Autoreferat

Pozycyjne gry na grafach i hipergrafach oraz ich związki ze strukturami losowymi

Małgorzata Bednarska-Bzdęga

Poznań 2016

Imię i nazwisko: Małgorzata Bednarska-Bzdęga

Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

doktor nauk matematycznych, 2000r., Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

tytuł rozprawy doktorskiej: „Kombinatoryczne gry na grafach"

promotor: prof. dr hab. Tomasz Łuczak

Informacje o zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

od 2000r. – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (do 2015r. adiunkt, od 2015r. starszy wykładowca)

Spis treści

Rozdział 1

Osiągnięcie naukowe

Tytuł osiągnięcia naukowego

„Pozycyjne gry na grafach i hipergrafach oraz ich związki ze strukturami losowymi”

Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[H1] M. Bednarska, O. Pikhurko, *Biased positional games on matroids*, European Journal of Combinatorics **26** (2005), 271–285.

[H2] M. Bednarska, O. Pikhurko, *Odd and even cycles in Maker-Breaker games*, European Journal of Combinatorics **29** (2008), 742–745.

[H3] M. Bednarska-Bzdęga, *On weight function methods in Chooser-Picker games*, Theoretical Computer Science **475** (2013), 21–33.

[H4] M. Bednarska-Bzdęga, *Avoider-Forcer games on hypergraphs with small rank*, Electronic Journal of Combinatorics **21** (2014), P1.2.

[H5] M. Bednarska-Bzdęga, D. Hefetz, T. Łuczak, *Picker-Chooser fixed graph games*, Journal of Combinatorial Theory Series B, przyjęta do druku, `doi:10.1016/j.jctb.2015.12.008`.

[H6] M. Bednarska-Bzdęga, D. Hefetz, M. Krivelevich, T. Łuczak, *Manipulative waiters with probabilistic intuition*, Combinatorics Probability and Computing, przyjęta do druku, `doi:10.1017/S0963548315000310`.

Rozdział 2

Cel naukowy i wyniki

2.1 Wstęp

W tym podrozdziale definiuję wszystkie gry, jakie występują w pracach [H1]–[H6], opowiadam o motywacji do ich badania i prezentuję ogólnie wyniki ze wspomnianych prac. Dokładne ich omówienie (i potrzebne do tego definicje) zawierają następne podrozdziały.

W całym autoreferacie a, b, n są liczbami naturalnymi. Załóżmy, że V jest zbiorem skończonym, a $\mathcal{H}$ jest pewną rodziną podzbiorów zbioru V. Grę *typu Maker-Breaker* $(a : b)$ na planszy V, ze zbiorami wygrywającymi $\mathcal{H}$ definiujemy następująco. Dwóch graczy, Alicja i Bob, wybierają na zmianę odpowiednio a i b *wolnych*, czyli nie wybranych wcześniej, elementów planszy. Alicja maluje wybrane przez siebie elementy na czerwono, a Bob maluje swoje elementy na niebiesko. Alicja wygrywa, gdy na końcu gry wszystkie elementy przynajmniej jednego zbioru wygrywającego są czerwone; w przeciwnym przypadku wygrywa Bob. Grę tę oznaczamy jako $\mathcal{MB}(\mathcal{H}, a, b)$.

W grze *ścisłej typu Avoider-Forcer* $(a : b)$ na planszy V, ze zbiorami wygrywającymi $\mathcal{H}$, oznaczanej $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, a, b)$, w każdej rundzie Alicja wybiera dokładnie a elementów planszy i maluje je na czerwono, zaś Bob wybiera dokładnie b elementów planszy. Jeżeli w ostatniej rundzie pozostało mniej wolnych elementów planszy, niż gracz wykonujący ruch ma do wybrania, gracz wybiera pozostałe elementy. Alicja **przegrywa** wtedy i tylko wtedy, gdy na końcu gry wszystkie elementy jakiegoś zbioru wygrywającego są czerwone; w przeciwnym wypadku Alicja wygrywa.

Zasady gry *monotonicznej typu Avoider-Forcer* $(a : b)$ są prawie takie same jak zdefiniowane powyżej, jedyna różnica polega na tym, że Alicja i Bob wybierają odpowiednio **przynajmniej** a i **przynajmniej** b elementów w każdej rundzie. Oznaczamy tę grę przez $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}, a, b)$.

Gra *typu Maker-Waiter* $(a : b)$ różni się od gry typu Maker-Breaker $(a : b)$ jedynie sposobem wyboru elementów planszy przez graczy i tym, że występuje w grze Kelner zamiast Boba. W każdej rundzie Kelner oferuje Alicji **co najwyżej** $a + b$ (lecz nie mniej niż $a + 1$) wolnych elementów. Alicja wybiera a z nich i maluje je na czerwono, a pozostałe elementy stają się niebieskie i należą od tej pory do Kelnera. Gdy tuż przed ostatnią rundą pozostanie $t < a + b$ wolnych elementów planszy, wtedy Alicja wybiera $\min\{t, a\}$ z nich, a pozostałe stają się elementami Kelnera. Alicja wygrywa, gdy na końcu gry wszystkie elementy jakiegoś zbioru wygrywającego są czerwone; w przeciwnym wypadku wygrywa Kelner. Gry te będziemy oznaczać przez $\mathcal{MW}(\mathcal{H}, a, b)$.

W grze *typu Avoider-Waiter* $(a : b)$ w każdej rundzie Kelner oferuje Alicji co najwyżej $a + b$ (lecz nie mniej niż $b + 1$) wolnych elementów. Alicja oddaje b z nich Kelnerowi, który maluje je na niebiesko, a pozostałe elementy stają się własnością Alicji. Alicja maluje je na czerwono. Gdy przed ostatnią rundą pozostanie $t < a + b$ wolnych elementów planszy, wtedy Alicja oddaje $\min\{t, b\}$ z nich Kelnerowi, a pozostałe stają się elementami Alicji. Alicja **przegrywa** wtedy i tylko wtedy, gdy na końcu gry wszystkie elementy jakiegoś zbioru wygrywającego są czerwone. Dla tych gier będziemy stosować oznaczenie $\mathcal{AW}(\mathcal{H}, a, b)$.

Ze względu na rozbieżności w nazewnictwie gier i graczy w literaturze i w pracach [H1]–[H6], postaram się wyjaśnić stosowane przeze mnie w autoreferacie nazwy. W grach typu Maker-Breaker i Avoider-Forcer graczowi nazywanemu przeze mnie Alicją w literaturze odpowiada Maker lub Avoider. Graczowi, którego nazywam Bobem, odpowiada Breaker lub Forcer (występujący też pod nazwą Enforcer). Gry typu Maker-Waiter odpowiadają zdefiniowanym przez Becka [4] grom Chooser-Picker, w których Chooser stara się zdobyć wszystkie elementy jakiegoś zbioru wygrywającego. Gry typu Avoider-Waiter $(a : b)$ odpowiadają zdefiniowanym w [4] i w [H3] grom Picker-Chooser $(a : b)$, w których w każdej rundzie co najwyżej a elementów trafia do Pickera, b elementów trafia do Choosera, zaś celem Pickera jest zdobyć wszystkie elementy jakiegoś zbioru wygrywającego. Gry typu Avoider-Waiter $(a : b)$ są nazywane w pracach [H6] i [H7] grami Waiter-Client $(b : a)$. W autoreferacie nazywam graczy w grach typu Maker-Waiter i Avoider-Waiter Alicją i Kelnerem, aby z jednej strony podkreślić, że cele Alicji w tych grach są takie jak w analogicznych grach typu Maker-Breaker i Avoider-Forcer, a z drugiej strony, by podkreślić, że Kelner jest graczem oferującym elementy.

Zbiór wygrywający nazywam czerwonym, jeśli wszystkie jego elementy są czerwone. Graf nazywam czerwonym, jeśli wszystkie jego krawędzie są czerwone. Chciałabym przypomnieć, że jeśli na końcu gry istnieje czerwony zbiór wygrywający, to w grach typu Maker-Breaker i Maker-Waiter oznacza to wygraną Alicji, ale w grach typu Avoider-Forcer (i Avoider-Waiter) oznacza to wygraną Boba (Kelnera).

Spośród czterech zdefiniowanych powyżej typów gier najintensywniej jak dotąd badane były gry typu Maker-Breaker, a badania te rozpoczęte zostały przez prace Halesa i Jewetta [17] oraz Erdősa i Selfridge'a [13]. To głównie tej wersji poświęcone są monografie Becka [4] oraz Hefetza, Krivelevicha, Stojakovića i Szabó [20]. Zaskakujące i ciekawe okazały się związki gier typu Maker-Breaker $(1 : b)$ z grafami losowymi $G(n, 1/(b + 1))$ i możliwości zastosowania do ich badania technik probabilistycznych. Najbardziej znane przykłady tych związków omawiają autorzy monografii [20].

Badania nad pozostałymi trzema typami gier rozpoczął Beck [3, 4] spektakularnym wynikiem dotyczącym gry klikowej, świadczącym o tym, że tak zwana intuicja probabilistyczna może być przydatna również w analizie gier typu Avoider-Forcer, Maker-Waiter i Avoider-Waiter. Wspomniany wynik przekonuje ponadto, że istnieją ścisłe związki między grami wszystkich czterech typów. Gry Avoider-Forcer w wersji monotonicznej zaproponowali Hefetz, Krivelevich, Stojaković i Szabó w [19]. Praca ta dostarczyła kolejnego przykładu gry, której wynik można przewidzieć, obserwując rozgrywkę między graczami stosującymi strategie losowe.

Celem moich badań było odkrywanie nowych związków między grafami losowymi a pozycyjnymi grami na grafach. Dodam, że przez *grę na grafie* G rozumiem grę, której planszą jest zbiór $E(G)$ wszystkich krawędzi grafu G. Chciałam również zrozumieć przyczynę uderzającego podobieństwa wyników dotyczących dużej klasy gier typu Maker-Waiter do analogicznych rezultatów uzyskanych dla gier typu Maker-Breaker.

Motywacją badań, których wyniki zawierają prace [H1] i [H2] było pytanie, czy w grze typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na grafie K_n największe b, dla którego Alicja może zbudować cykl, jest związane z progowym prawdopodobieństwem na pojawienie się cyklu w grafie losowym $G(n, 1/(b + 1))$. W [H1] udowodniliśmy, że jest tak istotnie, co szczegółowo opisuję w następnym podrozdziale. Wynik ten jest jednak tylko ubocznym efektem analizy bardziej ogólnego modelu gier, w którym gracze wybierają elementy matroidu, a celem Alicji jest zbudowanie cyklu matroidu. Głównym narzędziem analizy jakie przy tym stosujemy, jest twierdzenie Edmondsa o pokryciu matroidu zbiorami niezależnymi, jak również dowodzone przez nas rezultaty dotyczące struktury matroidów zdefiniowanych za pomocą funkcji submodułowych. Sam pomysł rozważania gier pozycyjnych na matroidach nie jest nowy; pierwszą znaną mi pracą na ten temat jest praca Lehmana [26], prezentująca rozwiązanie gry Shannona (Shannon switching game).

Praca [H3] poświęcona jest funkcjom oceny pozycji (funkcjom wagowym) w grach typu Maker-Waiter i Avoider-Waiter. Od czasu przełomowej pracy [13] technika oceny pozycji za pomocą funkcji wagowych bardzo się rozwinęła i weszła do kanonu metod analizy gier pozycyjnych. W pracy [H3] podaję nowe kryterium gwarantujące wygraną Kelnera w grach typu Maker-Waiter $(1 : b)$. Jest ono oparte na funkcji wagowej, bardzo podobnej do znanej funkcji wagowej Becka, używanej w grach typu Maker-Breaker. Dowodzę ponadto, że wiele dobrze znanych funkcji wagowych dla gier typu Maker-Breaker można – po małych zmianach – zastosować do znalezienia strategii wygrywających w grach typu Maker-Waiter (lub Avoider-Waiter). Główne twierdzenie pracy opisuje związki między grami obydwu typów i częściowo wyjaśnia fenomen podobieństwa uzyskiwanych dotąd w tych modelach wyników. Dzięki temu częściowo charakteryzuję rodziny zbiorów wygrywających, dla których prawdziwa jest postawiona w sposób nieformalny hipoteza Becka o zależności między grami typu Maker-Breaker i Maker-Waiter. O hipotezie tej piszę w podrozdziale 2.3. W [H3] prezentuję kilka zastosowań uzyskanych wyników, dla gier na grafach i grafach losowych. W pracy tej stosuję elementarne techniki dowodowe, oparte na argumentach kombinatorycznych.

W pracy [H4] zajmuję się grami typu Avoider-Forcer, zarówno w ich wersji ścisłej jak i monotonicznej. Dowodzę w niej nowego warunku gwarantującego wygraną Alicji, zdefiniowanego za pomocą funkcji wagowej. Badam ponadto własności progowe gier typu Avoider-Forcer $(1 : b)$ na grafie K_n, w których Bob stara się zmusić Alicję do zbudowania podgrafu rozpiętego o zadanym minimalnym stopniu, a także takich, w których celem Boba jest skłonienie Alicji do zbudowania kopii ustalonego grafu G w K_n. Pokazuję między innymi, że Bob ma strategię wymuszającą powstanie czerwonego rozpiętego podgrafu o minimalnym stopniu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy ma strategię wymuszającą powstanie czerwonego drzewa rozpiętego. W dowodach pracy [H4] używam argumentów kombinatorycznych, metody oceny pozycji za pomocą funkcji wagowych, stosuję elementarne fakty z teorii liczb oraz korzystam z twierdzenia kontenerowego Saxtona i Thomasona.

Praca [H5] poświęcona jest grze typu Avoider-Waiter $(1 : b)$, w której Alicja unika zbudowania czerwonej kopii ustalonego grafu H w K_n. Interesuje nas nie tylko największe b, dla którego Kelner ma strategię wygrywającą, ale również największa liczba czerwonych kopii H, do których zbudowania Kelner może Alicję zmusić. Liczbę tę oznaczamy przez $S(H, n, b)$ i badamy jej zachowanie wraz ze wzrostem b, przy założeniu, że $n \to \infty$. Dowodzimy między innymi, że dla H będącego kliką największe b, dla którego Kelner ma strategię wymuszającą czerwoną kopię H, jest takiego rzędu, jak odwrotność progowego prawdopodobieństwa dla pojawienia się kopii H w grafie losowym $G(n, 1/(b+1))$. Okazuje się, że intuicja probabilistyczna może podpowiedzieć nawet dalej idące wyniki. Wykazujemy, że dla wielu b (opisanych funkcją zależną od n), $S(H, n, b)$ jest rzędowo równe wartości oczekiwanej kopii H w grafie losowym $G(n, 1/(b + 1))$. Stawiamy hipotezę, że z takim samym zjawiskiem mamy do czynienia dla dowolnej funkcji b, o ile $1/(b + 1)$ nie jest dużo mniejsze od progowego prawdopodobieństwa dla pojawienia się kopii H w $G(n, 1/(b+1))$. Uzasadniamy, że hipoteza ta jest prawdziwa, gdy

H jest drzewem lub kliką. Dowód dla drzew jest łatwy i indukcyjny, cały ciężar pracy spoczywa na udowodnieniu wspomnianej hipotezy dla klik. Stosujemy tu metodę derandomizacji, to znaczy bazując na własnościach grafów losowych, definiujemy deterministyczną strategię Kelnera. Strategię tę szczegółowo opisuję w podrozdziale 2.5. Przy dowodzeniu potrzebnych nam własności grafu losowego korzystamy m.in. z twierdzenia martyngałowego Talagranda. Narzędziem derandomizacyjnym jest lemat, który nazwaliśmy twierdzeniem o dużej rodzinie. Dowód lematu jest prosty, o wiele ciekawsze są jego zastosowania. Dzięki niemu można wykazać, że jeśli graf losowy $G(n,p)$ posiada jakąś własność z prawdopodobieństwem bardzo bliskim 1 i $b = o(1/p)$, to Kelner w grze typu Avoider-Waiter $(1 : b)$ może zmusić Alicję do zbudowania w K_n grafu mającego rozważaną własność.

W pracy [H6] również studiujemy gry typu Avoider-Waiter $(1 : b)$ na grafie K_n, ale interesują nas nielokalne własności grafu Alicji i zmiana tych własności wraz ze wzrostem b. Badamy między innymi rozmiar największej składowej czerwonego grafu i odkrywamy, że w grze tej ma miejsce zjawisko przejścia fazowego. Jego zbieżność z przejściem fazowym grafu losowego $G(n, 1/(b + 1))$ jest o wiele większa niż dla analogicznego przejścia fazowego w grach Maker-Breaker $(1 : b)$, zbadanego w [5]. Prócz tego wykazujemy, że największym b, przy którym Kelner ma strategię wymuszającą czerwone drzewo rozpięte w K_n jest $b = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ (dla $n \geqslant 4$). Zauważamy przy tym, że – w przeciwieństwie do monotonicznej gry Avoider-Forcer $(1 : b)$ – takie największe b nie jest asymptotycznie równe największemu b, przy którym Alicja zmuszona jest zbudować cykl Hamiltona. Kolejnym wynikiem jest znalezienie rzędu wielkości największego b, przy którym Kelner ma strategię wymuszającą powstanie czerwonych cykli wszystkich możliwych długości. Dowód tego wyniku jest technicznie najtrudniejszy ze wszystkich dowodów w pracy [H6]. Używamy argumentów kombinatorycznych, metody funkcji wagowych, korzystamy z własności ekspanderów i metody rotacyjnej Pósy.

Na koniec chciałabym zaznaczyć, że w autoreferacie nie używam języka hipergrafów, w jakim formułowane są wyniki w kilku z prac [H1]–[H6]; zamiast „wierzchołki hipergrafu gry" piszę „elementy planszy", a zamiast „krawędzie hipergrafu gry" piszę „zbiory wygrywające". Wybrałam tę konwencję, aby nie wchodzić w konflikt z językiem matroidów z następnego podrozdziału.

2.2 Matroidy i cykle – prace [H1] i [H2]

Progiem gry $\mathcal{MB}(\mathcal{H}, 1, b)$ nazywamy najmniejsze b, dla którego Bob ma strategię wygrywającą (jeśli nie ma takiego b, to przyjmujemy, że próg wynosi 0).

Parę $M = (S, \mathcal{I})$ nazywamy *matroidem*, jeżeli S jest zbiorem skończonym, $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ i rodzina $\mathcal{I}$ spełnia poniższe implikacje:

$$A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{I} \tag{2.1}$$

oraz

$$I, J \in \mathcal{I},\ |I| > |J| \ \Rightarrow \ \exists_{x \in I \setminus J} \ \ J \cup \{x\} \in \mathcal{I}. \tag{2.2}$$

Elementy zbioru S nazywamy elementami matroidu, a zbiory z rodziny $\mathcal{I}$ nazywamy *zbiorami niezależnymi.* Zbiory z $2^S \setminus \mathcal{I}$ nazywamy *zbiorami zależnymi. Pętla* to jednoelementowy zbiór zależny. Przez *cykle matroidu* rozumiemy minimalne w sensie zawierania zbiory zależne. *Baza matroidu* jest to maksymalny zbiór niezależny. Jak wiadomo, każda baza matroidu ma tyle samo elementów. Liczbę elementów w bazie oznaczamy przez $\operatorname{rank}(M)$ i nazywamy *wymiarem* *matroidu.* Przez $\mathfrak{C}(M)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich cykli matroidu M, a przez $\mathfrak{B}(M)$ – zbiór wszystkich baz matroidu.

Niech $\mathrm{ind}(M)$ będzie najmniejszą liczbą zbiorów niezależnych na jaką można podzielić zbiór elementów matroidu M (jeśli M posiada pętle, to przyjmujemy, że $\mathrm{ind}(M) = \infty$). Z twierdzenia Edmondsa [11] wynika, że

$$\mathrm{ind}(M) = \max_{\emptyset \subsetneq X \subseteq S} \left\lceil \frac{X}{\mathrm{rank}(X)} \right\rceil.$$

Jednym z dwóch głównych wyników pracy [H1] jest poniższe twierdzenie, wyznaczające próg w grze, w której celem Alicji jest zbudowanie zbioru zależnego matroidu.

Twierdzenie 1 ([H1], Thm 2). *Rozważmy matroid $M = (S, \mathcal{I})$.*

Progiem dla gry $\mathcal{MB}(\mathfrak{C}(M), 1, b)$ jest

$$b_0 = \mathrm{ind}(M) - 1 = \max_{\emptyset \subsetneq X \subseteq S} \left\lceil \frac{|X|}{\mathrm{rank}(X)} \right\rceil - 1,$$

natomiast dla analogicznej gry, w której graczem pierwszym jest Bob, próg wynosi

$$b_0 = \max_{X \subseteq S} \left\lfloor \frac{|X|}{\mathrm{rank}(X) + 1} \right\rfloor.$$

Dolne oszacowanie na próg gry jest konsekwencją twierdzenia Edmondsa. W dowodzie górnego oszacowania wykorzystujemy podział matroidu na zbiory niezależne. Wskazujemy strategię dla Boba, dzięki której po każdej rundzie, zmieniając nieco matroid, uzyskuje podział nowego matroidu na zbiory niezależne, których przekrój zawiera wszystkie elementy czerwone.

Wykorzystując powyższe twierdzenie, możemy rozwiązać problem w pewnym sensie dualny, czyli znaleźć najmniejsze a, dla którego Alicja w grze $(a : 1)$ ma strategię pozwalającą zbudować bazę matroidu. Aby wyjaśnić tę dualność, zdefiniujmy *matroid dualny* M^* do matroidu $M = (S, \mathcal{I})$. Zbiorem elementów M^* jest S, zaś $I \subseteq S$ jest niezależny w M^* wtedy i tylko wtedy, gdy $S \setminus I$ zawiera bazę matroidu M. Z punktu widzenia Alicji zdobyć wszystkie elementy jakiejś bazy matroidu M oznacza to samo, co nie dopuścić, by przeciwnik zbudował cykl matroidu M^*. Dlatego wygrywająca strategia Alicji w $\mathcal{MB}(\mathfrak{B}(M), a, 1)$ jest wygrywającą strategią Boba w analogicznej do $\mathcal{MB}(\mathfrak{C}(M^*), a, 1)$ grze, w której pierwszym graczem jest Bob. Podobne rozumowanie można przeprowadzić z punktu widzenia Boba. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathrm{rank}_{M^*}(X) = |X| + \mathrm{rank}_M(S \setminus X) - \mathrm{rank}_M(S), \quad \text{dla wszystkich } X \subseteq S,$$

poniższe twierdzenie wynika bezpośrednio z twierdzenia 1.

Twierdzenie 2 ([H1], Thm 3). *Rozważmy matroid $M = (S, \mathcal{I})$. Najmniejszą liczbą a, dla której Alicja ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MB}(\mathfrak{B}(M), a, 1)$ jest*

$$a_0 = \max_{X \subseteq S} \left\lfloor \frac{|X|}{|X| + \mathrm{rank}(S \setminus X) - \mathrm{rank}(S) + 1} \right\rfloor.$$

W analogicznej grze, w której graczem pierwszym jest Bob, najmniejszą liczbą a, dla której Alicja ma strategię wygrywającą jest

$$a_0 = \max_{\emptyset \subsetneq X \subseteq S} \left\lceil \frac{|X|}{|X| + \mathrm{rank}(S \setminus X) - \mathrm{rank}(S)} \right\rceil - 1.$$

Powyższe twierdzenie uogólnia wyniki Hamidoune'a i Las Vergnasa [18], którzy zauważyli, że strategie zaproponowane przez Lehmana [26] w rozwiązaniu gry Shannona można tak zmienić, by miały zastosowanie w grach $\mathcal{MB}(\mathfrak{B}(M), 1, 1)$. Autorzy sformułowali warunek konieczny i wystarczający dla M, by Bob miał strategię wygrywającą w $\mathcal{MB}(\mathfrak{B}(M), 1, 1)$. Wspomnieli również, że dzięki temu można opisać matroidy M, dla których Alicja ma strategię wygrywającą w $\mathcal{MB}(\mathfrak{C}(M), 1, 1)$.

W dalszej części pracy [H1] badamy strukturę matroidów zdefiniowanych przez funkcje submodułowe (submodular functions). Powodem by to robić, jest fakt, że za pomocą takich matroidów można łatwo zdefiniować wiele naturalnych rodzin grafów, np. rodzinę wszystkich podgrafów grafu K_n zawierających cykl, lub rodzinę podgrafów o zadanej gęstości. Poniższa konstrukcja matroidów M_f pochodzi z pracy Edmondsa i Roty [12].

Załóżmy, że S jest niepustym zbiorem skończonym, a funkcja $f : 2^S \to \mathbb{Z}$ jest niemalejąca, czyli

$$f(X) \leqslant f(Y), \quad \text{dla wszystkich } X \subseteq Y \subseteq S, \tag{2.3}$$

oraz *submodułowa*, tzn.

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leqslant f(X) + f(Y), \quad \text{dla wszystkich } X, Y \subseteq S. \tag{2.4}$$

Zdefiniujmy matroid M_f o zbiorze elementów S w taki sposób, że jego zbiorami niezależnymi są zbiór pusty oraz wszystkie niepuste podzbiory $X \subseteq S$, spełniające warunek

$$|Y| \leqslant f(Y), \quad \text{dla każdego niepustego } Y \subseteq X.$$

Wprawdzie własności matroidów M_f są badane od dawna, ale zazwyczaj przy dodatkowym założeniu, że $f(\emptyset) = 0$. Dla naszych grafowych zastosowań interesujące są matroidy nie spełniające tego założenia i dlatego dowodzimy kilku lematów mówiących o strukturze matroidów M_f, dla $f(\emptyset) < 0$. Korzystając z tych lematów i z twierdzenia 1, otrzymujemy drugi główny wynik pracy [H1].

Twierdzenie 3 ([H1], Thm 8). *Niech $f : 2^S \to \mathbb{Z}$ będzie niemalejącą funkcją submodułową i niech L będzie zbiorem pętli matroidu M_f, co oznacza, że $L = \{x \in S : f(\{x\}) \leqslant 0\}$.*

(i) *Jeżeli $L = \emptyset$, to progiem gry $\mathcal{MB}(\mathfrak{C}(M_f), 1, b)$ jest*

$$b_0 = \max_{\emptyset \subsetneq X \subseteq S} \left\lceil \frac{|X|}{f(X)} \right\rceil - 1.$$

(Gdy $L \neq \emptyset$, Alicja wygrywa w pierwszym ruchu.)

(ii) *W analogicznej grze, w której graczem pierwszym jest Bob, progiem gry jest*

$$b_0 = \max\left\{|L|, \max_{\mathcal{Y} \in \Pi} \lfloor g(\mathcal{Y}) \rfloor\right\},$$

gdzie Π jest zbiorem wszystkich rodzin $\mathcal{Y}$ złożonych z niepustych i parami rozłącznych podzbiorów zbioru $S \setminus L$ oraz $g(\mathcal{Y}) = \frac{\sum_{X \in \mathcal{Y}} |X| + |L|}{\sum_{X \in \mathcal{Y}} f(X) + 1}$.

Jeżeli ponadto $f(\emptyset) \geqslant 0$, to progiem gry jest

$$b_0 = \max_{X \subseteq S} \left\lfloor \frac{|X|}{f(X) + 1} \right\rfloor.$$

Powyższe twierdzenie stosujemy do gier typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na grafie G. Przypuśćmy, że $a \geqslant 1$ i $b \geqslant 1 - 2a$ są liczbami całkowitymi, a Alicja wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy zbuduje jakiś podgraf $F \subseteq G$, dla którego

$$e(F) > a \cdot v(F) + b.$$

W języku matroidów oznacza to, że celem Alicji jest zbudowanie cyklu matroidu M_f o zbiorze elementów $E(G)$, zdefiniowanego przez funkcję submodułową $f(X) = a|X| + b$. Na przykład dla $a = 1$ i $b = -1$ otrzymujemy grę, w której zbiorom wygrywającym odpowiadają cykle w G, a dla $a \geqslant 1$ i $b = 0$ mamy grę, w której zbiorom wygrywającym odpowiadają wszystkie grafy $F \subseteq G$, dla których $e(F)/v(F) > a$. W pracy wyznaczamy progi dla gier na grafach K_n i $K_{n,n}$, w których rodziny zbiorów wygrywających są zdefiniowane w opisany sposób przez różne parametry a i b. Podajemy też inne przykłady zastosowania twierdzenia 3.

Otrzymane wyniki pozwalają wyznaczyć próg w grze o cykl na K_n, czyli rozwiązać problem, który zapoczątkował nasze badania.

Twierdzenie 4 ([H1], Cor. 10). *Rozważmy grę typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na planszy $E(K_n)$ $(n \geqslant 2)$, w której celem Alicji jest zbudowanie grafowego cyklu. Alicja wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy $b < \lceil n/2 \rceil - 1$.*

Zauważmy, że gra z powyższego twierdzenia jest szczególnym przypadkiem gry, w której celem Alicji jest zbudowanie grafu o zadanej gęstości. Dla tej klasy gier w omawianej pracy sformułowaliśmy następującą hipotezę.

Hipoteza 5 ([H1], Conj. 14). *Niech $d \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Rozważmy grę typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na planszy $E(K_n)$ $(n \geqslant 2)$, w której celem Alicji jest zbudowanie podgrafu $F \subseteq K_n$ o gęstości $e(F)/v(F) \geqslant d$. Progiem dla tej gry jest*

$$b_0 = (1 + o(1)) \frac{n}{2d}$$

przy $n \to \infty$.

Z naszych wyników dla matroidów wynika jedynie, że powyższa hipoteza jest prawdziwa dla d będącego liczbą naturalną.

Przy rozważaniu gry z twierdzenia 4 nasuwa się pytanie, o podobny próg dla gry $(1 : b)$ na grafie K_n, w której Alicja chce zbudować cykl nieparzysty lub takiej, w której celem Alicji jest skonstruowanie cyklu parzystego. Z twierdzenia 4 wynika od razu ograniczenie górne na próg dla obu gier. W pracy [H2] dowodzimy, że w przypadku cykli parzystych ograniczenie to jest asymptotycznie optymalne.

Twierdzenie 6 ([H2], Thm 2). *Rozważmy grę typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na planszy $E(K_n)$ $(n \geqslant 2)$, w której celem Alicji jest zbudowanie grafowego cyklu parzystego. Próg b_0 tej gry spełnia warunek*

$$b_0 = \big(1 + o(1)\big) \frac{n}{2}.$$

Niestety nie udało nam się uzyskać podobnego wyniku dla gry, której celem jest budowa cyklu nieparzystego. Poniższe oszacowanie z [H2] jest, jak się wydaje, dalekie od optymalnego.

Twierdzenie 7 ([H2], Thm 1). *Rozważmy grę typu Maker-Breaker* $(1 : b)$ *na planszy* $E(K_n)$ $(n \geqslant 2)$*, w której celem Alicji jest zbudowanie grafowego cyklu nieparzystego. Próg* b_0 *tej gry spełnia warunek*

$$b_0 \geqslant \left(2 - \sqrt{2} - o(1)\right)\frac{n}{2}.$$

W obu dowodach wskazujemy strategię dla Alicji i dowodzimy elementarnymi rachunkami, że prowadzi ona do wygranej (gdy b jest odpowiednio małe).

2.3 Funkcje oceny pozycji w grach typu Maker-Waiter – praca [H3]

Dla danej rodziny zbiorów skończonych $\mathcal{H}$ dla wygody wprowadzamy oznaczenie $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{D\in\mathcal{H}} D$. Dla zbioru $X \subseteq V(\mathcal{H})$ oznaczamy przez $\mathcal{H} \setminus X$ rodzinę postaci $\{D \setminus X : D \in \mathcal{H}\}$. Przez $\mathcal{H} - X$ oznaczamy rodzinę $\{D \in \mathcal{H} : D \cap X = \emptyset\}$. Piszemy $\mathcal{H} - x$ i $\mathcal{H} \setminus x$ zamiast odpowiednio $\mathcal{H} - \{x\}$ i $\mathcal{H} \setminus \{x\}$.

Pozycją w danym momencie gry typu Maker-Breaker lub Maker-Waiter, w której rodziną zbiorów wygrywającą jest $\mathcal{H}$, nazywamy rodzinę $(\mathcal{H} \setminus X) - Y$, gdzie X jest zbiorem wszystkich elementów czerwonych, a Y zbiorem wszystkich elementów niebieskich w rozważanym momencie gry.

Załóżmy, że rozważamy grę z rodziną zbiorów wygrywających $\mathcal{H}$. Dowolną funkcję φ o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze wszystkich rodzin złożonych z jakichś podzbiorów zbioru $V(\mathcal{H})$ nazywamy *funkcją wagową*. Prawdopodobnie najbardziej znanym w teorii gier pozycyjnych kryterium wygranej, opartym na wygodnej w obliczeniach funkcji wagowej, jest warunek Erdősa-Selfridge'a:

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|} < \frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

gwarantujący wygraną Boba w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H}, 1, 1)$. Znane i bardzo często stosowane jest jego uogólnienie, udowodnione przez Becka [2]; mówi ono, że jeśli

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} (b+1)^{-|A|/a} < \frac{1}{b+1}, \tag{2.6}$$

to Bob ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H}, a, b)$. Jak odnotowuje Beck w [4], rozumowanie prowadzące do dowodu tego faktu można powtórzyć w przypadku gier typu Avoider-Waiter. W grach tych, jeśli

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} (b+1)^{-|A|/a} < 1, \tag{2.7}$$

to Alicja ma strategię wygrywającą w $\mathcal{AW}(\mathcal{H}, a, b)$.

Jednym z wyników pracy [H3] jest następujący warunek gwarantujący wygraną Kelnera w grach typu Maker-Waiter.

Twierdzenie 8 ([H3], Thm 1.6). *Niech* $b' \geqslant 2$ *i niech* $\mathcal{H}$ *będzie rodziną zbiorów skończonych, dla której*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} (b'+1)^{-|D|} < \frac{1}{2(b'+1)}.$$

Wtedy Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H}, 1, b)$ *dla każdego* $b \geqslant 100rb'\ln(rb')$*, gdzie* $r = \max_{D\in\mathcal{H}} |D|$.

Dowód korzysta częściowo z pomysłu Becka, na jakim opiera się dowód twierdzenia 47.1 w [4]. Analizę gry prowadzę w trzech etapach. W pierwszym etapie, gdy wolnych elementów planszy jest bardzo dużo, stosuję argument Becka, że Kelner ma strategię, dzięki której pozycja $\mathcal{H}'$ na końcu pierwszego etapu ma dość małą wagę $\varphi(\mathcal{H}') = \sum_{D\in\mathcal{H}'}(b'+1)^{-|D|}$. Analiza kolejnych dwóch etapów nie przypomina już dowodu Becka, ale nadal polega na zdefiniowaniu strategii Kelnera w taki sposób, by funkcja wagowa φ kolejnych pozycji w grze nie rosła zbyt mocno.

Jako przykład zastosowania twierdzenia 8 podaję oszacowanie największego b, przy którym Alicja w grze typu Maker-Waiter $(1:b)$ na grafie K_n może zbudować kopię ustalonego grafu G (twierdzenie 6.1 w [H3]).

Zasadniczą jednak częścią pracy są wyniki inspirowane nieformalnie sformułowaną hipotezą Becka ([3],[4]), że jeśli Bob ma strategię wygrywającą w $\mathcal{MB}(\mathcal{H},1,1)$, to Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H},1,1)$. Niedawno hipoteza ta została obalona przez Knoxa [23], który skonstruował taką rodzinę $\mathcal{H}$ trzyelementowych podzbiorów zbioru 15-elementowego, że Bob wygrywa w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H},1,1)$, ale Kelner przegrywa w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H},1,1)$. Głównym wynikiem pracy [H3] jest twierdzenie mówiące, że hipoteza Becka jest prawdziwa w klasie gier, w których strategia wygrywająca gracza jest zdefiniowana za pomocą naturalnych funkcji wagowych. Aby je sformułować, potrzebujemy kilku dodatkowych definicji.

Mówimy, że funkcja wagowa φ spełnia *warunek cykliczności*, jeżeli dla każdej rodziny $\mathcal{H}'$ z dziedziny φ i dla dowolnych różnych $x_1,\ldots,x_n \in V(\mathcal{H}')$, spełniony jest poniższy warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi((\mathcal{H}'\setminus x_i)-x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi((\mathcal{H}'\setminus x_{i+1})-x_i),$$

przy czym $x_{n+1}=x_1$. Przykładowo, funkcja wagowa

$$\varphi(\mathcal{H}) = \sum_{A\in\mathcal{H}}(b+1)^{-|A|/a}$$

spełnia warunek cykliczności, o czym można się przekonać wykonując nieskomplikowane rachunki.

Mówimy, że w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H},1,b)$ Alicja używa *strategii maksymalizującej* funkcję wagową φ, jeżeli w każdej pozycji $\mathcal{H}'$ wybiera wolny element, dla którego osiągnięte jest maksimum $\max\limits_{x\in V(\mathcal{H}')}\varphi(\mathcal{H}'\setminus x)$. Podobnie definiujemy *strategię minimalizującą* funkcję wagową φ dla Boba w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H},a,1)$: w każdej pozycji $\mathcal{H}'$ Bob wybiera wolny element, dla którego osiągnięte jest minimum $\min\limits_{x\in V(\mathcal{H}')}\varphi(\mathcal{H}'-x)$.

Twierdzenie 9 ([H3], Thm 1.3).

(i) *Załóżmy, że w grze $\mathcal{MB}(\mathcal{H},2a-1,1)$ Bob ma wygrywającą strategię minimalizującą pewną funkcję wagową φ, a ponadto φ spełnia warunek cykliczności. Wtedy Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H},a,1)$.*

(ii) *Rozważmy grę analogiczną do $\mathcal{MB}(\mathcal{H},1,2b-1)$, w której graczem pierwszym jest Bob. Przypuśćmy, że Alicja ma wygrywającą strategię maksymalizującą pewną funkcję wagową φ, a ponadto φ spełnia warunek cykliczności. Wtedy Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{AW}(\mathcal{H},1,b)$.*

W konsekwencji otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10 ([H3], Cor. 1.5). *Jeżeli*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} 2^{-|D|/(2a-1)} < \frac{1}{2},$$

to Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H}, a, 1)$.

Dzięki temu dla $a = 1$ otrzymujemy warunek wystarczający dla wygranej Kelnera w grach typu Maker-Waiter, który jest taki sam jak warunek Erdősa-Selfridge'a dla gier Maker-Breaker.

Wniosek 11 ([H3], Cor. 1.4). *Jeżeli*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} 2^{-|D|} < \frac{1}{2},$$

to Kelner ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{MW}(\mathcal{H}, 1, 1)$.

Dzięki górnemu oszacowaniu $1/2$ w powyższym wniosku poprawione zostały poprzednie oszacowania: $1/(8r+1)$ Becka [3] i $1/(3(r+1/2)^{1/2})$ Csernenszkyego, Mándityego i Pluhára [10], w których r oznacza największą moc zbioru w rodzinie $\mathcal{H}$. W [H3] wskazuję też prosty przykład gry, świadczący o tym, że oszacowanie $1/2$ we wniosku 11 jest optymalne.

2.4 Gry typu Avoider-Forcer – praca [H4]

2.4.1 Warunek gwarantujący wygraną Alicji

Poniższe twierdzenie podaje, prócz warunku gwarantującego wygraną Alicji w grach typu Avoider-Forcer, warunek nieco słabszy, wystarczający do tego, by Alicja mogła skutecznie bronić się aż do przedostatniej rundy.

Twierdzenie 12 ([H4], Thm 1.2). *Niech* $\mathcal{H}$ *będzie rodziną zbiorów skończonych i niech* $r = \max_{D\in\mathcal{H}} |D|$.

(i) *Jeżeli*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} \left(\frac{b}{ar}+1\right)^{-|D|+a} < 1,$$

to Alicja ma strategię wygrywającą w grach $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, a, b)$ *i* $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}, a, b)$.

(ii) *Niech*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} \left(\frac{b'}{ar}+1\right)^{-|D|} < 1.$$

Wtedy dla każdego $b \geqslant b'$, *podczas gier* $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, a, b)$ *i* $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}, a, b)$, *w każdej pozycji z przynajmniej* $a+b'$ *wolnymi elementami planszy Alicja ma ruch, po którym żaden zbiór wygrywający z* $\mathcal{H}$ *nie jest czerwony.*

Dowód jest dość standardowy, polega na sprawdzeniu, że jeżeli Alicja w czasie gry minimalizuje pewną funkcję wagową, to stosuje strategię wygrywającą. Funkcją tą jest $\varphi(\mathcal{H}) = \sum_{D\in\mathcal{H}} \left(\frac{b}{ar}+1\right)^{-|D|}$ dla pierwszej części tezy, a dla potrzeb drugiej części tezy, w definicji φ zastępuję b przez b'. Pierwsza część dowodu twierdzenia 12 jest bardzo podobna do dowodu Becka, że kryterium (2.6) zapewnia wygraną Boba w grze Maker-Breaker. Druga część dowodu, analizująca końcówkę gry, jest specyficzna dla gier typu Avoider-Forcer i w dowodzie Becka nie występuje. To właśnie w drugiej części dowodu parametr r odgrywa ważną rolę w szacowaniach zmian funcji wagowej φ.

Twierdzenie 12, w przypadku $r \leqslant b$, stanowi uogólnienie wyniku Hefetza, Krivelevicha i Szabó [21]. Wspomniani autorzy wykazali, że jeżeli

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} \left(\frac{1}{a}+1\right)^{-|D|+a} < 1,$$

to Alicja ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, a, b)$ dla wszystkich $b \geqslant 1$. Jak zauważyli autorzy [19], analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla monotonicznej wersji gier typu Avoider-Forcer. Dowód z [21] również wykorzystuje strategię minimalizującą wartość funkcji wagowej.

Porównując kryterium z twierdzenia 12(i) z kryterium Becka (2.6), można zauważyć, że gdy $a = 1$, obydwa kryteria różnią się jedynie parametrem r. Okazuje się, że w ogólnym przypadku nie można usunąć parametru r z twierdzenia 12, o czym świadczy poniższy wynik.

Twierdzenie 13 ([H4], Thm 1.3). *Niech $a \geqslant 1$ i $r \geqslant 3a$. Istnieje taka stała c (zależna od r i a), że dla każdego $f > c$ znajdziemy rodzinę $\mathcal{H}$ zbiorów o rozmiarach nie większych niż r, dla której*

$$\sum_{D\in\mathcal{H}} \left(\frac{3b}{ar}+1\right)^{-|D|+a} < 1,$$

ale strategię wygrywającej w grze $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}, a, b)$ ma Bob.

W dowodzie tego twierdzenia konstrukcja odpowiedniej rodziny zbiorów wygrywających jest prosta: rozważam rodzinę rozłącznych zbiorów r–elementowych i korzystam z wyników Ferbera, Krivelevicha i Naora [14].

2.4.2 Progi w grach z dużymi zbiorami wygrywającymi na grafie K_n

W podrozdziale 2.2 zdefiniowałam próg dla gier typu Maker-Breaker $(1 : b)$. W przypadku ścisłych gier typu Avoider-Forcer $(1 : b)$ nie jest oczywiste, w jaki sposób zdefiniować próg gry, bowiem w ogólnym przypadku własność „Bob ma strategię wygrywającą" nie jest monotoniczna względem b. Dlatego w pracach [21] i [19] autorzy zaproponowali definicje progów trzech rodzajów.

Dla rodziny $\mathcal{H}$, w której przynajmniej jeden zbiór ma co najmniej dwa elementy, definiujemy *dolny próg* $f^-_{\mathcal{H}}$ gry $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, 1, b)$ jako największą liczbę całkowitą b' o tej własności, że dla wszystkich $b \leqslant b'$ Bob ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, 1, b)$. Przez *górny próg* $f^+_{\mathcal{H}}$ gry $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, 1, b)$ rozumiemy największą liczbę naturalną b, dla której Bob ma strategię wygrywającą w grze $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, 1, b)$ (jeżeli nie ma takiej liczby b, to przyjmujemy, że $f^+_{\mathcal{H}} = 0$). Jeżeli $f^+_{\mathcal{H}} = f^-_{\mathcal{H}}$, to liczbę $f_{\mathcal{H}} = f^+_{\mathcal{H}} = f^-_{\mathcal{H}}$ nazywamy *progiem gry* $\mathcal{AF}(\mathcal{H}, 1, b)$.

Dla gry $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H},1,b)$ definiujemy *próg gry* jako nieujemną liczbę całkowitą $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}}$ o tej własności, że Bob ma strategie wygrywającą w $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H},1,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leqslant f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}}$.

W dalszej części pracy [H4] badam asymptotyczne własności gier typu Avoider-Forcer $(1:b)$ na grafie pełnym K_n, w których rodzina zbiorów wygrywających odpowiada rodzinie pewnych podgrafów grafu K_n. Innymi słowy, gracze wybierają krawędzie grafu K_n, a Bob stara się zmusić Alicję do zbudowania jakiegoś podgrafu z zadanej rodziny podgrafów. Wprowadźmy w związku z tym kilka oznaczeń. Rodzina zbiorów wygrywających $\mathcal{C}_{1,n}$ odpowiada rodzinie wszystkich drzew rozpiętych w K_n. Rodziny $\mathcal{C}_{d,n}$, $\mathcal{C}'_{d,n}$, $\mathcal{H}am_n$ i $\mathcal{PM}_n$ odpowiadają rodzinom wszystkich odpowiednio: rozpiętych d-spójnych podgrafów w K_n, rozpiętych podgrafów d-krawędziowo spójnych, cykli Hamiltona i skojarzeń doskonałych. Dla wygody zakładamy przy rozważaniach dotyczących $\mathcal{PM}_n$, że n jest parzyste. Przez $\mathcal{D}_{d,n}$, dla $1 \leqslant d \leqslant n-1$, oznaczamy rodzinę zbiorów wygrywających odpowiadającą rodzinie wszystkich rozpiętych podgrafów K_n, których minimalny stopień jest nie mniejszy niż d. Przez $\mathcal{H}_{G,n}$, dla ustalonego grafu G, rozumiemy rodzinę odpowiadającą rodzinie wszystkich kopii G w K_n.

Badania progów gier typu Maker-Breaker o wymienionych rodzinach zbiorów wygrywających mają długą historię; prace [6], [9], [15], [24] są jedynie kilkoma przykładowymi artykułami z tego nurtu badań. Nieco mniej wiadomo o progach analogicznych gier w monotonicznej wersji Avoider-Forcer, a najmniej zbadane pod tym względem są gry typu Avoider-Forcer w wersji ścisłej.

Z rezultatów uzyskanych przez Krivelevicha i Szabó [25] oraz Hefetza *et al.* [19] wynika, że progi monotonicznych gier typu Avoider-Forcer $(1:b)$ są następującej postaci: Przy ustalonej naturalnej liczbie d i przy $n \to \infty$

$$f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{D}_{d,n}}, f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{C}'_{d,n}}, f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{C}_{d,n}}, f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}am_n}, f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{PM}_n} = (1+o(1))\frac{n}{\ln n}\,.$$

Okazuje się zatem, że progi te są asymptotycznie takie same ja odpowiadające im progi w grach typu Maker-Breaker $(1:b)$ ([9], [15], [24]).

Jednym z nielicznych znanych progów dla gier typu Avoider-Forcer w wersji ścisłej jest próg dla gry, w której Bob stara się zmusić Alicję do zbudowania drzewa rozpiętego. Autorzy pracy [21] udowodnili, że dla gry $\mathcal{AF}(\mathcal{C}_{1,n},1,b)$ $(n \geqslant 3)$ próg istnieje i wynosi

$$f_{\mathcal{C}_{1,n}} = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{2.8}$$

W pracy [H4] dowodzę, że taki sam próg posiada gra $\mathcal{AF}(\mathcal{D}_{1,n},1,b)$, gdy $n \neq 4,7$. Ze względu na trywialne oszacowanie $f^{-}_{\mathcal{D}_{1,n}} \geqslant f^{-}_{\mathcal{C}_{1,n}}$ i nierówność $f^{-}_{\mathcal{D}_{1,n}} \leqslant f^{+}_{\mathcal{D}_{1,n}}$, istnienie opisanego progu dla $\mathcal{AF}(\mathcal{D}_{1,n},1,b)$ wynika z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 14 ([H4], Thm 1.4). *Dla każdego $n \geqslant 3$, jeśli $n \neq 4,7$, to*

$$f^{+}_{\mathcal{D}_{1,n}} \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Nietrudno sprawdzić, że $f^{-}_{\mathcal{D}_{1,4}} = 1$ i $f^{+}_{\mathcal{D}_{1,4}} = 4$. Łatwe, choć wymagające nieco więcej czasu, jest sprawdzenie, że $f^{-}_{\mathcal{D}_{1,7}} = f^{+}_{\mathcal{D}_{1,7}} = 4$.

Wniosek 15 ([H4], Cor. 1.5). *Niech $n \geqslant 3$. Jeżeli $n \neq 4$, to istnieje próg gry $\mathcal{AF}(\mathcal{D}_{1,n},1,b)$, a dla $n \neq 4,7$ zachodzi*

$$f_{\mathcal{D}_{1,n}} = f_{\mathcal{C}_{1,n}} = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

W dowodzie twierdzenia 14 opisuję strategię wygrywającą dla Alicji. Mówiąc ogólnie, Alicja buduje jak największe drzewo, starając się przy tym nie stworzyć żadnego czerwonego cyklu. Dowodzę, że w momencie, gdy powiększenie czerwonego drzewa jest już niemożliwe, następuje albo koniec gry, a w grafie Alicji ciągle jest wierzchołek izolowany, albo gra toczy się dalej, ale wierzchołków izolowanych w grafie Alicji jest zbyt dużo, by Bob mógł wygrać.

Nie wiadomo, czy gry $\mathcal{AF}(\mathcal{D}_{d,n},1,b)$ posiadają próg dla $d \geqslant 2$. Nietrudno pokazać, że

$$\frac{n}{2d} - 1 \leqslant f^-_{\mathcal{D}_{d,n}} \leqslant f^+_{\mathcal{D}_{d,n}} < \frac{n}{d}.$$

Oszacowanie górne jest oczywiste (wystarczy przeliczyć ile krawędzi czerwonych jest na końcu gry), a oszacowanie dolne wynika bezpośrednio z nierówności $f^-_{\mathcal{C}'_{d,n}} \geqslant \frac{n}{2d} - 1$, którą udowodnili autorzy [21]. Poniższe twierdzenie uzasadnia, że stała $1/d$ w oszacowaniu górnym nie jest optymalna.

Twierdzenie 16 ([H4], Thm 1.6). *Niech $d \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wtedy*

$$f^+_{\mathcal{D}_{d,n}} < \frac{n}{\sqrt{(d-1)^2+1}+1} + o(n).$$

Dowód tego twierdzenia nie jest krótki i ma naturę techniczną, niemniej idea strategii Alicji jest nieskomplikowana: Alicja stara się zbudować drzewo o tak dużym zbiorze liści L (nie budując przy tym czerwonych cykli), że w dalszej części gry Bob nie zdąży zmusić Alicji do zwiększenia czerwonego stopnia każdego wierzchołka z L o $d-1$.

Jako wniosek z twierdzenia 16 otrzymałam poniższe oszacowania na progi w grze hamiltonowskiej i w grze o skojarzenie doskonałe.

Wniosek 17 ([H4], Cor. 1.8).

(i) $f^+_{\mathcal{PM}_n} \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ *dla każdego parzystego $n \neq 4$.*

(ii) $f^+_{\mathcal{H}am_n} < 0{,}42\,n + o(n)$.

Stałe w tych oszacowaniach zapewne można poprawić, ale wyniki te pokazują, że oczywiste oszacowania górne $f^+_{\mathcal{PM}_n} < n$ i $f^+_{\mathcal{H}am_n} < 0{,}5n$ są dalekie od optymalnych. W przypadku obu gier $\mathcal{AF}(\mathcal{H}am_n,1,b)$ i $\mathcal{AF}(\mathcal{PM}_n,1,b)$ niewiele wiadomo o ich progach górnych i dolnych, nie są znane nawet rzędy tych progów.

2.4.3 Progi w grach z małymi zbiorami wygrywającymi na grafie K_n

W ostatniej części pracy [H4] zajmuję się grami $\mathcal{AF}(\mathcal{H}_{G,n},1,b)$ i $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}_{G,n},1,b)$, czyli grami, w których Alicja stara się uniknąć zbudowania czerwonej kopii ustalonego grafu G w K_n. Interesuje mnie (ponownie) asymptotyczne zachowanie progów tych gier przy $n \to \infty$. Jest to teren mało zbadany. Wstępne wyniki wskazują, że nawet w wersji monotonicznej gier typu Avoider-Forcer owe progi różnią się istotnie od ich odpowiedników dla gier typu Maker-Breaker. Wiadomo (cf. [6]), że dla wszystkich grafów G o przynajmniej dwóch krawędziach, w grach Maker-Breaker próg jest rzędu $n^{1/m_2(G)}$, gdzie

$$m_2(G) = \max_{F \subseteq G:\, e(F) \geqslant 2} \frac{e(F)-1}{v(F)-2}\,.$$

Natomiast w monotonicznych grach typu Avoider-Forcer mamy (cf. [19]) oszacowanie $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}_{K_3,n}} = \Theta(n^{3/2})$. Wiemy ponadto (cf. [16]), że gdy G jest gwiazdą S_k o $k \geqslant 2$ ramionach, to $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}_{S_k,n}} = \Theta(n^{k/(k-1)})$. Dla wersji ścisłej gier rząd progów znamy jedynie dla wspomnianych gwiazd S_k: $f^{-}_{\mathcal{H}_{S_k,n}} = \Theta(n^{(k+1)/k})$ i $f^{+}_{\mathcal{H}_{S_k,n}} = \Theta(n^{k/(k-1)})$, co również udowodnione zostało w [16] przez Grzesika *et al.*.

Aby zaprezentować oszacowania na progi gier $\mathcal{AF}(\mathcal{H}_{G,n}, 1, b)$ i $\mathcal{AF}_{\mathrm{mon}}(\mathcal{H}_{G,n}, 1, b)$, potrzebuję, prócz $m_2(G)$, definicji jeszcze dwóch grafowych parametrów:

$$m(G) = \max_{F \subseteq G\colon v(F) \geqslant 1} \frac{e(F)}{v(F)}, \quad m'(G) = \max_{F \subseteq G\colon v(F) \geqslant 1} \frac{e(F)-1}{v(F)}.$$

Twierdzenie 18 ([H4], Thm 1.9, Thm 1.10). *Niech G będzie grafem z przynajmniej dwiema krawędziami. Wtedy zachodzą poniższe oszacowania.*

(i) $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}_{G,n}} = O(n^{1/m'(G)})$ *i* $f^{+}_{\mathcal{H}_{G,n}} = O(n^{1/m'(G)})$.

(ii) $f^{-}_{\mathcal{H}_{G,n}} = O(n^{1/m(G)} \ln n)$.

(iii) $f^{-}_{\mathcal{H}_{G,n}} < cn^{1/m(G)}$ *dla pewnej stałej c i nieskończenie wielu n.*

(iv) *Dla pewnej stałej c i wszystkich dostatecznie dużych n, jeśli $b > cn^{1/m(G)}$, to Alicja może uniknąć zbudowania czerwonej kopii G w K_n aż do przedostatniej rundy włącznie, zarówno w ścisłej jak i monotonicznej wersji gry typu Avoider-Forcer* $(1 : b)$.

(v) $f^{-}_{\mathcal{H}_{G,n}} = \Omega(n^{1/m_2(G)}/\ln n)$ *i* $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}_{G,n}} = \Omega(n^{1/m_2(G)}/\ln n)$.

Z części (i) wynika wspomniany już fakt, że $f^{\mathrm{mon}}_{\mathcal{H}_{K_3,n}} = O(n^{3/2})$. W (ii) oraz (iii) stałej $1/m(G)$ w wykładniku nie można poprawić, bo dla gwiazd $G = S_k$ zachodzi $f^{-}_{\mathcal{H}_{G,n}} = \Theta(n^{1/m(G)})$.

W dowodzie twierdzenia 18 korzystam z twierdzenia 12 i prostych faktów z teorii liczb, które dowodzę w [H4]. W dowodzie części (v) stosuję ponadto twierdzenie kontenerowe Saxtona i Thomasona [27], a dokładniej rzecz ujmując, jeden z wypływających z niego wniosków, opisujący własności podgrafów grafu K_n niezawierających kopii G.

2.5 Unikanie małych grafów w grach typu Avoider-Waiter – praca [H5]

Progiem gry $\mathcal{AW}(\mathcal{H}, 1, b)$ (przy założeniu, że w $\mathcal{H}$ wszystkie zbiory mają przynajmniej dwa elementy) nazywamy największe b, przy którym Kelner ma strategię wygrywającą. Jeżeli takie b nie istnieje, to przyjmujemy, że próg gry wynosi 0. Próg gry $\mathcal{AW}(\mathcal{H}, 1, b)$ oznaczamy przez $b_{\mathcal{H}}$. Zauważmy, że istnienie strategii wygrywającej dla Kelnera jest własnością monotoniczną względem b, zatem Kelner ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leqslant b_{\mathcal{H}}$.

Przypuśćmy, że w grze $\mathcal{AW}(\mathcal{H}, 1, b)$ Kelner chce nie tylko doprowadzić do powstania czerwonego zbioru wygrywającego $A \in \mathcal{H}$, ale stara się, by czerwonych zbiorów wygrywających było na końcu gry jak najwięcej, zaś cel Alicji jest przeciwny. W takim kontekście możemy mówić o strategiach optymalnych obojga graczy i o *wartości gry*, jaką jest liczba czerwonych zbiorów wygrywających na końcu gry, przy optymalnych strategiach graczy.

W tym podrozdziale zakładamy, że H jest grafem bez wierzchołków izolowanych, o przynajmniej dwóch krawędziach. Przez $S(H, n, b)$ będziemy oznaczać wartość gry typu Avoider-Waiter $(1 : b)$, w której Kelner chce zmusić Alicje do zbudowania jak największej liczby czerwonych kopii grafu H w K_n. Parametry grafowe $m(H)$ i $m_2(H)$, które w tym podrozdziale często się pojawiają, zostały zdefiniowane w podrozdziale poprzednim.

Głównym celem pracy [H5] jest częściowe rozwiązanie postawionej w niej poniższej hipotezy.

Hipoteza 19 ([H5], Conj. 1.4). *Dla każdego grafu H o przynajmniej dwóch krawędziach istnieją dodatnie stałe c, α^- i α^+ o tej własności, że jeśli $b \leqslant c \cdot n^{1/m(H)}$, to*

$$\alpha^- n^{v(H)}(b+1)^{-e(H)} \leqslant S(H, n, b) \leqslant \alpha^+ n^{v(H)}(b+1)^{-e(H)}.$$

Założenie $b \leqslant cn^{1/m(H)}$ jest naturalne, ponieważ w przeciwnym przypadku $S(H, n, b) = 0$, o czym piszę poniżej. W języku grafów losowych, powyższa hipoteza mówi, że próg dla gry $\mathcal{AW}(\mathcal{H}_{H,n}, 1, b)$ jest rzędowo równy $1/p_H$, gdzie p_H jest progiem dla pojawienia się kopii H w grafie losowym $G(n, p)$. Ponadto, jeśli b jest wystarczająco małe w stosunku do $1/p_H$, to przy optymalnej grze obojga graczy liczba czerwonych kopii H na końcu gry jest rzędowo równa wartości oczekiwanej czerwonych kopii H, gdy gracze grają losowo. Podstawą dla wysunięcia powyższej hipotezy jest następujacy wniosek z kryterium Becka (2.7) i metody jego dowodu.

Twierdzenie 20 ([H5], Thm 1.3). *Dla każdego grafu H o przynajmniej dwóch krawędziach istnieją stałe c_H i c'_H, dla których:*

(i) $S(H, n, b) \leqslant c_H \cdot n^{v(H)}(b+1)^{-e(H)}$ *dla wszystkich* $b \geqslant 1$.

(ii) *Jeśli* $b \geqslant c'_H \cdot n^{1/m(H)}$, *to* $S(H, n, b) = 0$.

Zatem aby udowodnić hipotezę 19, należy uzasadnić, że dla odpowiednio małych b Kelner ma strategię wymuszającą powstanie $\Theta(n^{v(H)}b^{-e(H)})$ czerwonych kopii H. Wskazanie takiej strategii nie jest trudne, gdy H jest drzewem, co wykazujemy indukcyjnie w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 21 ([H5], Thm 1.5). *Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną, a T będzie drzewem na k wierzchołkach. Wtedy istnieje taka stała dodatnia c, że jeżeli $1 \leqslant b \leqslant c \cdot n^{k/(k-1)}$, to* $S(T, n, b) = \Theta\left(n^k \cdot (b+1)^{1-k}\right)$.

W przypadku ogólnym udało się nam potwierdzić istnienie żądanej strategii Kelnera, gdy $b = O(n^{1/m_2(H)})$.

Twierdzenie 22 ([H5], Thm 1.6). *Dla każdego grafu H o przynajmniej trzech krawędziach istnieją dodatnie stałe c, α^- i α^+, dla których*

$$\alpha^- n^{v(H)}(b+1)^{-e(H)} \leqslant S(H, n, b) \leqslant \alpha^+ n^{v(H)}(b+1)^{-e(H)},$$

przy założeniu, że $b \leqslant c \cdot n^{1/m_2(H)}$.

W dowodzie stosujemy metodę derandomizacji. Po pierwsze dowodzimy *twierdzenia o dużej rodzinie*. Twierdzenie to mówi, że jeśli graf losowy $G(n, p)$ ma pewną własność z prawdopodobieństwem wykładniczo (ze względu na n^2p) bliskim 1, to Klient może zmusić Alicję do zbudowania w K_n czerwonego grafu posiadającego rozważaną własność, o ile $b < c/p$ dla małej stałej dodatniej c. Po drugie korzystamy ze znanej własności grafu losowego $G(n,p)$, że jeśli $p > c' n^{-1/m_2(H)}$ dla odpowiednio dużej stałej $c' > 0$, to $G(n,p)$ zawiera $n^{v(H)} b^{-e(H)}$ kopii H z prawdopodobieństwem bliskim 1, i to bliskim wykładniczo względem $n^2 p$.

Dla wartości b większych niż w twierdzeniu 22 nie możemy bezpośrednio zastosować twierdzenia o dużej rodzinie, bowiem w odpowiadającym grafie losowym prawdopodobieństwo zawierania dużej liczby kopii H jest zbyt małe. Stosujemy zatem inną metodę. Najpierw wybieramy w H rozpięty podgraf H' o mniejszej liczbie krawędzi niż H. Następnie za pomocą twierdzenia o dużej rodzinie uzasadniamy, że Kelner może wymusić powstanie bardzo wielu czerwonych kopii H'. Robi to w taki sposób, by kopie H' nie przecinały się na parach nieprzyległych wierzchołków. Następnie Kelner oferuje pary, dzięki którym kopie H' są uzupełniane o kolejne czerwone krawędzie tak długo, aż powstaną kopie H. Dużą trudnością techniczną okazał się wybór odpowiednich podgrafów H' i uzasadnienie, że Kelner może wymusić powstanie dużej rodziny kopii H' nieprzecinających się na parach nieprzyległych wierzchołków. Aby rodzina ta miała pożądane własności, stosujemy ponownie metodę derandomizacyjną, czyli twierdzenie o dużej rodzinie i korzystamy z własności grafów losowych, dowodzonych przez nas za pomocą twierdzenia martyngałowego Talagranda. Odpowiednie podgrafy H' udało nam się znaleźć w przypadku, gdy H jest grafem pełnym.

Twierdzenie 23 ([H5], Thm 1.7). *Niech $k \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Wtedy istnieje dodatnia stała c_k, dla której:*

(i) *Jeżeli $k \neq 5$ i $1 \leqslant b \leqslant c_k \cdot n^{2/(k-1)}$, to*

$$S(K_k, n, b) = \Theta\left(n^k \cdot (b+1)^{-\binom{k}{2}}\right).$$

(ii) *Jeżeli $k = 5$ i $b \leqslant c_k \cdot n^{2/(k-1)}$, to $S(K_k, n, b) > 0$.*

Dla grafu K_5 również potrafimy hipotezę 19 udowodnić, ale ze względu na trudności techniczne nie zdecydowaliśmy się włączyć dowodu do pracy. Jest to jeden z dwóch wyjątkowych grafów pełnych, dla których nie dla wszystkich b istnieje wspomniany podgraf H', wystarczająco dobry do zastosowania naszej metody derandomizacyjnej. Drugim wyjątkiem jest K_3, który rozpatrujemy w dowodzie twierdzenia 23 osobno, w sposób nie wymagający metod probabilistycznych.

2.6 Ewolucja grafu Alicji w grach typu Avoider-Waiter – praca [H6]

W pracy [H6] badamy, w jaki sposób zmieniają się wraz ze wzrostem $b = b(n)$ nielokalne własności czerwonego grafu w grach typu Avoider-Waiter $(1:b)$ na grafie K_n. Interesuje nas na przykład, kiedy Kelner może wymusić powstanie czerwonych cykli, cyklu Hamiltona, czy dużej czerwonej składowej.

Załóżmy, że w grze typu Avoider-Waiter $(1:b)$ na planszy $E(K_n)$, Alicja stara się zminimalizować liczbę wierzchołków największej składowej w czerwonym grafie, zaś Kelner stara się tę liczbę zmaksymalizować. Niech $\mathcal{L}(n,b)$ oznacza liczbę wierzchołków największej składowej czerwonego grafu na końcu gry, przy założeniu optymalnej strategii obojga graczy. Jak wynika z poniższego twierdzenia, gdy badamy $\mathcal{L}(n,b)$ jako funkcję n, przy założeniu, że b jest funkcją rosnącą n, w okolicy $b \sim n$ obserwujemy przejście fazowe, czyli gwałtowny spadek wielkości $\mathcal{L}(n,b)$ z $\Theta(n)$ do $o(n)$.

Twierdzenie 24 ([H6], Thm 1.1). *Niech $0 < \varepsilon = \varepsilon(n) < 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Istnieją takie stałe dodatnie n_0 i c, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ zachodzi co następuje.*

(i) *Jeżeli $b \geqslant (1+\varepsilon)n$, to $\mathcal{L}(n,b) \leqslant c\varepsilon^{-2}\ln n$.*

(ii) *Jeśli $b \leqslant (1-\varepsilon)n$, to $\mathcal{L}(n,b) \geqslant \min\{n, 2\varepsilon n - 2\}$.*

Uderzająca jest zbieżność przejścia fazowego opisanego tym twierdzeniem z przejściem fazowym w grafie losowym. W grafie losowym $G(n, 1/(b+1))$ nie tylko miejscem przejścia fazowego jest również $b \sim n$, ale gdy $\varepsilon = \varepsilon(n)$ i $b > (1+\varepsilon)n$, największa składowa grafu losowego asymptotycznie prawie na pewno ma nie więcej niż $\Theta(\varepsilon^{-2}\ln n)$ wierzchołków ([22]). Z drugiej strony, gdy $b < (1-\varepsilon)n$, w grafie losowym $G(n, 1/(b+1))$ istnieje składowa rozmiaru większego niż $(2 - o_\varepsilon(1))\varepsilon n$ (asymptotycznie prawie na pewno).

W dowodzie twierdzenia 24 stosujemy argumenty kombinatoryczne i metodę funkcji wagowych (twierdzenie 10).

W pracy [H6] wyznaczamy ponadto dokładnie próg w grze $\mathcal{AW}(\mathcal{C}_{1,n}, 1, b)$, czyli takiej, w której Kelner stara się zmusić Alicję do zbudowania rozpiętego podgrafu spójnego w K_n.

Twierdzenie 25 ([H6], Thm 1.3). *Dla wszystkich $n \geqslant 4$, $\mathcal{L}(n,b) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leqslant \lfloor n/2 \rfloor - 1$.*

Implikacja w jedną stronę stronę jest oczywista, wystarczy policzyć liczbę czerwonych krawędzi na końcu gry. W dowodzie implikacji w drugą stronę definiujemy strategię Klienta pozwalającą mu osiągnąć cel bez straty ruchu (tak samo jak w dowodzie drugiej części twierdzenia 24), tzn. w czasie pierwszych $n-1$ rund.

Co ciekawe, próg dla rozważanej gry jest taki sam jak dla jej odpowiednika typu Avoider-Forcer w ścisłej wersji [21]. Mimo to nasza metoda w niczym nie przypomina tej z [21], bazującej na technice charakterystycznej dla gier na matroidach.

W pracy zajmujemy się też cykliczną strukturą grafu Alicji.

Twierdzenie 26 ([H6], Thm 1.4). *Rozważmy grę typu Avoider-Waiter $(1 : b)$ na planszy $E(K_n)$.*

(i) *Jeżeli $b \geqslant 1{,}1n$, to dla wszystkich odpowiednio dużych n Alicja ma strategię, dzięki której nie zbuduje cyklu.*

(ii) *Istnieje taka dodatnia stała c że dla wszystkich $b \leqslant cn$ Kelner ma strategię zmuszającą Alicję do zbudowania grafu posiadającego cykle każdej długości, od 3 do n.*

Dowód pierwszej części jest bardzo krótki, używamy tu funkcji wagowej Becka (2.7). Dowód drugiej części jest znacznie bardziej wymagający. Stosujemy typową dla tego rodzaju zagadnień metodę, czyli wykorzystujemy własności ekspanderów i korzystamy z techniki rotacyjnej Pósy. Dowód jest dość długi, a strategię Kelnera opisujemy i analizujemy w kilku etapach. Aby uzasadnić, że Kelner może zmusić Alicję do zbudowania odpowiedniego ekspandera, używamy argumentów kombinatorycznych i twierdzenia 10.

Z twierdzenia 26 wynika między innymi, że $b_{\mathcal{H}am_n} = \Theta(n)$, a zatem próg na cykl Hamiltona jak i próg $b_{\mathcal{C}_{1,n}}$ na spójność jest w grach typu Avoider-Waiter tego samego rzędu. Podobnie jest w monotonicznych grach typu Avoider-Forcer i w grach Maker-Breaker. Niemniej, w przeciwieństwie do ostatnich dwóch typów gier, w grach Avoider-Waiter nie jest prawdą, że $b_{\mathcal{H}am_n} = (1+o(1))b_{\mathcal{C}_{1,n}}$, co uzasadniamy bardzo prostym argumentem kombinatorycznym ([H6], Prop. 1.5).

Rozdział 3

Pozostałe publikacje i ich omówienie

Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[P1] M. Bednarska, *On biased positional games*, Combinatorics Probability and Computing **7** (1998), 339–351.

[P2] M. Bednarska, T. Łuczak, *Biased positional games for which random strategies are nearly optimal*, Combinatorica **20** (2000), 477–488.

[P3] M. Bednarska, T. Łuczak, *Biased positional games and the phase transition*, Random Structures and Algorithms **18** (2001), 141–152.

[P4] M. Bednarska, A. Grudka, P. Kurzyński, T. Łuczak, A. Wójcik, *Quantum walks on cycles*, Phys. Letters A **317** (2003), 21–25.

[P5] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, M. Bednarska, *Quasiperiodic dynamics of a quantum walk on the line*, Phys. Rev. Letters **93** (2004), 180601.

[P6] M. Bednarska, A. Grudka, P. Kurzyński, T. Łuczak, A. Wójcik, *Examples of nonuniform limiting distributions for the quantum walks on even cycles*, International Journal of Quantum Information **2** (2004) 453–460.

[P7] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Unmodulated spin chains as universal quantum wires*, Phys. Review A **72** (2005), 034303.

[P8] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Multiuser quantum communication networks*, Phys. Review A **75** (2007), 022330.

[P9] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska-Bzdęga, *Trapping a particle of a quantum walk on the line*, Phys. Review A **85** (2012), 012329.

Omówienie wyników niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Prace [P1], [P2] i [P3] dotyczą moich badań prowadzonych przed doktoratem i w czasie doktoratu. We wszystkich rozważane są gry Maker-Breaker $(a : b)$.

Pozostałe prace nie są związane z grami pozycyjnymi i są wynikiem współpracy grupy matematyków i fizyków z UAM. W pracach [P4]–[P9] studiujemy matematyczne modele spacerów kwantowych na grafach i modele układów kwantowych służących do przesyłania informacji. Spacery kwantowe są odpowiednikami klasycznych łańcuchów Markowa o przeliczalnym zbiorze stanów, przy czym ewolucję układu opisuje nie stochastyczna macierz przejścia, a operator unitarny. Efekty kwantowe sprawiają, że rozkłady graniczne dla spacerów kwantowych często różnią się bardzo od rozkładów granicznych dla ich klasycznych odpowiedników. Wspomniane prace zawierają głównie twierdzenia matematyczne, ale pojawiają się w nich również wyniki symulacji komputerowych. Mój wkład w powstanie prac [P4]–[P9] polegał na dyskusjach naukowych i dowodzeniu, razem z Tomaszem Łuczakiem, twierdzeń opisujących ewolucje układów kwantowych. Interpretacją fizyczną uzyskanych wyników zajmowali się fizycy z naszej grupy, a autorem wszystkich symulacji komputerowych jest Tomasz Gdala.

Poniżej omawiam dokładniej wyniki z poszczególnych prac. Przy omawianiu trzech pierwszych stosuję oznaczenia z poprzednich rozdziałów autoreferatu.

Praca [P1] zawiera wyniki z mojej pracy magisterskiej. Analizuję w niej różne warianty gier typu Maker-Breaker $(a : b)$, w których zbiory wygrywające są rozłączne, aby następnie wykorzystać je do rozwiązania problemu postawionego (w nieco mniej ogólnej postaci) przez Becka. Zapytał on, jakie musi być n, by w grze typu Maker-Breaker $(1 : 1)$ na grafie K_n Alicja mogła zbudować pełne drzewo binarne na t wierzchołkach bez straty ruchu, czyli w czasie pierwszych $t - 1$ rund. W [P1] dowodzę, że najmniejsze takie n jest postaci $(1 + o(1))t \log_2 t$ przy $t \to \infty$.

W pracy [P2] badamy własności progowe gier $(1 : b)$ typu Maker-Breaker na planszy $E(K_n)$, przy $n \to \infty$, w których celem Alicji jest zbudowanie kopii ustalonego grafu G. Dowodzimy, że dla każdego grafu G o przynajmniej 2 krawędziach $b_{\mathcal{H}_{G,n}} = \Theta\big(n^{1/m_2(G)}\big)$. Szacując $b_{\mathcal{H}_{G,n}}$ z dołu, dowodzimy istnienia strategii wygrywającej Alicji w sposób niekonstruktywny. W dowodzie korzystamy z własności grafów losowych i wykazujemy, że grając losowo, Alicja wygrywa z dodatnim prawdopodobieństwem. Szacując $b_{\mathcal{H}_{G,n}}$ z góry, opisujemy strategię Boba i dowodzimy, że jest wygrywająca, za pomocą wielu funkcji oceny pozycji typu (2.6).

W pracy [P3] zajmujemy się grą typu Maker-Breaker $(1 : b)$ na planszy $E(K_n)$, w której Alicja dąży do tego, by jej graf posiadał jak największą (w sensie liczby wierzchołków) składową. Badamy, jak zmienia się jej rozmiar wraz ze wzrostem b. Wykazujemy, że w okolicy $b \sim n$ ma miejsce zjawisko przejścia fazowego, co jest zgodne z podobnym zjawiskiem obserwowanym w ewolucji grafu losowego $G(n, 1/(b + 1))$, choć „mikroskopowy” opis tego przejścia różni się od tego, czego moglibyśmy się spodziewać, patrząc na zachowanie grafu losowego $G(n, 1/(b + 1))$ w obszarze krytycznym.

W pracy [P4] analizujemy kwantowe spacery cząstki na cyklu, których ogólny model zaproponowali Aharonov *et al.* [1]. W przypadku, gdy stan początkowy skupiony jest w jednym wierzchołku cyklu, znajdujemy wzór jawny na uśredniony rozkład graniczny. Uzasadniamy, że w kwantowym błądzeniu na cyklach parzystych rozkład ten znacznie różni się od odpowiadającego mu jednostajnego rozkładu dla błądzenia klasycznego. Co więcej, wykazujemy dość zaskakującą własność, że rozkład graniczny zależy od podzielności długości cyklu przez 4. Pokazujemy ponadto przykłady rozkładów początkowych, dla których uśredniony rozkład graniczny jest daleki od jednostajnego, a nawet dalszy od rozkładu jednostajnego niż rozkład początkowy.

W pracy [P5] proponujemy matematyczny model eksperymentów na optycznej desce Galtona, przeprowadzonych przez Bouwmeestera *et al.* [7]. Nasz model opiera się na zmodyfikowanym spacerem kwantowym na długiej ścieżce. Zakładamy, że w wierzchołkach ścieżki zaburzana jest faza cząstki, przy czym zaburzenie to zależy od położenia cząstki. Za ewolucję układu, prócz czynnika zmieniającego fazę cząstki, odpowiada dodatkowy parametr D w operatorze unitarnym. W pracy analizujemy, w jaki sposób zmiana D wpływa na zachowania oscylacyjne układu. Uzyskane przez nas wyniki matematyczne dobrze modelują zaobserwowane oscylacje na wspomnianej desce Galtona. Przewidują ponadto istnienie dodatkowych efektów oscylacyjnych, na razie doświadczalnie nie potwierdzonych.

Praca [P6] stanowi kontynuację badań z [P4] i prezentuje różne typy ewolucji układu odpowiadającego kwantowemu błądzeniu cząstki na cyklu parzystym, w przypadkach gdy uśredniony rozkład graniczny nie jest jednostajny.

W pracy [P9] kontynuujemy badania zachowania cząstki na długiej ścieżce. Tym razem wprowadzamy lokalne zaburzenie, polegające na tym, że faza cząstki jest zaburzana w jednym wierzchołku ścieżki. Dowodzimy, że prowadzi to do koncentracji uśrednionego rozkładu granicznego w owym punkcie.

Prace [P7] i [P8] dotyczą przesyłania informacji (stanu) w sieci spinów. Budujemy prostszy niż zaprezentowany w [8] matematyczny model sieci, w którym w wyniku naturalnej ewolucji układu wzbudzenie zapoczątkowane na wyróżnionym wierzchołku sieci, z prawdopodobieństwem bliskim 1 po pewnym czasie przeniesie się na inny uprzednio wyróżniony wierzchołek. Udowodniliśmy ponadto, że dobierając odpowiednio lokalne pole magnetyczne, można przesłać wzbudzenie między dowolnymi wierzchołkami, nie zmieniając struktury sieci.

Bibliografia

[1] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, U. Vazirani, *Quantum walks on graphs*, in: Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computation, ACM Press, New York, 2001, p. 50.

[2] J. Beck, *Remarks on positional games. I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **40** (1982), 65–71.

[3] J. Beck, *Positional games and the second moment method*, Combinatorica **22** (2002), 169–216.

[4] J. Beck, **Combinatorial games: Tic-tac-toe theory**, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **114**. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xiv+732 pp.

[5] M. Bednarska, T. Łuczak, *Biased positional games and the phase transition*, Random Structures and Algorithms **18** (2001) ,141–152.

[6] M. Bednarska, T. Łuczak, *Biased positional games for which random strategies are nearly optimal*, Combinatorica **20** (2000), 477–488.

[7] D. Bouwmeester, I. Marzoli, G. P. Karman, W. Schleich, J. P. Woerdmanet, *Optical Galton board*, Phys. Review A **61** (1999), 13410.

[8] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A. J. Landahl, *Perfect state transfer in quantum spin networks*, Phys. Rev. Letters **92** (2004), 187902.

[9] V. Chvátal, P. Erdős, *Biased positional games*, Annals of Discrete Mathematics **2** (1978), 221–228.

[10] A. Csernenszky, C. I. Mándity, A. Pluhár, *On Chooser-Picker positional games*, Discrete Mathematics **309** (2009), 5141–5146.

[11] J. Edmonds, *Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams*, J. Res. Nat. Bur. Standards **69B** (1965), 73–77.

[12] J. Edmonds, G.C. Rota, *Submodular set functions (Abstract), Waterloo Combinatorics Conference*, 1966.

[13] P. Erdős, J.L. Selfridge, *On a combinatorial game*, Journal of Combinatorial Theory Series A **14** (1973), 298–301.

[14] A. Ferber, M. Krivelevich, A. Naor, *Avoider-Enforcer games played on edge disjoint hypergraphs*, Discrete Mathematics **313** (2013), 2932–2941.

[15] H. Gebauer, T. Szabó, *Asymptotic random graph intuition for the biased connectivity game*, Random Structures and Algorithms **35** (2009), 431–443.

[16] A. Grzesik, M. Mikalački, Z.L. Nagy, A. Naor, B. Patkós, F. Skerman, *Avoider-Enforcer star games*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **17** (2015), 145–160.

[17] A. W. Hales, R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, Transactions of the American Mathematical Society **106** (1963), 222–229.

[18] Y. O. Hamidoune, M. Las Vergnas, *Directed switching games on graphs and matroids*, Journal of Combinatorial Theory Series B **40** (1986), 237-269.

[19] D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković, T. Szabó, *Avoider-Enforcer: The rules of the game*, Journal of Combinatorial Theory Series A **117** (2010), 152–163.

[20] D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković, T. Szabó, **Positional Games**, Birkhäuser, 2014.

[21] D. Hefetz, M. Krivelevich, T. Szabó, *Avoider-Enforcer games*, Journal of Combinatorial Theory Series A **114** (2007), 840–853.

[22] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, **Random graphs**, Wiley, 2000.

[23] F. Knox, *Two constructions relating to conjectures of Beck on positional games*, arXiv:math/1212.3345.

[24] M. Krivelevich, *The critical bias for the Hamiltonicity game is* $(1 + o(1))n/\ln n$, Journal of the American Mathematical Society **24** (2011), 125–131.

[25] M. Krivelevich, T. Szabó, *Biased positional games and small hypergraphs with large covers*, Electronic Journal of Combinatorics **15** (2008), R70.

[26] A. Lehman, *A solution of the Shannon switching game*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **12** (1964), 687–725.

[27] D. Saxton, A. Thomason, *Hypergraph containers*, Inventiones mathematicae **201** (2015), 925–992.

Мегкалѝк