, M.Pilśniak, *The Distinguishing Index of Some Infinite Graphs*, Electron. J. Combin. 23(1) (2015), P1.78.

[P18] M.Pilśniak, M.Woźniak, *On the total neighbor distinguishing index by sums*, Graphs Combin. (2015) 31:771–782.

[P19] R.Kalinowski, M.Pilśniak, I.Schiermeyer, M.Woźniak, *Dense arbitrarily partitionable graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 36 (2016) 5–22.

[P20] R. Kalinowski, M. Pilśniak, M. Woźniak, *Distinguishing graphs by total colourings*, Ars Math. Contemp. 11 (2016), 79–89.

[P21] O.Baudon, J.Bensmail, F.Foucaud, M.Pilśniak, *Structural properties of recursively partitionable graphs with connectivity* 2, Discuss. Math. Graph Theory 37 (2017) 89–115.

[P22] O.Baudon, M.Shenhaji, M.Pilśniak, J.Przybyło, E.Sopena, M.Woźniak, *Equitable neighbour-sum-distinguishing edge and total colourings*, Discrete Apll. Math. 222 (2017) 40–53;

[P23] I.Broere, M.Pilśniak, *The distinguishing index of the Cartesian product of countable graphs*, Ars Math. Contemp. 13 (2017) 15–21.

[P24] E. Estaji, W. Imrich, R. Kalinowski, M. Pilśniak, T. Tucker, *Distinguishing Cartesian products of countable graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 37 (2017), 155–164.

[P25] A. Gorzkowska, R. Kalinowski, M. Pilśniak, *The distinguishing index of the Cartesian product of finite graphs*, Ars Math. Contemp. 12 (2017), 77–87.

[P26] A. Gorzkowska, M. Pilśniak, *Precise bounds for the distinguishing index of the Cartesian product*, Theoret. Comput. Sci. 687 (2017), 62-69.

2.2. Pakowania

A. Grafy nieskierowane [P1, P2]

Powiemy, że grafy $G_1, \ldots, G_k$ są *pakowalne* (lub istnieje ich *pakowanie*) w graf pełny K_n, jeśli są izomorficzne z krawędziowo rozłącznymi podgrafami K_n, czyli istnieje ciąg iniekcji $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$, który generuje parami rozłączne zbiory $\sigma_i'(E(G_i))$, gdzie

$$\sigma_i' : \ E(G_i) \ni uv \to \sigma_i(u)\sigma_i(v) \in E(K_n).$$

Bezpośrednio do rozwoju badań nad pakowaniem grafów przyczyniła się praca Milnera i Welsha [66] z 1974 r., w której autorzy postawili hipotezę, że dwa grafy G i H rzędu n, takie że $|E(G)| + |E(H)| \leqslant \frac{3}{2}(n-1)$, są pakowalne w graf pełny. Rozwiązanie tego problemu podali cztery lata później Sauer i Spencer [74] oraz Bollobás i Eldridge [11]. W tych samych pracach autorzy ci przedstawili również kilka innych wyników dotyczących pakowania grafów, między innymi rozstrzygnęli problem pakowania dwóch izomorficznych grafów w graf pełny z warunkiem na rozmiar grafu, dokonali też uogólnienia tego twierdzenia na dwa dowolne grafy pakowalne w graf pełny. Jeśli rozważymy rozmiar każdego grafu, to warunkiem wystarczającym, aby były one pakowalne, jest to, aby każdy rozmiar był nie większy niż $n-2$.

Zauważmy, że pakowanie dwóch kopii grafu G w graf pełny można traktować jako zanurzenie G w swoje dopełnienie. Mamy wówczas do czynienia z odpowiednią permutacją σ wierzchołków grafu G: jeśli $xy \in E(G)$, to $\sigma(x)\sigma(y) \notin E(G)$. Dalsze badania nad pakowaniem dwóch kopii grafu w graf pełny dotyczyły między innymi istnienia permutacji pakującej bez punktów stałych, czy też permutacji cyklicznych. Wyniki pochodzą od Faudree'ego, Rousseau, Schelpa, Schustera, Woźniaka [29], [75], [89]. Kontynuując te badania w pracy [**P1**] podaliśmy charakterystykę grafów, których rozmiar jest równy rzędowi i których dwie kopie pakują się cyklicznie w graf pełny.

Natomiast w pracy [**P2**] pracowaliśmy nad następującą hipotezą.

Hipoteza 23. (Faudree, Rousseau, Schelp, Shuster 1981) *Każdy spójny graf, który nie jest izomorficzny z $K_{1,n-1}$ i nie zawiera cykli długości 3 i 4, jest podgrafem swojego dopełnienia.*

Pokazaliśmy, że jest ona prawdziwa dla grafów bez cykli długości co najwyżej 6, a ponadto permutacja pakująca jest bez punktów stałych. W ostatnich latach Görlich i Żak pokazali prawdziwość tej hipotezy dla grafów bez cykli długości co najwyżej 5 ([33]) oraz dla grafów bez cykli długości co najwyżej 4 z dodatkowym warunkiem na rozmiar grafu ([34]).

B. Grafy skierowane [P3, P4, P6, P7, P12]

W kontekście pakowania zdecydowanie mniej badane były grafy skierowane. W roku 1985 Benhocine i Wojda przypuścili, że każdy digraf (poza pewnymi wyjątkami) rozmiaru co najwyżej $2n-3$ jest podgrafem swojego dopełnienia ([9]). Wojda i Zioło pokazali, że każdy digraf rozmiaru co najwyżej $\frac{3}{2}(n-2)$ jest podgrafem swojego dopełnienia ([87]). W pracy [**P7**] poprawiliśmy ten wynik dla rozmiaru co najwyżej $\frac{7}{4}n - 81$.

Od roku 2002 badaliśmy też pakowania grafów zorientowanych w turnieje przechodnie. Była to tematyka mojego doktoratu, aczkolwiek wszystkie prace z tego zakresu ukazały się później. *Turniejem przechodnim* nazywamy graf zorientowany, którego szkieletem jest graf pełny, spełniający warunek przechodniości: jeśli (u, v) i (v, w) są łukami turnieju, to (u, w) też jest jego łukiem. Turniej przechodni rzędu n oznaczamy TT_n.

Analogicznie do definicji dla grafów nieskierowanych definiujemy izomorfizm grafów skierowanych oraz pakowanie grafów zorientowanych w turniej przechodni TT_n. Pierwsze wyniki otrzymaliśmy w pracy [**P4**] dla pakowania dwóch kopii grafu zorientowanego w TT_n.

Twierdzenie 24. (Görlich, Pilśniak, Woźniak [P4]) *Jeśli $\overrightarrow{G}$ jest acyklicznym grafem skierowanym rzędu n i rozmiaru co najwyżej $\frac{3}{4}(n-1)$, to dwie kopie $\overrightarrow{G}$ są pakowalne w turniej przechodni TT_n.*

Następnie udało się znacznie polepszyć ten wynik w pracy [**P6**], otrzymując warunek na sumę rozmiarów dwóch dowolnych grafów zorientowanych gwarantujący pakowanie ich w turniej przechodni. Co ciekawe, hipoteza Milnera i Welsha dla grafów niezorientowanych okazała się i w tym przypadku prawdziwa.

Twierdzenie 25. **(Pilśniak [P6])** *Jeśli $\overrightarrow{G}$ i $\overrightarrow{H}$ są takimi acyklicznymi grafami skierowanymi rzędu n, że $|E(\overrightarrow{G})| + |E(\overrightarrow{H})| \leqslant \frac{3}{2}(n-1)$, to są one pakowalne w turniej przechodni TT_n.*

Bollobás i Eldridge, zastanawiając się nad problemem pakowania większej liczby grafów w graf pełny, postawili następującą hipotezę:

Hipoteza 26. **(Bollobás, Eldridge [11])** *Niech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ będą grafami rzędu n. Jeśli rozmiar każdego z grafów G_i jest co najwyżej $n-k$, to $G_1, G_2, \ldots, G_k$ są pakowalne w K_n.*

Przypadek $k = 3$ hipotezy 26 został udowodniony w 2001 r. przez Kheddouciego, Marshall, Saclégo i Woźniaka w [55]. Wzorując się na tych problemach, rozważyliśmy w pracy **[P3]** pakowanie trzech kopii grafów zorientowanych w TT_n. Główny wynik tej pracy głosi, że jeśli $\overrightarrow{G}$ jest takim acyklicznym grafem skierowanym rzędu n, że $|E(\overrightarrow{G})| \leqslant \frac{2}{3}n-1$, to trzy kopie $\overrightarrow{G}$ są pakowalne w turniej przechodni TT_n.

Często problem pakowania dwóch kopii grafu G w graf pełny K_n rozważa się jako zanurzenie G w swoje dopełnienie $\overline{G}$. Oczywiście jest to to samo zagadnienie, co szukanie pakowania (α, β) dwóch kopii grafu G w myśl podanej przez nas definicji pakowania. Zasadnicza różnica pojawia się jednak wtedy, gdy sytuację tę przeniesiemy do turnieju przechodniego. Jeśli bowiem badalibyśmy istnienie podgrafu $\overrightarrow{G}$ w jego dopełnieniu w TT_n, to wynik zależałby w sposób istotny od zanurzenia $\overrightarrow{G}$ w TT_n. Jednym z najciekawszych, być może, wyników w turniejach przechodnich jest ograniczenie dotyczące rozmiaru acyklicznego digrafu $\overrightarrow{G}$ zapewniające zanurzenie $\overrightarrow{G}$ w swoje dopełnienie w turnieju TT_n, który uwypukla różnicę z twierdzeniem 24. Jest to główny rezultat z pracy **[P12]**. W dowodzie podobnie jak w powyższych wynikach analizujemy strukturę łuków i dodatkowo korzystamy z własności grafów niezawierających K_r podanych przez Turána w [78].

Twierdzenie 27. **(Görlich, Pilśniak [P12])** *Jeśli $\overrightarrow{G}$ jest acyklicznym grafem skierowanym rzędu n i rozmiaru co najwyżej $\frac{2}{3}(n-1)$, to graf $\overrightarrow{G}$ jest zanurzalny w każde swoje dopełnienie w turnieju przechodnim TT_n.*

C. Hipergrafy [P8, P13]

Hipergrafy jako uogólnienie grafów dopuszczają krawędzie będące zbiorami dowolnej liczby wierzchołków. Podobnie jak w grafach, permutacja σ zbioru wierzchołków *pakuje hipergaf* H, jeśli obrazem krawędzi nie jest krawędź. Każda permutacja przeprowadza cały zbiór wierzchołków w siebie i zbiór pusty w siebie. To powoduje, że w kontekście pakowania rozważamy hipergrafy bez krawędzi pełnej i pustej. Przez analogię do pierwszych wyników Sauera i Spencera [74] oraz Bollobása i Eldridge'a [11] dla grafów, rozważyliśmy z Woźniakiem warunek wystarczający dla pakowania dwóch kopii hipergrafu.

W pracy [**P8**] pokazaliśmy, że każdy hipergraf rzędu n i rozmiaru co najwyżej $\frac{n}{2}$ jest pakowalny w swoje dopełnienie. To ograniczenie jest ewidentnie ostre, gdy hipergraf jest jednolity i zawiera wyłącznie *singletony*, czyli krawędzie jednoelementowe. Dla hipergrafów 2-jednolitych, czyli dla grafów, ograniczeniem na rozmiar jest $n-2$, o czym była już mowa powyżej. Cztery lata później pokazaliśmy w pracy [**P13**], że jest to też wystarczające ograniczenie rozmiaru dla pakowania dwóch kopii hipergrafu *dopuszczalnego*, czyli bez singletonów i krawędzi o liczebności $n-1$. W obu pracach wyniki są otrzymane metodą probabilistyczną.

Twierdzenie 28. (Pilśniak, Woźniak [P13]) *Każdy dopuszczalny hipergraf rzędu n i rozmiaru co najwyżej $n-2$ jest pakowalny w swoje dopełnienie.*

Były to pierwsze wyniki dotyczące pakowania hipergrafów przy takiej definicji pakowania. Twierdzenie 28 zostało uogólnione przez Naroskiego [67]. Kilka lat później Kostochka, Stocker i Hamburger otrzymali [59] odpowiednik twierdzenia 25 dla hipergrafów dopuszczalnych.

2.3. Podziały i rozkłady

A. Grafy dowolnie podzielne [P10, P11, P19, P21]

Wiele zagadnień teorii grafów, w tym dotyczących kolorowań, da się sformułować w języku podziałów i rozkładów grafów. Przez *podział grafu* rozumiemy podział zbioru jego wierzchołków, a przez *rozkład grafu* - podział zbioru jego krawędzi.

W kontekście podziału dużej sieci komputerowej na mniejsze części spójne pojawiło się na początku XXI w. pojęcie grafów dowolnie podzielnych. Ciąg liczb $(n_1, \dots, n_k)$ sumujący się do n nazywamy *dopuszczalnym* dla grafu G. Graf G rzędu n nazywamy *dowolnie podzielnym*, jeśli dla każdego ciągu dopuszczalnego zbiór wierzchołków grafu G ma podział na takie zbiory $V_1, \dots, V_k$, że $|V_i| = n_i$ i grafy indukowane przez każdy ze zbiorów V_i są spójne. Pytanie brzmi: *które sieci, jakie grafy są dowolnie podzielne?* Problem ten był niezależnie wprowadzony przez Bartha, Baudona i Puecha [7] i przez Horňáka i Woźniaka [41]. Pierwsze wyniki charakteryzowały pewne klasy drzew dowolnie podzielnych.

Z Kalinowskim, Woźniakiem i Zioło rozważaliśmy klasę grafów unicyklicznych. *Słońcem z r promieniami* nazywamy graf o maksymalnym stopniu 3, który ma r wierzchołków wiszących, których usunięcie daje cykl C_{n-r}. Jeśli liczby wierzchołków na cyklu między wierzchołkami stopnia 3 są równe kolejno $a_1, ..., a_r$, to takie słońce oznaczamy $\mathrm{Sun}(a_1, ..., a_r)$. W pracy **[P10]** scharakteryzowaliśmy wszystkie słońca dowolnie podzielne z co najwyżej trzema promieniami.

Oba wyniki dotyczące gąsienic i słońc zostały później wykorzystane w dowodach twierdzeń dotyczących dowolnie podzielnych grafów gęstych. Ten kierunek badań jest inspirowany oczywistym faktem, że każdy graf trasowalny (tj. zawierający ścieżkę hamiltonowską) jest dowolnie podzielny, ponieważ ścieżka jest dowolnie podzielna. Horňák, Marczyk, Schiermeyer i Woźniak prowadzili badania w kierunku osłabienia warunku Orego na trasowalność, który gwarantowałby dowolną podzielność [39]. Z Kalinowskim, Schiermeyerem i Woźniakiem w pracy **[P19]** uzyskaliśmy w zeszłym roku inny warunek wystarczający typu Erdősa-Gallaia dla gęstych grafów dowolnie podzielnych.

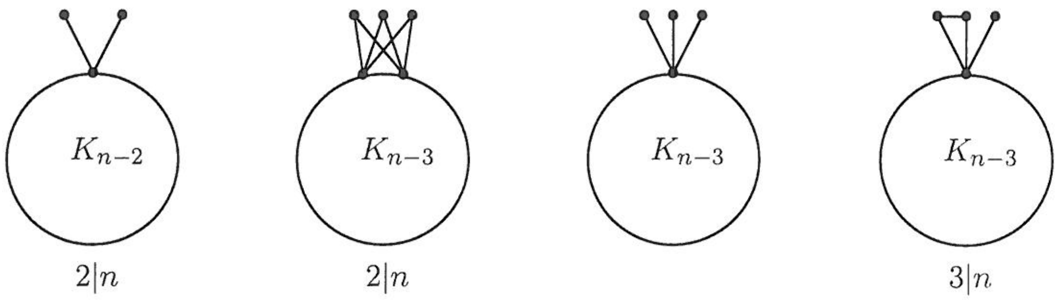
Twierdzenie 29. (Kalinowski, Schiermeyer, Pilśniak, Woźniak [P19]) *Niech G będzie grafem spójnym rzędu $n \geqslant 22$ i rozmiaru*

$$|E(G)| > \binom{n-4}{2} + 12.$$

Wtedy G jest dowolnie podzielny albo G jest podgrafem rozpinającym jednego z grafów na rysunku 2.1.

W dość skomplikowanym, długim dowodzie powyższego twierdzenia prócz wyników dotyczących dowolnie podzielnych gąsienic i słońc [P10] korzystamy z twierdzeń Erdősa-Gallaia [28], Woodalla [88], Erdősa [27] i Kemnitza-Schiermeyera [53] o istnieniu długich cykli.

Istotną modyfikacją problemu, zaproponowaną przez Horňáka, Tuzę i Woźniaka [40], jest *dowolny podział „na żywo"*, gdy ciąg dopuszczalny $(n_1, ..., n_k)$ nie jest znany na początku, tylko podawany jest po jednym wyrazie i zbiory V_i trzeba wskazywać na bieżąco. Korzystając z ich rezultatów otrzymanych dla drzew, w pracy **[P11]** scharakteryzowaliśmy wszystkie słońca dowolnie podzielne „na żywo" z dowolną liczbą promieni. To z kolei pozwoliło ostatnio Kalinowskiemu na podanie warunków wystarczających na dowolną podzielność „na żywo" grafów gęstych [49].



Rysunek 2.1: Cztery grafy, takie że każdy graf rzędu $n \geqslant 22$ i rozmiaru $|E(G)| > \binom{n-4}{2} + 12$, który nie jest dowolnie podzielny, jest grafem rozpinającym jednego z nich.

Z Baudonem, Bensmailem i Foucaudem badaliśmy też inny wariant pojęcia dowolnej podzielności. Powiemy, że graf G jest *rekursywnie dowolnie podzielny*, jeśli K_1 jest rekursywnie dowolnie podzielny i dla każdego ciągu dopuszczalnego zbiór wierzchołków grafu G ma podział na zbiory $V_1, ..., V_k$ takie, że $|V_i| = n_i$ i grafy indukowane przez zbiory V_i są spójne i rekursywnie dowolnie podzielne. W pracy [**P21**] scharakteryzowaliśmy strukturę grafów dwuspójnych rekursywnie dowolnie podzielnych i dowolnie podzielnych „na żywo" (por. wniosek 6.1 w [P21]).

B. Rozkłady turnieju przechodniego [P5, P9]

Genezy badań rozkładów grafów na grafy izomorficzne można upatrywać w poszukiwaniu odpowiednich konfiguracji kombinatorycznych. Już w XIX w. najpierw Kirkman, a kilka lat później około r. 1850, niezależnie od niego Steiner [77] postawili problem: jakie warunki muszą być spełnione, żeby można było graf pełny rozłożyć na trójkąty? Rozwiązanie tego problemu znaleźli Kirkman [56] i Reiss [70] – jednak w literaturze rozkład ten nosi nazwę *systemu trójek Steinera.*

W latach sześćdziesiątych XX w. badania rozkładów grafów pełnych na małe grafy kontynuował między innymi Hanani. Scharakteryzował on grafy pełne, które rozkładają się na K_4 [37]. Kotzig natomiast zbadał rozkład grafu pełnego na C_4 [60]. W roku 1976 Wilson dowiódł, że dla każdego grafu G i odpowiednio dużego n graf pełny K_n ma rozkład na G wtedy i tylko wtedy, gdy rozmiar grafu G dzieli rozmiar K_n i $n-1$ jest wielokrotnością największego wspólnego dzielnika stopni wierzchołków grafu G [85], czyli wykazał, że oczywiste warunki konieczne są zarazem warunkami wystarczającymi (być może ze skończoną liczbą wyjątków). Do dnia dzisiejszego ukazują się dziesiątki prac dotyczących rozkładów grafów.

W pracach [**P5**] i [**P9**] scharakteryzowaliśmy grafy zorientowane rozmiaru co najwyżej cztery, na które rozkładalny jest turniej przechodni TT_n. Rozważaliśmy osobno grafy spójne i niespójne. O ile grafy spójne najczęściej nie rozkładają turnieju przechodniego, o tyle grafy niespójne (poza kilkoma wyjątkami) dzielą go łatwo. Największe problemy stwarzają digrafy, nawet już trzykrawędziowe, które zawierają jako podgraf ścieżkę skierowaną o długości większej niż 1. To właśnie ścieżka zorientowana P_k dla $k > 2$ jest jednym z przykładów grafów zorientowanych, których szkielety rozkładają K_n, a one same nie rozkładają turnieju TT_n.

Dodatkową inspiracją do podjęcia badań nad rozkładami turnieju przechodniego było dla nas twierdzenie Saliego i Simonyiego [73], że każdy graf samodopełniający G ma taką orientację $\overrightarrow{G}$, że TT_n jest rozkładalny na $\overrightarrow{G}$ (jego krótszy, elegancki dowód podał Gyárfás [35]).

2.4. Kolorowania

<u>A. Rozróżnianie sumami</u> [P14, P18, P22]

Pod koniec lat osiemdziesiątych XX w. wraz z rozwojem internetu i systemów informatycznych pojawiła się potrzeba badania nieregularnych grafów modelujących sieci. Pierwsze podejście do problemu było przez rozważenie multigrafów. Tam bowiem możliwe jest, by każdy wierzchołek miał inny stopień. Zwielokrotnienie krawędzi w celu uzyskania różnych stopni wierzchołków było jedną z pierwszych definicji nieregularności grafów. Szybko wielokrotność krawędzi została zamieniona na liczbę położoną na krawędź w grafie – stopień wierzchołka w multigrafie teraz oznaczał sumę wag (kolorów) krawędzi. I tak rozpoczęły się rozważania kolorowania krawędzi grafów w celu uzyskania parami różnych sum dla wszystkich wierzchołków.

Jedną z modyfikacji siły nieregularności jest zaproponowane przez Karońskiego, Łuczaka i Thomasona rozróżnianie tylko wierzchołków sąsiednich w grafie. Rozważamy tu takie kolorowanie krawędzi (niekoniecznie właściwe) liczbami $\{1, ..., k\}$, by sąsiednie wierzchołki otrzymały różne sumy kolorów na incydentnych krawędziach. Autorzy postawili w [52] hipotezę (zwaną dziś w literaturze hipotezą 1-2-3), że wystarczy $k = 3$. Najlepszy znany obecnie wynik $k = 5$ został uzyskany przez Kalkowskiego, Karońskiego i Pfendera [51].

Słabszą wersję problemu rozważali Przybyło i Woźniak dodając także kolorowanie wierzchołków, czyli kolorowanie totalne. W wierzchołku v rozważali *totalną sumę*, czyli sumę kolorów wierzchołka v i krawędzi incydentnych z nim. Postawili oni hipotezę 1-2, że wówczas dwa kolory wystarczą, by sąsiednie wierzchołki otrzymały różne totalne sumy kolorów [69], o czym była mowa w rozdziale 1.2 przy okazji małych automorfizmów.

W pracy [**P22**] rozważamy te problemy dla kolorowań zrównoważonych, czyli takich, w których liczba elementów w każdych dwóch klasach kolorów różni się najwyżej o 1.

Dla kolorowań krawędziowych dowodzimy, że istnieje 3-kolorowanie zrównoważone grafów pełnych K_n dla $n > 4$, 2-kolorowanie zrównoważone lasów oraz grafów dwudzielnych pełnych $K_{n,n}$ dla $n > 3$.

Dla kolorowań totalnych dowodzimy, że istnieje ponownie 3-kolorowanie zrównoważone grafów pełnych K_n dla $n > 2$ i 2-kolorowanie zrównoważone grafów dwudzielnych.

Natomiast w pracy [**P14**] rozważamy te problemy dla grafów skierowanych. Kolorujemy łuki liczbami $\{1, ..., k\}$ i oznaczamy przez $q^+(v)$ sumę kolorów na łukach wychodzących z wierzchołka v, a przez $q^-(v)$ sumę kolorów na łukach wchodzących do v. Dowodzimy między innymi, że używając tylko dwóch kolorów możemy rozróżnić wszystkie sąsiednie wierzchołki w digrafie licząc w wierzchołku v *zbalansowaną sumę* $q(v) = q^+(v) - q^-(v)$.

Twierdzenie 30. **(Borowiecki, Grytczuk, Pilśniak [P14])** *Jeśli* G *jest grafem skierowanym, to istnieje takie kolorowanie jego łuków liczbami* 1 *i* 2, *że zbalansowane sumy rozróżniają sąsiednie wierzchołki.*

Pokazujemy także, że każdy nieskierowany graf może zostać tak zorientowany, że już jeden kolor wystarczy, by zbalansowane sumy sąsiednich wierzchołków były różne. Podobny wynik dla innej definicji sumy wierzchołka digrafu, mianowicie gdy $q(v) = q^-(v)$, można uzyskać dokładnie tymi samymi metodami dowodu. W pracy rozważamy również uogólnienia wyników dla grafów k-kolorowalnych licząc sumy w grupie $\mathbb{Z}_k$.

Problem ten rozważali Khatirinejad, Naserasr, Newman, Seamone i Stevens rozwijając temat do kolorowania z list rozróżniającego wszystkie sąsiednie wierzchołki digrafu sumami zbalansowanymi [54]. Natomiast Baudon, Bensmail i Sopena wzięli do sumy jedynie kolory na łukach wychodzących z wierzchołka, czyli $q(v) = q^+(v)$ i uzyskali potwierdzenie obu hipotez: Karońskiego-Łuczaka-Thomasona oraz Przybyły-Woźniaka dla grafów skierowanych [8].

W tym samym czasie w pracy [**P18**] rozważyliśmy z Woźniakiem totalne kolorowania właściwe, które miałyby rozróżniać wszystkie sąsiednie wierzchołki sumami totalnymi. Postawiliśmy hipotezę.

Hipoteza 31. **(Pilśniak, Woźniak [P18])** *Dla każdego grafu G wystarczają $\Delta(G)+3$ kolory, by rozróżnić sąsiednie wierzchołki totalnymi sumami.*

Udowodniliśmy tę hipotezę dla grafów pełnych, dwudzielnych i grafów z maksymalnym stopniem co najwyżej 3. Dowody są nietrywialne, oparte na pomysłach. Było to polepszenie wyników Zhanga, Chena, Li, Yao, Lu, Wanga i Hulgana, którzy rozważali wcześniej kolorowania właściwe totalne rozróżniające wszystkie sąsiednie wierzchołki zbiorami kolorów [90], [17], [42].

Praca [P18] została wydana jednak prawie cztery lata po napisaniu, więc cytowania odnoszą się głównie do preprintu. W ciągu kilku kolejnych lat bowiem naszą hipotezę potwierdzili chińscy matematycy: Cai, Ding, Dong, Hang, Ma, J. Wang, X. Wu, Yu dla pewnych klas grafów, np. dla grafów z niedużym średnim stopniem [26], dla grafów bez minora K_4 [63], dla grafów planarnych z minimalnym stopniem co najmniej 13 [25], dla specjalnych klas grafów planarnych z maksymalnym stopniem co najmniej 7 (por. [83], [84]) oraz dla grafów planarnych bez cykli długości 4 [82]. Ogólny wynik został uzyskany z pomocą kombinatorycznego twierdzenia Hilberta o zerach (Combinatorial Nullstellensatz) i głosi, że $\Delta(G)+2\mathrm{col}(G)-2$ kolory wystarczą [24], [25] oraz zupełnie niedawno metodą probabilistyczna otrzymano [64] górne ograniczenie przez $\Delta(G)(1+o(1))$.

B. Rozróżnianie paletami [P15]

Wracając do kolorowania krawędzi, niekoniecznie właściwego, można rozważać rozróżnianie sąsiednich wierzchołków multizbiorami kolorów. Niech kolorowanie c przypisuje każdej krawędzi liczbę ze zbioru $\{1,...,k\}$. W wierzchołku v rozważamy ciąg $\overline{c}(v)=(a_1,\dots,a_k)$, gdzie $a_i=|\{u: uv\in E(G),\ c(uv)=i\}|$, dla $i\in\{1,...,k\}$. Powiemy teraz, że kolorowanie c rozróżnia lokalnie wierzchołki mutlizbiorami, jeśli każde dwa sąsiednie wierzchołki będą miały różne ciągi $\overline{c}$. We wspomnianej już wyżej pracy [52] Karoński, Łuczak i Thomason udowodnili, że minimalna liczba kolorów potrzebna do takiego kolorowania dla grafu rzędu co najmniej 3 jest nie większa niż 183. To ograniczenie zostało poprawione na 4 przez Addario-Berry'ego, Aldreda, Dalala i Reeda dziesięć lat temu [1].

W pracy [**P15**] wprowadziliśmy pewne uogólnienie tego problemu. Mianowicie, w wierzchołku v rozważamy ciąg $c^*(v)=(d_1,\dots,d_k)$, który powstał z $\overline{c}(v)$ przez uporządkowanie elementów $(a_1,\dots,a_k)$ niemalejąco. Minimalną liczbę kolorów potrzebną do rozróżnienia sąsiednich wierzchołków grafu G ciągami c^* nazywamy *indeksem daltonisty* grafu G i oznaczamy $\mathrm{dal}(G)$. Warto podkreślić, że parametr ten nie jest zdefiniowany dla wszystkich grafów. Dla przykładu cykle nieparzyste nie mają indeksu daltonisty. Wszystkie znane nam przykłady grafów, dla których nie jest określiony indeks daltonisty, mają minimalny stopień co najwyżej 3. Pierwsza hipoteza, jaka pozostaje otwarta w tej dziedzinie, to : *istnieje taka liczba* δ_0, *że* $\operatorname{dal}(G)$ *jest określony dla każdego grafu* G, *dla którego* $\delta(G) \geqslant \delta_0$. W pracy dowodzimy, że indeks daltonisty jest równy 3 dla grafów pełnych rzędu co najmniej 8 i dla wszystkich regularnych grafów dwudzielnych. Stawiamy też hipotezę, że istnieje taka stała K, że dla każdego grafu, dla któregi indeks daltonisty jest określony, jest on nie większy niż K. W drugiej części pracy pokazujemy, że $K = 6$ dla grafu d-regularnego, o ile d jest wystarczająco duże, oraz dla grafu nieregularnego, którego stopnie minimalny i maksymalny spełniają dodatkowy warunek.

Twierdzenie 32. **(Kalinowski, Pilśniak, Przybyło, Woźniak [P15])** *Dla każdego* $R > 1$ *istnieje taka liczba* δ_0, *że jeśli* G *jest grafem o minimalnym stopniu* $\delta(G) \geqslant \delta_0$ *i maksymalnym stopniu* $\Delta(G) \leqslant R\delta(G)$, *albo jeśli* G *jest grafem* d*-regularnym i* $d \geqslant 2 \cdot 10^7$, *to*

$$\operatorname{dal}(G) \leqslant 6.$$

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje lokalny lemat Lovásza. Rok później Przybyło [68] udowodnił, że $K = 3$ dla wszystkich grafów z minimalnym stopniem większym niż 3461. Ostatnio tematykę tę podjęła także grupa autorów amerykańskich w pracy [23].

2.5. Przełamywanie automorfizmów

A. Grafy iloczynowe [P24, P25, P26]

W rozdziale tym omówimy prace, związane z tematem przełamywania automorfizmów wprowadzonym w rozdziale 1.2, a pozostające poza wskazanym tam osiągnięciem naukowym.

Zgodnie z tym, co przedstawiliśmy we wstępie do rozdziału 1.2.3, w pracy [**P24**] udowodniliśmy tezę twierdzenia Imricha i Klavžara [45] bez konieczności założenia, że czynniki są względnie pierwsze, otrzymując dwa wyjątki.

Twierdzenie 33. **(Estaji, Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Tucker [P24])** *Jeśli* G *i* H *są dwoma grafami spójnymi, takimi że*

$$|G| \leqslant |H| \leqslant 2^{|G|} - |G| + 1,$$

to $D(G \square H) \leqslant 2$ *z wyjątkiem, gdy* $G \square H \in \{K_2^2, K_3^2\}$.

Dowód jest pomysłowy i korzysta z techniki zastosowanej wcześniej w dowodzie twierdzenia 36. Wykorzystuje jednoznaczny rozkład iloczynu kartezjańskiego grafów na czynniki pierwsze i wersję tego twierdzenia dla grafów względnie pierwszych.

Liczba rozróżniająca grafów nieskończonych była badana przez Imricha, Klavžara i Trofimowa [46]. Poza ogólnym ograniczeniem górnym liczby rozróżniającej nieskończonego grafu spójnego G przez jego maksymalny stopień, tzn. $D(G) \leqslant \Delta(G)$, udowodnili oni także stałe górne ograniczenie dla grafu produktowego. Mianowicie pokazali, że $D(G \Box H) \leqslant 2$ dla dwóch nieskończonych, przeliczalnych grafów spójnych G i H, które są względnie pierwsze albo pierwsze i izomorficzne. W tym przypadku, chcąc pozbyć się założenia o względnej pierwszości czynników, musieliśmy uporać się z potencjalną nieskończoną liczbą nieskończonych lub skończonych czynników pierwszych grafów G i H. Z pomocą przyszedł nietrywialny wynik Smitha, Tuckera i Watkinsa [76] o grafach przeliczalnych z nieskończoną średnicą. W 2012 r. udowodnili oni, że liczba rozróżniająca iloczynu kartezjańskiego przeliczalnych grafów spójnych o nieskończonej średnicy wynosi 2. Wykorzystując ten wynik oraz wzmocniony lemat 5. w pracy [P24] pokazliśmy znacznie lepszy wynik.

Twierdzenie 34. (Estaji, Imrich, Kalinowski, Pilśniak, Tucker [P24]) *Jeśli G i H są dwoma nieskończonymi, przeliczalnymi grafami spójnymi, to $D(G \Box H) \leqslant 2$.*

Rozważania potęg kartezjańskich i iloczynów kartezjańskich grafów spójnych, dla których indeks rozróżniający wynosi co najwyżej 2, zapoczątkowaliśmy w pracy [H5] i kontynuowaliśmy w pracy **[P25]** i **[P26]**. Z Gorzkowską i Kalinowskim rozważaliśmy kolorowania krawędzi grafów produktowych przełamujące wszystkie nietrywialne automorfizmy. Szereg własności indeksu rozróżniającego iloczynu grafów doprowadził nas na początku do wyznaczenia indeksu rozróżniającego dowolnej potęgi kartezjańskiej grafu spójnego G.

Twierdzenie 35. (Gorzkowska, Kalinowski, Pilśniak [P25]) *Dla każdego grafu spójnego G i każdego $k \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$D'(G^k) = 2$$

z wyjątkiem cyklu K_2^2, którego indeks wynosi 3.

Najpierw w dowodzie dla grafów pierwszych wskazaliśmy takie kolorowanie, w którym jest inna liczba krawędzi koloru 2 w każdej warstwie poziomej i w każdej warstwie pionowej. Dodatkowe trudności sprawiły na tym etapie drzewa. Następnie dla grafów niekoniecznie pierwszych korzystaliśmy z rozkładu na czynniki pierwsze i z obserwacji, że indeks rozróżniający iloczynu dwóch grafów 2-rozróżnialnych jest równy 2.

Głównym wynikiem pracy [P25] jest odpowiednik twierdzenia Imricha i Klavžara [45] w dodatkowo silniejszej wersji dla grafów niekoniecznie względnie pierwszych.

Twierdzenie 36. (Gorzkowska, Kalinowski, Pilśniak [P25]) *Jeśli G i H są dwoma takimi grafami spójnymi, że*

$$2 \leqslant |G| \leqslant |H| \leqslant 2^{|G|}\left(2^{\|G\|} - 1\right) - |G| + 2,$$

to $D'(G \square H) \leqslant 2$ z wyjątkiem cyklu K_2^2, którego indeks wynosi 3.

Dowód oparty jest na pewnym oryginalnym pomyśle odpowiedniego przegrupowania czynników i skorzystaniu z wcześniej udowodnionego w [P25] twierdzenia dla grafów względnie pierwszych. W dowodzie wprowadzamy ciągi par kolorów, które przypisane kolejnym warstwom grafu iloczynowego stanowią bazę konstrukcji kolorowania rozróżniającego.

Ten sam pomysł użycia par kolorów został wykorzystany także w dowodzie twierdzenia dla drzew przy słabszych założeniach o ich rzędzie.

Twierdzenie 37. (Gorzkowska, Kalinowski, Pilśniak [P25]) *Jeśli T_m i T_n są dwoma drzewami rozmiarów m i n, przy czym*

$$2 \leqslant m \leqslant n \leqslant 2^{2m+1} - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1,$$

to $D'(T_m \square T_n) \leqslant 2$.

Gwiazdy są grafami, dla których indeks rozróżniający jest największy wśród grafów danego rozmiaru, bo jest on równy rozmiarowi grafu. Z twierdzenia 35 wiemy, że ich potęgi kartezjańskie mają indeks rozróżniający 2. Jeżeli natomiast czynniki iloczynu kartezjńskiego różnią się znacząco rozmiarami, indeks rozróżniający może być dowolnie duży. W pracy **[P26]** podajemy warunki, przy których iloczyn kartezjański dwóch gwiazd ma indeks rozróżniający równy d.

Twierdzenie 38. **(Gorzkowska, Pilśniak [P26])** *Niech* $2 \leqslant m \leqslant n$ *oraz* $(d-1)^{2m+1} < n \leqslant d^{2m+1}$. *Wówczas*

1. $D'(K_{1,m} \Box K_{1,n}) = d$, *gdy* $n \leqslant d^{2m+1} - \frac{\log_d k}{2} - \frac{1}{2}$,
2. $D'(K_{1,m} \Box K_{1,n}) = d + 1$, *gdy* $n > d^{2m+1} - \frac{\log_d k}{2}$,

gdzie $k = \lceil \frac{m}{d} \rceil$.

Dowód w przypadku $d = 2$ jest wzorowany na wersji wierzchołkowej dla grafów pełnych z pracy [44]. Wymagał jednak odpowiedniej uwagi i dostosowania do wersji krawędziowej. Wprowadziliśmy zbiory kolumnowo niezmiennicze i w kolejnych ośmiu lematach o ich własnościach uzyskaliśmy dowód pierwszej tezy. Łatwiej, bo w dwóch lematach, wykazujemy potrzebę użycia trzeciego koloru.

Zauważmy przy tym, że ogólnie dla grafów – nawet dla drzew – podobnego wyniku z wyznaczeniem dokładnej wartości indeksu rozróżniającego nie otrzymamy. Wystarczy rozważyć ścieżki P i Q dowolnych rozmiarów. Ich iloczyn kartezjański zawsze jest 2-rozróżnialny (z wyjątkiem K_2^2). Udowodniłyśmy natomiast wzmocnienie twierdzenia 37.

Twierdzenie 39. **(Gorzkowska, Pilśniak [P26])** *Jeśli* T_m *i* T_n *są dwoma drzewami rozmiarów* m *i* n, *przy czym*

$$2 \leqslant m \leqslant n \leqslant 2^{2m+1} - \frac{\log_d k}{2} - \frac{1}{2},$$

to $D'(T_m \Box T_n) \leqslant d$, *gdzie* $k = \lceil \frac{m}{d} \rceil$.

B. Grafy nieskończone [P16, P17, P23]

Zaczniemy ten rozdział od dwóch prac dotyczących krawędziowych kolorowań grafów nieskończonych przełamujących nietrywialne automorfizmy. Pierwszym wynikiem w pracy [P17] jest ograniczenie górne indeksu rozróżniającego dowolnego grafu spójnego o nieskończonym zbiorze wierzchołków.

Twierdzenie 40. **(Broere, Pilśniak [P17])** *Niech* G *będzie grafem spójnym nieskończonego rzędu, w którym stopień każdego wierzchołka jest nie większy niż* $\mathfrak{n}$, *gdzie* $\mathfrak{n}$ *jest dowolną liczbą kardynalną. Wtedy* $D'(G) \leqslant \mathfrak{n}$.

Jest to ostre ograniczenie chociażby dla nieskończonej gwiazdy. Szukaliśmy zatem klas grafów, dla których możemy zdecydowanie obniżyć ograniczenie indeksu rozróżniającego. Niestety nieskończone grafy przeliczalne, lokalnie skończone mogą potrzebować nieskończonej liczby kolorów do przełamania wszystkich nietrywialnych automorfizmów.

Podobnie jak w przypadku grafów skończonych, pomocnym kryterium w wyznaczeniu grafów o skończonym indeksie rozróżniającym okazuje się ruch krawędziowy grafu i jego związek z liczbą automorfizmów. W pracy [P17] dowodzimy najpierw, że grafy mające przeliczalną grupę automorfizmów i nieskończony ruch krawędziowy mają indeks rozróżniający dwa. Następnie analogicznie do dowodu z pracy [46] Imricha, Klavžara i Trofimowa, uogólniamy ten wynik na grafy z ruchem krawędziowym nieprzeliczalnym.

Twierdzenie 41. **(Broere, Pilśniak [P17])** *Niech G będzie grafem spójnym z nieskończonym ruchem krawędziowym $m^*(G)$. Jeśli $|\mathrm{Aut}(G)| \leqslant m^*(G)$, to $D'(G) = 2$.*

To twierdzenie pozostawiło sformułowaną przez nas w [P17], a wciąż nierozstrzygniętą do końca, hipotezę o ruchu krawędziowym, która głosi, że $D'(G) \leqslant 2$ dla grafów z nieskończonym ruchem, jeśli tylko $|\mathrm{Aut}(G)| \leqslant 2^{m^*(G)}$. Warto wspomnieć, że bardzo niedawno Lehner udowodnił tę hipotezę dla grafów przeliczalnych ([61]).

Innym wynikiem pracy [P17] jest wyznaczenie indeksu rozróżniającego dla gęstych nieskończonych grafów przeliczalnych, w tym również przeliczalnego grafu losowego, tzw. grafu Rado. W tym celu definiujemy *graf z dobrymi stopniami* jako graf z nieskończonym przeliczalnym zbiorem wierzchołków, w którym n-ty wierzchołek jest stopnia co najmniej $2n - 1$.

Twierdzenie 42. **(Broere, Pilśniak [P17])** *Niech G będzie nieskończonym przeliczalnym grafem spójnym z dobrymi stopniami. Wówczas $D'(G) \leqslant 2$.*

W dowodzie wskazujemy kolorowanie, w którym n-ty wierzchołek ma dokładnie n czerwonych incydentnych krawędzi, w związku z czym kolorowanie to stabilizuje wszystkie wierzchołki w każdym automorfizmie. Dość łatwo zauważyć, że graf Rado ma dobre stopnie.

Badanie nieskończonych grafów produktowych komplikuje się, ponieważ twierdzenie Sabidussiego-Wizinga o rozkładzie na czynniki pierwsze tu nie sięga. W pracy **[P23]** dajemy charakteryzację grafów przeliczalnych względnie pierwszych, dla których iloczyn kartezjański ma skończony indeks rozróżniający.

Twierdzenie 43. **(Broere, Pilśniak [P23])** *Jeśli G i H są dwoma przeliczalnymi grafami spójnymi względnie pierwszymi, to $D'(G\Box H)$ jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z grafów G lub H jest skończony a drugi ma indeks rozróżniający nieskończony.*

Rozważając potęgi grafów przeliczalnych pokazaliśmy, że $D'(G^k) = 2$ dla $k \geqslant 2$ i przeliczalnego grafu spójnego G ze skończoną liczbą czynników pierwszych. Zatem indeks rozróżniający k-tej potęgi kartezjańskiej przeliczalnego grafu spójnego o skończonej średnicy wynosi 2.

W pracy [P23] zbadaliśmy też hiperkostkę nieskończonego wymiaru. Hiperkostka $K_2^{\aleph_0}$ ma continuum izomorficznych, przeliczalnych składowych spójnych. W pierwszej kolejności znajdujemy asymetryczne drzewo rozpinające w jednej z takich składowych. Kolorując jego krawędzie jednym kolorem, a pozostałe krawędzie drugim kolorem, stabilizujemy wszystkie wierzchołki. W drugim kroku podajemy algorytm dodawania krawędzi do tego drzewa, tak by powstały graf był nadal asymetryczny (czyli cała składowa jest 2-rozróżnialna). Dodatkowo umiemy dodać te krawędzie na nieprzeliczalnie wiele sposobów, tak że powstałe grafy są nieizomorficzne. Otrzymujemy w ten sposób kolorowanie rozróżniające nie tylko słaby iloczyn kartezjański, ale całą hiperkostkę $K_2^{\aleph_0}$ dwoma kolorami.

W pracy **[P16]** wprowadziliśmy natomiast pewne uogólnienie – mianowicie kolorowania wierzchołków grafu spójnego G przełamujące jego nietrywialne endomorfizmy. Odwzorowanie $\varphi : V(G) \longrightarrow V(G)$ jest *endomorfizmem grafu* G, jeśli dla każdej krawędzi uv jej obraz $\varphi(u)\varphi(v)$ też jest krawędzią grafu G. Minimalną liczbę kolorów potrzebną do kolorowania przełamującego wszystkie nietrywialne endomorfizmy grafu G nazywamy *endomorficzną liczbą rozróżniającą* i oznaczamy $D_e(G)$.

Zauważmy, że każde drzewo z liśćmi ma nietrywialny endomorfizm. Dla przeliczalnych drzew z co najwyżej jednym liściem otrzymaliśmy ciekawy dowód oparty częściowo na idei dowodu wyznaczającego liczbę rozróżniającą grafów ze wzrostem liniowym [22].

Twierdzenie 44. (Imrich, Kalinowski, Lehner, Pilśniak [P16]) *Jeśli T jest przeliczalnym drzewem z co najwyżej jednym liściem, to $D_e(T) = 2$.*

Ruchem endomorfizmu grafu G nazywamy liczbę wierzchołków niestałych w tym endomorfizmie. Oznaczmy przez $m_e(G)$ *ruch endomorficzny* grafu G jako minimum z ruchów endomorfizmów grafu G. Przeliczalne drzewo bez liści ma nieskończony ruch endomorficzny (każdy endomorfizm przemieszcza przeliczalnie wiele wierzchołków) oraz jego monoid endomorfizmów jest nieprzeliczalny. Dowód powyższego twierdzenia dla przeliczalnych drzew bez liści potwierdza zatem przypuszczenie, że każdy przeliczalny graf z nieskończonym ruchem endomorficznym ma $D_e(G) = 2$. Formułujemy w pracy też silniejszą hipotezę jako uogólnienie znanej hipotezy o ruchu nieskończonym [21].

Hipoteza 45. (Imrich, Kalinowski, Lehner, Pilśniak [P16]) *Jeśli G jest nieskończonym grafem spójnym oraz*

$$2^{m_e(G)} \geqslant |\operatorname{End}(G)|,$$

to $D_e(G) = 2$.

Dowodzimy tę hipotezę dla przeliczalnych monoidów endomorfizmów, a także dla takich grafów, że $m_e(G) = |\operatorname{End}(G)|$, nawet jeśli ruch endomorficzny jest nieprzeliczalny.

C. Kolorowania totalne [P20]

W pracy [**P20**] zdefiniowaliśmy totalną liczbę rozróżniającą $D''(G)$ grafu G jako najmniejszą liczbę kolorów w kolorowaniu totalnym przełamującym wszystkie nietrywialne automorfizmy grafu G. Nietrudno zauważyć, że $D''(G) \leqslant \min\{D(G), D'(G)\}$ i równość zachodzi między innymi dla grafów asymetrycznych oraz grafów z nietrywialną grupą automorfizmów mających liczbę lub indeks rozróżniający równy 2. Udowodniliśmy następujące ogólne ograniczenie górne, które jest ostre ze względu np. na gwiazdy).

Twierdzenie 46. (Kalinowski, Pilśniak, Woźniak [P20]) *Dla wszystkich grafów spójnych rzędu co najmniej 3*

$$D''(G) \leqslant \left\lceil \sqrt{\Delta(G)} \right\rceil.$$

Dowód przebiega według schematów z badań kolorowań krawędziowych. W przypadku totalnym, rozważając wszystkich potomków danego wierzchołka względem rozpinającego drzewa przeszukiwania wszerz, kolorujemy parami kolorów incydentną krawędź i sąsiedni wierzchołek.

Minimalną liczbę kolorów potrzebną do totalnego kolorowania właściwego grafu G nazywamy *totalną liczbę chromatyczną* i oznaczamy $\chi''(G)$. W latach sześćdziesiątych XX w. Behzad [10] i niezależnie Wizing [80] postawili hipotezę, że dla każdego grafu $\chi''(G) \in \{\Delta(G)+1, \Delta(G)+2\}$. Hipoteza jest nadal otwarta.

W pracy [P20] rozważyliśmy także właściwe kolorowania totalne, które przełamują wszystkie nietrywialne automorfizmy. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie, że każdy graf mający totalną liczbę chromatyczną co najmniej $\Delta(G)+2$ dopuszcza kolorowanie tylko $\chi''(G)$ kolorami przełamujące wszystkie nietrywialne automorfizmy.

Twierdzenie 47. **(Kalinowski, Pilśniak, Woźniak [P20])** *Jeśli G jest grafem spójnym, wówczas*

$$\chi''_D(G) \leqslant \chi''(G) + 1.$$

Ponadto $\chi''_D(G) = \chi''(G)$, *jeśli* $\chi''(G) \geqslant \Delta(G) + 2$.

Pierwsza teza wynika łatwo z faktu, że każda ścieżka zaczynająca się w dowolnym ustalonym wierzchołku v jest jednoznacznie zdeterminowana przez ciąg kolorów krawędzi grafu pokolorowanego totalnie właściwie. Zatem jeśli automorfizm φ zachowujący kolorowanie właściwe grafu stabilizuje jakikolwiek jego wierzchołek v, to stabilizuje wszystkie wierzchołki grafu G (ponieważ automorfizm zachowuje odległości, w szczególności od v). Wystarczy więc, by v był jedynym wierzchołkiem pokolorowanym dodatkowym kolorem.

Zdecydowanie trudniej pokazać drugą część twierdzenia, nie dysponując już dodatkowym kolorem. Dowód prowadzimy pokazując kolorowanie, które przydziela każdej parze różnych wierzchołków x i y różne *zbiory kolorowych dróg* rozpoczynających się w x i y. Jest to podobne podejście do problemu z twierdzenia 6 z pracy [H1], choć rozumowanie w dowodzie jest jednak inne. Definiujemy tu tak zwane cykliczne struktury i korzystając z ich własności, w sześciu kolejnych lematach pokazujemy żądane kolorowanie rozróżniające.

Dodajmy, że istnieją grafy, które mając totalną liczbę chromatyczną $\Delta(G)+1$ potrzebują dodatkowego koloru, by przełamać wszystkie nietrywialne automorfizmy. Przykładem mogą być cykle C_{6k} dla wszystkich $k \geqslant 1$.

Bibliografia

[1] L. Addario-Berry, R. E. L. Aldred, K. Dalal, B. A. Reed, *Vertex colouring edge partitions*, J. Combin. Theory Ser. B 94 (2005), 237–244.

[2] M. O. Albertson, *Distinguishing Cartesian Powers of Graphs*, Electron. J. Combin. 12 (2005), N17.

[3] M. O. Albertson, K. L. Collins, *Symmetry breaking in graphs*, Electron. J. Combin. 3 (1996), R18.

[4] D. Angluin, J. Aspnes, R. A. Bazzi, J. Chen, D. Eisenstat, G. Konjevod, *Storage capacity of labeled graphs*, Lecture Notes in Comput. Sci. (2010), 573–587.

[5] D. W. Barnette, *Trees in polyhedral graphs*, Can. J. Math. 18 (1966), 731–736.

[6] R. Baldoni, N. Nisse, M. van Steen, *Principles of Distributed Systems*, 17th International Conference OPODIS, Springer 2013.

[7] D. Barth, O. Baudon, J. Puech, *Network sharing: a polynomial algorithm for tripodes*, Discrete Appl. Math. 119 (2002), 205–216.

[8] O. Baudon, J. Bensmail, E. Sopena, *An oriented version of the* $1-2-3$ *Conjecture*, Discuss. Math. Graph Theory 35 (2015), 141-156.

[9] A. Benhocine, A. P. Wojda, *On self-complementation*, J. Graph Theory 8 (1985), 335–341.

[10] M. Behzad, *Graphs and their chromatic numbers*, Michigan Stae University, Dept. of Mathematics, 1965.

[11] B. Bollobás, S. E. Eldridge, *Packings of graphs and applications to computational complexity*, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978), 105–124.

[12] D. L. Boutin, *Small label classes in 2-distinguishing labelings*, Ars Math. Contemp. 1 (2008), 154-164.

[13] D. L. Boutin, *The Cost of 2-Distinguishing Selected Kneser Graphs and Hypercubes*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 85 (2013), 161–171.

[14] D. L. Boutin, *The Cost of 2-Distinguishing Cartesian Powers*, Electron. J. Combin. 20 (2013), P74.

[15] A. C. Burris, R. H. Schelp, *Vertex-distinguishing proper edge-colorings*, J. Graph Theory 26(2) (1997), 73–82.

[16] J. Černý, M. Horňák, R. Soták, *Observability of a graph*, Math. Slovaca 46 (1996), 21–31.

[17] X. Chen, *On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with* $\Delta = 3$, Discrete Math. 308-17 (2008), 4003–4007.

[18] K. L. Collins, M. Hovey, A. N. Trenk, *Bounds on the Distinguishing Chromatic Number*, Electron. J. Combin. 16 (2009), R88.

[19] K. L. Collins, A. N. Trenk, *The distinguishing chromatic number*, Electron. J. Combin. 13 (2006), R16.

[20] K. L. Collins, A. N. Trenk, *Nordhaus-Gaddum Theorem for the Distinguishing Chromatic Number*, Electron. J. Combin. 20 (2013), P46.

[21] M. Conder, T. Tucker, *The Motion Lemma and Distinguishability Two*, Ars Math. Contemp. 4 (2011), 63–72.

[22] J. Cuno, W. Imrich, F. Lehner, *Distinguishing graphs with infinite motion and nonlinear growth*, Ars Math. Contemp. 7 (2014), 201–213.

[23] J. Diemunsch, N. Graber, L. Kramer, V. Larsen, L. M. Nelsen, L. L. Nelsen, D. Sigler, D. Stolee, C. Suer, *Color-blind index in graphs of very low degree*, Discrete Appl. Math. 225 (2017), 122–129.

[24] L. Ding, G. Wang, G. Yan, *Neighbor sum distinguishing total colorings via the Combinatorial Nullstellensatz*, Sci. China Math. 57(9)(2014), 1875–1882.

[25] L. Ding, G. Wang, J. Wu, J. Yu, *Neighbor sum (set) distinguishing total choosability via the Combinatorial Nullstellensatz*, Theoret. Computer Sci. 609 (2016), 162–170.

[26] A. DONG, G. WANG, *Neighbor sum distinguishing total colorings of graphs with bounded maximum average degree*, Acta Math. Sin. 30(4)(2014), 703–709.

[27] P. ERDŐS, *Remarks on a paper of Pósa*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Kőzl. 7 (1962), 227–229.

[28] P. ERDŐS, T. GALLAI, *On maximal paths and circuits of graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959), 337–356.

[29] R. J. FAUDREE, C. C. ROUSSEAU, R. H. SCHELP, S. SCHUSTER, *Embedding graphs in their complements*, Czechoslovak Math. J. 31(106) (1981), 53–62.

[30] M. J. FISHER, G. ISAAK, *Distinguishing colorings of Cartesian products of complete graphs*, Discrete Math. 308 (2008), 2240–2246.

[31] W. GODDARD, S. T. HEDETNIEMI, D. P. JACOBS, P. K. SRIMANI, *Self-stabilizing protocols for maximal matching and maximal independent sets for ad hoc networks*, Proceedings - International Parallel and Distributed Processing Symposium, IPDPS 2003.

[32] W. GODDARD, P. K. SRIMANI, *Self-stabilizing master-slave token circulation and efficient size-computation in a unidirectional ring of arbitrary size*, Internat. J. Found. Comput. Sci. 23 (2010), 1–8.

[33] A. GŐRLICH, A. ŻAK, *A note on packing graphs without cycles of length up to five*, Electron. J. Combin. 16 (2009), N30.

[34] A. GŐRLICH, A. ŻAK, *Sparse graphs of girth at least five are packable*, Discrete Math., 312 (2012), 3606–3613.

[35] A. GYÁRFÁS, *Transitive Tournamens and Self-Complementary Graphs*, J. Graph Theory 38 (2001), 111–112.

[36] B. HAEUPLER, M. GHAFFARI, *Near Optimal Leader Election in Multi-Hop Radio Networks*, Proceedings of the Twenty-Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm (2013) doi:10.1137/1.9781611973105.54.

[37] H. HANANI, *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. 32 (1961), 361–386.

[38] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *A note on packing two trees into K_n*, Ars Combin. 11 (1981), 149–153.

[39] M. Horňák, A. Marczyk, I. Schiermeyer, M. Woźniak, *Dense arbitrarily vertex decomposable graphs*, Graphs Combin. 28 (2012), 807–821.

[40] M. Horňák, Zs. Tuza, M. Woźniak, *On-line arbitrarily vertex decomposable trees*, Discrete Appl. Math. 155 (2007), 1420–1429.

[41] M. Horňák, M. Woźniak, *Arbitrarily vertex decomposable trees are of maximum degree at most six*, Opuscula Math. 23 (2003), 49–62.

[42] J. Hulgan, *Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total coloring*, Discrete Math. 309 (2009), 2548–2550.

[43] W. Imrich, *Automorphismen und das kartesische Produkt von Graphen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II, 177 (1969), 203–214.

[44] W. Imrich, J. Jerebic, S. Klavžar, *The distinguishing number of Cartesian products of complete graphs*, European J. Combin. 29 (2008), 922–929.

[45] W. Imrich, S. Klavžar, *Distinguishing Cartesian Powers of Graphs*, J. Graph Theory 53 (2006), 250–260.

[46] W. Imrich, S. Klavžar, V. Trofimov, *Distinguishing infinite graphs*, Electron. J. Combin. 14 (2007), R36.

[47] G. Itkis, C. Lin, J. Simon, *Deterministic, constant space, self-stabilizing leader election on uniform rings*, Distributed Algorithms, Lecture Notes Comput. Sci. 972 (1993), 288–302.

[48] H. Jung, *Zu einem Isomorphiesatz von H. Whitney für Graphen*, Math. Ann. 164 (1966), 270–271.

[49] R. Kalinowski, *Dense on-line arbitrarily partitionable graphs*, Discrete Appl. Math. 226 (2017), 71–77.

[50] M. Kalkowski, *A note on the 1-2 conjecture*, preprint, private communication, 2009.

[51] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender, *Vertex-coloring edgeweightings: towards $1-2-3$ conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B 100 (3) (2010), 347–349.

[52] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, J. Combin. Theory Ser. B 91 (2004), 151–157.

[53] A. Kemnitz, I. Schiermeyer, *Improved degree conditions for Hamiltonian properties*, Discrete Math. 312 (2012), 2140–2145.

[54] M. Khatirinejad, R. Naserasr, M. Newman, B. Seamone, B. Stevens, *Digraphs are 2-weight choosable*, Electron. J. Combin. 18 (2011), P1.

[55] H. Kheddouci, S. Marshall, J. F. Saclé, M. Woźniak, *On the packing of three graphs*, Discrete Math. 236 (2001), 197–225.

[56] T. Kirkman, *On a problem in combinatorics*, Cambridge and Dublin Math. J. (1847), 191–204.

[57] S. Klavžar, T.-L. Wong, X. Zhu, *Distinguishing labelings of group action on vector spaces and graphs*, J. Algebra 303 (2006), 626–641.

[58] S. Klavžar, X. Zhu, *Cartesian powers of graphs can be distinguished by two labels*, European J. Combin. 28 (2007), 303–310.

[59] A. Kostochka, C. Stocker, P. Hamburger, *A Hypergraph Version of a Graph Packing Theorem by Bollobás and Eldridge*, J. Graph Theory 74, (2013), 222-235.

[60] A. Kotzig, *On the decomposition of complete graphs into $4k$-gons*, Math. Fyz. Čas. 15 (1965 b), 229–232.

[61] F. Lehner, *Breaking graph symmetries by edge-colourings*, J. Combin. Theory Ser. B 127 (2017) 205–214.

[62] J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg, C. Faloutsos, Z. Ghahramani, *Kronecker Graphs: An approach to modeling networks*, J. Mach. Learn. Res. 11 (2010), 985–1042.

[63] H. Li, B. Liu, G. Wang, *Neighor sum distinguishing total colorings of K4- minor free graphs*, Front. Math. China, 8(6)(2013), 1351-1366.

[64] S. Loeb, J. Przybyło, Y. Tang, *Asymptotically optimal neighbor sum distinguishing total colorings of graphs*, Discrete Math. 340(2) (2017), 58–62.

[65] D. J. Miller, *The automorphism group of a product of graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 24–28.

[66] E. C. MILNER, D. J. A. WELSH, *On the computational complexity of graph theoretical properties*, University of Calgary Research Paper 232, June 1974.

[67] P. NAROSKI, *Packing of Nonuniform Hypergraphs - Product and Sum of Sizes Conditions*, Discuss. Math. Graph Theory 29 (2009), 651–656.

[68] J. PRZYBYŁO, *Colour-blind can distinguish colour pallets*, Electron. J. Combin. 21(2) (2014), P2.19.

[69] J. PRZYBYŁO, M. WOŹNIAK, *On a* 1, 2 *conjecture*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 12 (2010), 101-108.

[70] M. REISS, *Über eine Steinersche kombinatorische Aufgabe welche in 45sten Bande dieses Journals, Seite 181, gestellt worden ist*, J. Reine Angew. Math. 56 (1859), 326–344.

[71] A. RUSSELL, R. SUNDARAM, *A note on the asymptotics and computational complexity of graph distinguishability*, Electron. J. Combin. 5 (1998), R23.

[72] G. SABIDUSSI, *Graph multiplication*, Math. Z. 72 (1959/1960), 446–457.

[73] A. SALI, G. SIMONYI, *Orientations of self-complementary graphs and the relation of Sperner and Shannon capacities*, European J. Combin. 20 (1999), s. 93–99.

[74] N. SAUER, J. SPENCER, *Edge disjoint placement of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978), 295–302.

[75] S. SCHUSTER, *Fixed-point-free embeddings of graphs in their complements*, Int. J. Math. Math. Sci. 1 (1978), 335-338.

[76] S. M. SMITH, T. TUCKER, M. E. WATKINS, *Distinguishability of Infinite Groups and Graphs*, Electron. J. Combin. 19 (2012), P27.

[77] J. STEINER, *Combinatorische Aufgabe*, J. Reine Angew. Math. 45 (1853), 181–182.

[78] P. TURÁN, *On an extremal problem in graph theory*, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941), 436–452.

[79] W. T. TUTTE, *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 99–116.

[80] V. G. VIZING, *The Cartesian product of graphs* (Russian), Vychisl. Sistemy 9 (1963), 30–43.

[81] V. G. VIZING, *The chromatic class of a multigraph* (Russian), Kibernetika 1 (1965), 29–39.

[82] J. WANG, J. CAI, Q. MA, *Neighbor Sum Distinguishing Total Choosability of Planar Graphs without 4-Cycles*, Discrete Appl. Math. 206 (2016), 215–219.

[83] J. WANG, Q. MA, X. HAN, *Neighbor sum distinguishing total colorings of triangle free planar graphs*, Acta Math. Sin. 31(2)(2015), 216–224.

[84] J. WANG, Q. MA, X. HAN, X. WANG, *A proper total coloring distinguishing adjacent vertices by sums of planar graphs without intersecting triangles*, J. Comb. Optim., DOI 10.1007š10878–015–9886–6 (2015) available online.

[85] R. M. WILSON, *Decomposition of a complete graph into subgraphs isomorphic to a given graph*, in: C.St.J.A. Nash-Williams, J. Sheehan (Eds.), Proc. Fifth British Combinatorial Conference, Congressus Numerantium, XV (1975), pp. 647-659, Utilitas Math., Winnipeg 1976.

[86] S. WIN, *On a Connection Between the Existence of k-Trees and Toughness of Graphs*, Graphs and Combin. 5 (1989), 201–205.

[87] A. WOJDA, I. ZIOŁO, *Embedding digraphs of small size*, Graphs Combin. 166 (1997), 621-638.

[88] D. R. WOODALL, *Maximal circuits of graphs I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 28 (1976), 77–80.

[89] M. WOŹNIAK, *Packing of graphs*, Dissertationes Math. 362 (1997), 1–78.

[90] Z. ZHANG, X. CHEN, J. LI, B. YAO, X. LU, J. WANG, *On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs*, Sci. China Math. 48-3 (2005), 289–299.

Kraków, 1 grudnia 2017r.