Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 10.02.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej Łukasza Zielonki

Pakowanie online prostokątów i d-wymiarowych kostek

Geometryczny problem pakowania polega na znalezieniu położenia danych figur w określonym obszarze tak, aby nie nachodziły one na siebie oraz ewentualnie spełniały inne zadane warunki. Klasycznym przykładem jest słynny problem Keplera gęstego upakowania kul w przestrzeni, czy też znany problem Auerbacha-Banacha-Mazura-Ulama zapisany w Księdze Szkockiej przy użyciu sugestywnej metafory kartofli we worku.

Rozprawa doktorska Łukasza Zielonki dotyczy wariantu *online* tego zagadnienia, który można zinterpretować jako grę. W każdej rundzie tej gry jeden z graczy (*podający*) wybiera figurę geometryczną, zaś drugi (*pakujący*) musi znaleźć dla niej miejsce w określonym obszarze tak, aby nie nachodziła ona na uprzednio umieszczone figury. Dla przykładu, obszarem pakowania może być sześcian jednostkowy a figurami dowolne ciała wypukłe o średnicy jednostkowej. Naturalne pytanie brzmi: *Jak duża może być łączna objętość tych ciał, przy której gracz pakujący ma strategię wygrywającą?* Taka strategia jest po prostu algorytmem, który pozwala na właściwe pakowanie podawanych figur niezależnie od ich kształtu czy kolejności pojawiania się.

Przedłożona rozprawa zawiera kilka ciekawych wyników dotyczących pakowania online prostokątów oraz ich wielowymiarowej analogii zwanej *boksami* (są to po prostu iloczyny kartezjańskie odcinków równoległych do osi).

W rozdziale drugim rozprawy przedstawiony został algorytm online pakowania prostokątów w kwadrat jednostkowy gwarantujący możliwość właściwego upakowania dowolnego ciągu prostokątów o łącznym polu ograniczonym przez pewną stałą $c \approx 0,28378$ (Twierdzenie 2.2). Zakłada się tu, że prostokąty mają boki długości co najwyżej jeden i są położone równolegle do boków kwadratu (przy czym pakujący może je obracać o kąt prosty przed zapakowaniem). Wynik ten poprawia znacząco (prawie dwukrotnie) wcześniejsze ograniczenie ze stałą $c \approx 0,1464$ uzyskane przez Lassaka (nie jest wykluczone, że optymalna wartość stałej c jest taka sama jak w przypadku *offline* i wynosi $0,5$). Daje on również, poprzez znane wyniki o pokrywaniu prostokątów ciałami wypukłymi, najlepsze obecnie oszacowanie w dwuwymiarowym problemie pakowania worka kartofli na bieżąco. Dowód jest elementarny acz pomysłowy i niełatwy technicznie. Główny pomysł polega na sprytnym rozbiciu prostokątów na trzy klasy w zależności od rozmiaru i zastosowaniu do każdej z klas specjalnej techniki pakowania. Rezultat ukazał się w sprawozdaniach z konferencji WAOA 2017 opublikowanych w serii *Lecture Notes in Computer Science*.

Rozdział trzeci rozprawy dotyczy wielowymiarowej wersji problemu pakowania prostokątów online. Zatem obiektami pakowanymi do d-wymiarowej kostki jednostkowej są boksy, czyli produkty kartezjańskie odcinków. Uzyskany w Twierdzeniu 3.9 rezultat podaje algorytm online pakowania boksów o łącznej objętości nie przekraczającej $c \approx 0,17 \times 0,33^d$. Wynik ten poprawia znacząco (dla $d \geqslant 15$) wcześniejsze oszacowanie należące do Lassaka ($c \approx 7,46 \times 0,13^d$). Dowód jest trudny technicznie i dość pomysłowy. Najpierw buduje się misternie osobne algorytmy dla przypadku odcinków i prostokątów, by potem użyć ich w konstrukcji ogólnego algorytmu w dowolnym wymiarze $d \geqslant 3$. Praca z tym wynikiem została przyjęta do druku w czasopiśmie *Periodica Mathematica Hungarica*.

Kolejne dwa rozdziały rozprawy, czwarty i piąty, zostały poświęcone ciekawemu przypadkowi kwadratów i ogólnie kostek wielowymiarowych. Niech k_d oznacza maksymalną łączną objętość kostek d-wymiarowych jakie można zapakować online w kostkę jednostkową (zakładamy, że pakowane kostki leżą równolegle do osi). Łatwo widać, że $k_2 \leqslant 1/2$ i ogólniej $k_d \leqslant 2^{1-d}$ (nie da się upakować dwóch kwadratów o boku $1/2+\epsilon$ w kwadracie jednostkowym). W istocie wartość 2^{1-d} jest optymalną i osiągną w wersji offline co wykazali Meir i Moser w roku 1968. W roku 1997 Januszewski i Lassak udowodnili zadziwiającą rzecz, a mianowicie, że $k_d = 2^{1-d}$ dla wszystkich $d \geqslant 5$. Główny wynik rozdziału piątego rozprawy (Twierdzenie 5.10) poszerza naszą wiedzę o przypadek wymiaru 4, a mianowicie dowodzi, że $d_4 = 1/8$. Dowód jest trudny technicznie, wymaga rozważania wielu przypadków szczególnych. Praca z tym wynikiem ukazała się w czasopiśmie *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*. Warto podkreślić, że przypadki $d = 2,3$ pozostają otwarte. Najlepsze obecnie oszacowanie dla płaszczyzny to $d \geqslant 2/5$.

W rozdziale czwartym autor bada ogólniejszą sytuację, w której kostki pakowane są na bieżąco do n rozłącznych kostek jednostkowych. W Twierdzeniu 4.8 rozszerza wynik Januszewskiego i Lassaka dla $d \geqslant 5$ uzyskując optymalne ograniczenie na łączną objętość pakowanych kostek wynoszące $(n+1)2^{-d}$. Ponadto, w Twierdzeniu 4.5, uzyskuje to samo optymalne oszacowanie dla mniejszych wymiarów przy dodatkowym założeniu, że $n \geqslant 3$. To stanowi daleko idące rozszerzenie wyniku Januszewskiego dla przypadku kwadratów. Podobnie jak poprzednio dowody są elementarne ale dość skomplikowane technicznie. Rezultaty ukazały się w pracy opublikowanej w sekcji matematycznej *Biuletynu Polskiej Akademii Nauk*.

Praca jest zredagowana dość dobrze zarówno pod względem stylistycznym jak i graficznym. Szczególnie pożyteczne są sugestywne ilustracje pomagające w zrozumieniu zawiłych konstrukcji dowodowych. Rozdział pierwszy stanowi krótkie wprowadzenie do tematyki pracy. Rozdział ostatni zawiera zwięzłą informację o dalszy wynikach autora dotyczących jeszcze innych modyfikacji problemu pakowania, nawiązujących do znanego w informatyce zagadnienia pakowania skrzynek na bieżąco (ang. *online bin packing problem*).

Podsumowując, stwierdzam, że praca Łukasza Zielonki to bardzo solidny doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących ciekawej tematyki pakowania. Ich uzyskanie świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji w zakresie tematyki pracy. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Łukasza Zielonki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk