Streszczenie

W 1965 roku Erdős badał rodzinę k-jednostajnych hipergrafów na n wierzchołkach, w których największe skojarzenie zawiera dokładnie s hiperkrawędzi. Zapytał wtedy, jaką największą liczbę krawędzi może posiadać hipergraf z takiej rodziny, wskazując przy tym dwóch naturalnych kandydatów na hipergrafy, które tę liczbę maksymalizują. Jednym z nich jest hipergraf, którego wszystkie krawędzie zawierają się w pewnym ustalonym $(ks + k - 1)$-elementowym podzbiorze wierzchołków; inny gęsty przedstawiciel tej rodziny to hipergraf składający się ze wszystkich krawędzi przecinających ustalony zbiór s wierzchołków. Gdy s jest małe drugi z tych hipergrafów ma więcej krawędzi, gdy s jest bliskie n/k zachodzi sytuacja odwrotna. Erdős postawił hipotezę, że dla każdej wartości parametru s $(1 \leq s \leq n/k)$, w rodzinie hipergrafów na n wierzchołkach, w których największe skojarzenie wynosi s, nie ma grafu gęstszego od powyższych dwóch hipergrafów.

Główną część rozprawy stanowią wyniki dotyczące sformułowanej powyżej hipotezy Erdősa. Pokazujemy, że jest ona prawdziwa dla hipergrafów k-jednostajnych jeśli tylko $n \geq 2k^2 s/\log k$ i, co ważniejsze, dowodzimy jej dla hipergrafów 3-jednostajnych dla $n > n_0$. Prócz tego podajemy również szereg wyników dotyczących struktury grafów, których gęstość jest zbliżona do grafów najgęstszych. Pokazują one w szczególności, że aby zweryfikować hipotezę Erdősa wystarczy pokazać prawdziwość jej słabszej, asymptotycznej wersji.

W ostatnim rozdziale omawiamy nowe hipotezy i wyniki związane z hipotezą Erdősa. Między innymi stawiamy pewną hipotezę strukturalną, która może być postrzegana jako asymptotyczne uogólnienie Twierdzenia Turána na hipergrafy, a której rozwiązanie może przybliżyć nas do udowodnienia hipotezy Erdősa. Ponadto formułujemy hipotezę dotyczącą rozkładu sumy pewnych niezależnych zmiennych losowych, podobną do hipotezy Samuelsa z roku 1965, pokazując, że jest ona asymptotycznie równoważna ułamkowej wersji hipotezy Erdősa.