RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. ŁUKASZA MICHALAKA

MACIEJ BORODZIK

Wstęp. Złożona rozprawa doktorska mgr. Łukasza Michalaka dotyczy problemu grafów Reeba na rozmaitościach zwartych. Przypomnijmy, że dla rozmaitości M i funkcji $f\colon M \to \mathbb{R}$ mającej skończenie wiele wartości krytycznych, można skonstruować graf $R(f)$ w następujący sposób. Ustalamy relację równoważności między punktami z M, taką że $x \sim y$, jeśli $f(x) = f(y)$ oraz x i y należą do tej samej składowej spójnej przeciwobrazu $f^{-1}(f(x))$. Przy rozsądnych założeniach na f (typu: skończenie wiele punktów krytycznych), iloraz $R(f) = M/\sim$ ma strukturę zorientowanego grafu (tzw. graf z dobrą orientacją). Orientację wyznacza kierunek wzrostu funkcji.

Wraz z definicją grafu $R(f)$, można zadawać pytania o to, jakie informacje o funkcji f i o rozmaitości niesie graf $R(f)$. Dla przykładu, czy dowolny graf z dobrą orientacją może być zrealizowany jako $R(f)$.

Opis wyników pracy. Znaczną część pracy zajmuje studium tzw. systemów hiperpowierzchni czyli skończonej rodziny parami rozłącznych hiperpowierzchni w danej rozmaitości. Taki system na rozmaitości W indukuje odwzorowanie z $\pi_1(W)$ do grupy wolnej (Definition 3.2). Autor, stosując metodę Pontriagina–Thoma, odwraca tę konstrukcję (Proposition 3.3): każde odwzorowanie z $\pi_1(W)$ do grupy wolnej, indukuje system hiperpowierzchni. Autor studiuje dogłębnie tę odpowiedniość i używa jej do badania grafów Reeba.

Dla rozmaitości W oznaczamy przez $C(W)$ największą liczbę hiperpowierzchni $N_1, \dots, N_r$ zamkniętych i o zorientowanej wiązce normalnej, takich że $W \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_r)$ jest spójna. Cornea pokazał , że $C(W)$ jest równe $\max_f b_1(R(f))$. Autor w pracy pokazuje, że $C(W) = \operatorname{corank} \pi_1(W)$. Istotnym składnikiem dowodu jest, jak wspomnieliśmy, konstrukcja Pontriagina–Thoma. W ten sposób uzyskejmy równość $\max_f b_1(R(f)) = \operatorname{corank} \pi_1(W)$, która zadaje ograniczenie na możliwe grafy Reeba. Można się pytać, czy to jest jedyne ograniczenie.

W pracy (Theorem 4.9), autor przedstawia konstrukcję funkcji Morse'a $f\colon M \to \mathbb{R}$, której graf $R(f)$ ma pierwszą liczbę Bettiego równą z góry zadanej liczbie k z przedziału $0, \dots, \operatorname{corank} \pi_1(M)$. W Twierdzeniu 5.2, które jest jednym z najważniejszych wyników pracy, autor pokazuje, że jeśli Γ jest zorientowanym grafem i $b_1(\Gamma) \leqslant \operatorname{corank} \pi_1(M)$, zaś M jest rozmaitością zakniętą wymiaru co najmniej 2, to istnieje funkcja Morse'a na M taka, że $R(f) = \Gamma$.

MB

Jeśli $\dim M \geqslant 3$, to w wielu interesujących przypadkach graf $R(f)$ jest drzewem. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy f jest uporządkowaną funkcją Morse'a (wartości krytyczne punktów o wyższym indeksie są wyższe od wartości krytycznych punktów o niższym indeksie). Istotnie, dopiero punkt krytyczny indeksu $\dim M - 1$ może zwiększyć liczbę składowych spójnych poziomicy, a punkt krytyczny indeksu 1 może zmniejszyć (w dyskusji pomijam maksima i minima lokalne), to oznacza, że jeśli punkty krytyczne indeksu $\dim M - 1$ następują po punktach krytycznych indeksu 1, w grafie $R(f)$ nie może pojawić się pętla. Argument ten jest sformalizowany w Proposition 4.1 w pracy doktorskiej. Sytuacja dla powierzchni jest zupełnie inna. W 2004 roku Cole-McLaughlin, Edelsbrunner et al. udowodnili, że dla dowolnej prostej funkcji Morse'a na powierzchni zorientowanej Σ zachodzi $b_1(R(f)) = b_1(\Sigma)/2$. W pracy podano elementarny dowód tego faktu.

Strona formalna. Praca liczy 82 strony i jest zredagowana w języku angielskim. Jest podzielona na 5+1 rozdziałów: wstęp, rozdział wprowadzający, grafy Reeba na powierzchniach, systemy hiperpowierzchni i epimorfizmy na grupy wolne, rząd cykliczny grafów Reeba i liczba Reeba, problem realizacji dla grafów Reeba. Struktura pracy odzwierciedla poniekąd artykuły, na których jest oparta. Tak więc rozdział 3 o systemach hiperpowierzchni jest powiązany z pracą [41] autorstwa Marzantowicza i Michalaka. Rozdział 4 o rzędzie cyklicznym odnosi się do pracy [45], zaś rozdział 5 – do pracy [46], obie wspomniane prace są autorstwa Ł. Michalaka.

Praca ma dość obszerną bibliografię, liczącą 66 pozycji.

Ocena strony formalnej. Praca jest zredagowana w języku angielskim, jednak nie została dokładnie sprawdzona pod kątem błędów językowych. Wyliczenie tych błędów zajęłoby bardzo dużo czasu. Dla przykładu podam, że w samym wstępie do rozdziału 1, liczącym 8 linijek, brakuje rodzajników w trzech miejscach (przed „Reeb graph", „manifold" i „critical point"). Tego typu błędy są typowe dla Polaków i może nie rażą tak bardzo, ale już „The notion of Reeb graphs ... are also *studying*" jest trudne do przełknięcia. Recenzent wykazuje zrozumienie dla pewnej opieszałości w sprawdzaniu błędów gramatycznych, ale podkreśla, że w dobrym tonie jest jeśli wstęp do rozdziału nie ma błędów językowych.

Definicja grafu Reeba pojawia się na dole strony 7 i jest potraktowana w sposób maksymalnie skrótowy. A przecież jest to definicja najważniejszego obiektu w pracy. Przydałoby się poświęcić tej definicji jeden podrozdział.

W rozdziale drugim, zatytułowanym „grafy Reeba na powierzchniach" znajduje sie podrozdział 2.3 dotyczący rozmaitości wielowymiarowych. Wydaje się, że miejsce tego podrozdziału jest gdzie indziej.

Niemniej, poza błędami językowymi, praca jest zredagowana na poziomie publikowalnego artykułu: założenia i tezy są podane poprawnie, są kompletne. Podana literatura jest poprawna. Pracę dobrze się czyta.

Ocena merytoryczna. Osiągnięte przez doktoranta wyniki są nowe, oryginalne i – w znacznej mierze – opublikowane w rozpoznawalnych czasopismach. Mgr Michalak opanował sporą ilość technik w topologii geometrycznej, wśród których warto wymienić dogłębną znajomość teorii Morse'a, rozwiązania grup, teorię Pontriagina–Thoma. Wartość pracy podkreśla również artykuł Saekiego (IMRN 2021), w którym powtarza on znaczną część wyników autora.

Jakkolwiek nie jest to wyraźnie zaznaczone, grafy Reeba mają pewne zastosowanie w klasyfikowaniu funkcji Morse'a na S^2 (Nicolaescu) a także w równaniach różniczkowych cząstkowych (praca Vukadinovica z 2021 roku).

Niestety, zastosowania grafów Reeba w topologii są, oględnie mówiąc, ograniczone. Główny nurt związany z badaniem funkcji rzeczywistych na rozmaitości dotyczy znalezienia możliwie prostej funkcji Morse'a na rozmaitości, bądź zbadania, jak bardzo różnią się dwie funkcje Morse'a od siebie. Ten pierwszy problem ma niezwykle bogatą literaturę (cały rachunek Kirby'ego), ten drugi dotyczy pseudoizotopii i badania grup dyfeomorfizmów rozmaitości. Grafy Reeba nie są w tym nurcie, ani nie wytyczają nowej ścieżki w topologii rozmaitości. Aby graf Reeba był nietrywialny (poza przypadkiem powierzchni), funkcja Morse'a nie może być uporządkowana.

Badając literaturę przedmiotu miałem nadzieję na znalezienie związków grafów Reeba na powierzchni z grupą automorfizmów powierzchni (mapping class group), ale nie znalazłem: nie wspomina o tym autor, nie widać takich prac na mathscinet.

Jakkolwiek autor zademonstrował znajomość wielu technik topologii algebraicznej, nie pokazał ani technik najnowszych, ani tych najbardziej zaawansowanych. Brakuje też stworzenia nowych metod. Autor pokazał solidny warsztat matematyczny: bez braków i bez fajerwerków. Gdyby istniała skala ocen doktoratu, oceniłbym go jako „dobry".

Konkluzja. Uważam, że praca spełnia ustawowe i zwyczajowe kryteria stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Email address: `mcboro@mimuw.edu.pl`

Maciej Borodzik