Załącznik 2 (wersja polska)

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko: Maciej Radziejewski.

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne — z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

magister Matematyki (1997) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

doktor nauk matematycznych (2002) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań, rozprawa „Wybrane zagadnienia teorii funkcji L wraz z zastosowaniami", promotor: prof. dr hab. J. Kaczorowski

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

adiunkt od 2002r., Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

adiunkt w niepełnym wymiarze, w latach 2002–2010 (od 2010 r. na urlopie bezpłatnym), Instytut Środowiska Rolniczego i Leśnego PAN, Poznań

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego:

Oscylacje funkcji arytmetycznych związanych z niektórymi własnościami faktoryzacyjnymi elementów półgrup arytmetycznych.

b) (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa)

[1] M. Radziejewski, *Oscillatory properties of real functions with weakly bounded Mellin transform*, Quart. J. Math. **65** (2014), no. 1, 249–266.

[2] M. Radziejewski, *Algebraic independence of logarithmic singularities of some complex functions*, J. Math. Anal. Appl. **410** (2014), no. 2, 764–770.

[3] M. Radziejewski, *Structural results for semigroup subsets defined by factorization properties dependent on Ω functions*, Semigroup Forum (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00233-014-9593-0.

[4] M. Radziejewski, *The asymptotic behaviour of the counting functions of Ω-sets in arithmetical semigroups*, Acta Arith. **163** (2014), no. 2, 179–198.

c) omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

Zasadniczym celem omawianych prac było uzyskanie informacji o zachowaniu funkcji arytmetycznych, w szczególności funkcji liczących podzbiorów półgrup arytmetycznych zadanych przez określone własności faktoryzacyjne. Badania takich funkcji liczących należą do ilościowej teorii faktoryzacji, dziedziny zapoczątkowanej przez E. Fogelsa [37] i rozwiniętej przez W. Narkiewicza [54–58, etc.]. Szersze zagadnienie, oscylacji funkcji arytmetycznych czy też funkcji rzeczywistych o dostatecznie regularnej transformacie Mellina, jest o kilkadziesiąt lat starsze.

Niech $s = \sigma + it$ oznacza zmienną zespoloną. Zasadniczym wynikiem pracy **[1]** jest twierdzenie o oscylacjach funkcji $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, której transformata Mellina, zbieżna bezwzględnie w pasie $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ (można przyjąć $\sigma_2 = +\infty$), posiada odpowiednie przedłużenie rozgałęzione w obszarze $\mathcal{D}$ zawierającym pas $\sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$, spełnia pewne naturalne oszacowania (nie przytaczam szczegółowych definicji, bo musiałbym przytoczyć obszerny fragment pracy), a wszystkie jej osobliwości są postaci:

$$F(s) = \sum_{j=1}^{m} (s-\rho)^{-b_j} (\log(s-\rho))^{c_j} h_j(s), \tag{1}$$

dla s w otoczeniu ρ, przy czym $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{C}$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{Z}$, a funkcje $h_1, \dots, h_m$ są regularne w otoczeniu ρ (oczywiście wszystkie te parametry zależą od ρ). Mówimy wtedy, że f ma słabo ograniczoną transformatę Mellina. Dodajmy jeszcze, że przez osobliwość rozumiemy tutaj tzw. osobliwość nieusuwalną. Jeżeli funkcja $F(s)$ ma w punkcie ρ osobliwość, to rzędem tej osobliwości nazywamy parę wykładników (b, c) odpowiadającą, z dokładnością do przesunięcia c o 1, dominującemu składnikowi (1), po sprowadzeniu (1) do jednoznacznej postaci nieredukowalnej, w której dla wszystkich j mamy $h_j(\rho) \neq 0$ oraz równość $c_i = c_j$ implikuje $b_i \not\equiv b_j \pmod{\mathbf{Z}}$. Mówimy, że funkcja f posiada oscylacje wielkości $g(x)$ o częstości logarytmicznej, jeśli istnienie taki ciąg x_n rosnący do nieskończoności, że:

- $(-1)^n f(x_n) \gg g(x_n)$, $n \to \infty$,
- liczba wyrazów ciągu (x_n) w odpowiednio długim przedziale $[1, x]$ jest co najmniej rzędu $\log x$ (równoważnie:$\log x_n \ll n$, $n \to \infty$) oraz
- dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie x_0, że dla każdego $x \geq x_0$ w przedziale $[x, x^{1+\varepsilon}]$ znajduje się co najmniej jeden wyraz ciągu (x_n) (równoważnie: $\log x_{n+1} \sim \log x_n$, $n \to \infty$).

Jeśli mówimy o oscylacjach wielkości $x^{\beta-\varepsilon}$, to oznacza to istnienie odpowiedniego ciągu (x_n) takiego, że dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $(-1)^n f(x_n) \gg x_n^{\beta-\varepsilon}$. Człon główny funkcji f określamy, za J. Kaczorowskim [39] oraz J. Kaczorowskim i A. Perelli [42], jako całkę

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} x^s F(s)\, ds, \tag{2}$$

gdzie kontur $\mathcal{C}_0$ rozpoczyna się i kończy w punkcie $\theta > \sigma_0$ i okrąża wszystkie osobliwości funkcji F na przedziale $[\sigma_0, \sigma_1]$, przy czym σ_0 i θ muszą być tak dobrane, żeby na przedziale $[\sigma_0, \theta]$ osobliwości nie było. Członem resztowym funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję $E(x) = f(x) - \mathcal{M}(x)$. Pewna dowolność w wyborze punktu θ pociąga za sobą niejednoznaczność określenia członu głównego i resztowego, z dokładnością do składnika o małym rzędzie, toteż pisząc „człon resztowy funkcji $f(x)$" zakładamy *implicite*, że odpowiednie θ zostało wybrane i twierdzimy, że formułowane wnioski są prawdziwe dla każdego dopuszczalnego wyboru. Możemy teraz sformułować omawiane twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([1, Theorem 1.1])**.** *Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą o słabo ograniczonej transformacie Mellina $F(s)$ i niech pozostałe oznaczenia będą jak wyżej. Jeśli funkcja $F(s)$ posiada osobliwość rzędu (b, c) w punkcie $\rho = \beta + i\gamma \in \mathcal{D}$, $\gamma \neq 0$, $\theta < \beta < \sigma_2$, to $E(x)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej i wielkości $x^\beta (\log x)^{b-1-\varepsilon}$.*

Nadmieńmy, że twierdzenie to jest na tyle ogólne, że można je zastosować do funkcji, których transformata Mellina jest złożoną kombinacją iloczynów logarytmów i zespolonych potęg funkcji L z klasy Selberga. Istotnie, logarytm funkcji L może być lokalnie przybliżony przez sumę po zerach nietrywialnych (por. [4, Lemma 2.1]), stąd jej potęga zespolona spełnia wymagane oszacowanie [1, równanie (2)]. Dzięki temu twierdzenie 1 można zastosować do funkcji liczących omawianych niżej. Wprawdzie w szczególnych przypadkach znane są wyniki silniejsze, por. np. [41], jednak wykorzystuje się tam w kluczowy sposób niski rząd wzrostu badanej transformaty Mellina w obszarze regularności w pasie krytycznym, czego w przedstawianych tu przykładach postulować nie możemy. Twierdzenie 1 jest wzmocnieniem (przy nieco silniejszych założeniach) twierdzenia z pracy [11], które z kolei jest uogólnieniem twierdzenia J. Kaczorowskiego i J. Pintza [44]. Najogólniejszym twierdzeniem tego typu jest twierdzenie E. Landaua [52], które jednak nie daje żadnych informacji o częstości oscylacji. Bardzo silne oszacowanie wielkości oscylacji członu resztowego funkcji liczącej zbioru liczb pierwszych $\pi(x)$ uzyskał J. E. Littlewood [53]:

$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = \Omega_{\pm}\left(\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}\right).$$

Zagadnienia częstości oscylacji i ich lokalizacji w określonym przedziale pierwsi rozważali S. Knapowski i P. Turán [45–51], a twierdzenie Kaczorowskiego i Pintza było pierwszym, które wielkość, częstość i lokalizację oscylacji traktowało łącznie. Twierdzenie to, podobnie jak wspomniane uogólnienie (które było zasadniczym wynikiem rozprawy doktorskiej habilitanta) daje oszacowanie $x^{\beta-\varepsilon}$ na wielkość oscylacji. Punktem odniesienia dla wielkości oscylacji może tu być wyrażenie $x^{\beta}(\log x)^{b-1}(\log\log x)^{c}$, od którego uzyskane teraz oszacowanie jest gorsze o czynnik $(\log x)^{-\varepsilon}$ zamiast, jak wcześniej $x^{-\varepsilon}$.

Metoda dowodu polega na przedstawieniu funkcji $\delta_n E(x)$, gdzie δ_n jest n-krotnym złożeniem operatora δ wprowadzonego przez J. Kaczorowskiego [40], jako całki z funkcji $x^s F(s) s^{-n}$ po odpowiednio dobranym konturze. Trudnością jest tu potencjalnie duży rząd wzrostu transformaty Mellina zadanej funkcji w pasie krytycznym, który wymusza zastosowanie liczby złożeń n operatora δ rzędu $\log\log x$. Każde jego zastosowanie wiąże się ze stratą (dużej) stałej, skutkowałoby to więc czynnikiem $(\log x)^{-M}$, z dużą stałą M, w miejsce $(\log x)^{-\varepsilon}$ w oszacowaniu na rozmiar oscylacji. Okazuje się jednak, że przesunięcie rozważanej transformaty Mellina pozwala, dla zadanego n, dowolnie zmniejszyć stałą M, a zastosowanie różnych przesunięć w kolejnych przedziałach na x daje już czynnik $(\log x)^{-\varepsilon}$. Oczywiście pociąga to konieczność uzyskania pośrednich oszacowań z wyraźną zależnością od parametrów i komplikuje rozumowanie.

Zastosowanie twierdzenia 1 wymaga udowodnienia, że transformata Mellina zadanej funkcji posiada odpowiednią osobliwość. Dla konkretnych funkcji można uczynić to bezpośrednio, wykonując stosowne obliczenia. Niech

$$r(n) = \#\left\{(a,b) \in \mathbf{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\right\},$$

$r_1(n) = \frac{1}{4} r(n)$ oraz

$$B(x,z) = \sum_{\substack{n \le x \\ r_1(n) \ne 0}} r_1(n)^z, \qquad x > 0, z \in \mathbf{C}.$$

Funkcja $B(x,1)$ jest związana ze słynnym problemem kołowym Gaussa, jednak jej transformata Mellina nie posiada wymaganych osobliwości (jest ona równa $s^{-1}\zeta(s)L(s,\chi)$, gdzie ζ oznacza funkcję ζ Riemanna, a $L(s,\chi)$ funkcję L stowarzyszoną z pierwotnym charakterem Dirichleta modulo 4). Innym klasycznym obiektem badań jest funkcja $B(x)=B(x,0)$, tj. funkcja licząca zbioru sum dwóch kwadratów. W tym przypadku otrzymujemy oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości $x^{1/2}(\log x)^{-3/2-\varepsilon}$, a dla prawie wszystkich innych wartości z, poza $z=1+\log_2 n$, $n\in\mathbf{N}$, mamy oscylacje wielkości $x^{1/2}(\log x)^{O(1)}$.

Twierdzenie 2 ([1, Theorem 2.1])**.** *Człon resztowy funkcji $B(x)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości*

$$x^{1/2}(\log x)^{-3/2-\varepsilon}.$$

Jeżeli z jest liczbą zespoloną taką, że $2^{z-1}\notin\mathbf{N}$, to człon resztowy $E(x,z)$ funkcji $B(x,z)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości

$$x^{1/2}(\log x)^{M-\varepsilon}, \qquad \textit{gdzie } M=-\Re 2^{z-1}-1.$$

Jeśli $2^{z-1}\in\mathbf{N}$ i $3^z\notin\mathbf{N}$, to $E(x,z)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości

$$x^{1/4}(\log x)^{M-\varepsilon}, \qquad \textit{gdzie } M=\Re\left(-\frac{1}{2}3^z+2^{2z-2}+2^{z-1}-\frac{3}{2}\right).$$

Jeśli $z\in\mathbf{N}$, $z\geq 2$, to $E(x,z)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości

$$x^{1/4}(\log x)^{M-\varepsilon}, \qquad \textit{gdzie } M=-\frac{1}{2}3^z+2^{2z-2}+2^{z-1}-\frac{3}{2}>0.$$

Jeśli prawdziwa jest hipoteza o czterech funkcjach wykładniczych [61, §1.3], to dla każdego $z\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ spełniony jest przynajmniej jeden z wymienionych w twierdzeniu 2 warunków wystarczających dla istnienia oscylacji, zatem dla wszystkich $z\neq 1$ otrzymalibyśmy oscylacje o częstości logarytmicznej, wielkości co najmniej $x^{1/4}(\log x)^{O(1)}$.

Zastosowanie twierdzenia 1 do członów resztowych funkcji liczących różnego rodzaju podzbiorów półgrup arytmetycznych jest treścią prac **[2–4]**. Jeśli S jest półgrupą przemienną z jedynką i z prawem skracania oraz z normą multyplikatywną $N:S\to\mathbf{N}$, to dla każdego $A\subseteq S$ określamy funkcję liczącą zbioru A wzorem

$$A(x)=\sideset{}{'}\sum_{\substack{a\in A\\ N(a)\leq x}} 1,$$

gdzie suma jest po niestowarzyszonych elementach zbioru A. Jeśli w jakiejś półpłaszczyźnie $\sigma > \sigma_1$ zbieżny jest szereg,

$$Z(s, A) = \sum_{a \in A}{}' N(a)^{-s}, \qquad \sigma > \sigma_1,$$

to funkcja $s^{-1}Z(s, A)$ jest transformatą Mellina funkcji $A(x)$. Jeśli więc funkcja $Z(s, A)$, nazywana funkcją dzeta zbioru A, jest dostatecznie regularna, to można człon główny (i stąd człon resztowy) funkcji $A(x)$ zdefiniować jak w (2). Przedmiotem badań ilościowej teorii faktoryzacji są:

1) rząd wzrostu i zachowanie się członu głównego funkcji liczącej badanego zbioru,

2) zagadnienie możliwie najlepszego oszacowania rzędu członu resztowego oraz

3) własności oscylacyjne członu resztowego funkcji liczącej.

Pierwsze zagadnienie jest w dużej mierze rozwiązane dzięki pracom E. Fogelsa [37], W. Narkiewicza [54–58, etc.], por. także [59, Chapter 9], J. Śliwy [60, etc.] oraz A. Geroldingera i F. Halter-Kocha (e.g., [38, Chapter 9]). Drugie zagadnienie zawiera w sobie zarówno tak klasyczne otwarte problemy jak oszacowanie reszty w Twierdzeniu o Liczbach Pierwszych, jak i ogólne wyniki stosowalne do wielu funkcji. J. Kaczorowski [39] uzyskał ogólne twierdzenie zwane Lematem Głównym, z którego otrzymał asymptotykę i oszacowanie członu resztowego funkcji liczących różnych podzbiorów, w tym zbioru $\boldsymbol{G}_k$ złożonego z elementów o co najwyżej k różnych długościach rozkładu na czynniki nierozkładalne w pierścieniu liczb całkowitych algebraicznego ciała liczbowego. Ogólne wyniki o oszacowaniu członów resztowych, dla podzbiorów aksjomatycznie zdefiniowanych półgrup, podali Geroldinger i Halter-Koch [38, Chapter 9]. Należy tu zaznaczyć, że w przypadku funkcji, których transformata Mellina ma złożoną strukturę osobliwości, zwykle nie bada się członu głównego zdefiniowanego w (2), a jedynie jego dominujący składnik.

Omawiane tu prace związane są z trzecim z wymienionych zagadnień. Przed omówieniem dotychczasowych wyników w tej dziedzinie wygodnie będzie powołać się na pewne pojęcia zdefiniowane w pracy [3]. Rozważana jest tam klasa podzbiorów półgrup zwanych Ω-zbiorami. Przypuśćmy o naszej półgrupie S, że posiada teorię dywizorów $\varphi : S \to \mathcal{F}(\mathcal{P})$, por. [4, Wstęp]. Zakładamy, że grupa klas $\mathrm{Cl}(S)$ jest skończona i oznaczamy przez h liczbę klas, a przez E klasę główną. Liczbę dywizorów pierwszych elementu $a \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ należących do klasy X, licząc z krotnościami, oznaczamy $\Omega_X(a)$, a klasę elementu a przez $[a]$. Otóż podzbiór $A \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{P})$, a w przypadku $A \subseteq E$ także odpowiedni podzbiór $\varphi^{-1}(A) \subseteq S$, nazywamy Ω-zbiorem, jeżeli przynależność elementu $a \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ do zbioru A zależy wyłącznie od wartości funkcji $\Omega_X(a)$, $X \in \mathrm{Cl}(S)$. W pracy [3] wprowadzono pojęcie rangi

Ω-zbioru A (ozn. $\operatorname{rk} A$), o którym można myśleć jak o wymiarze, stopnia zbioru A (ozn. $\deg A$), związanego z sumami funkcji $\Omega_X(a)$ po różnych klasach, wreszcie liczby warstw $l(A)$ zbioru A, która oznacza kres górny długości l ciągów dzielników $a_1 \mid b_1 \mid a_2 \mid b_2 \mid \ldots \mid b_{l-1} \mid a_l$ takich, że $a_1, a_2, \ldots, a_l \in A$, $b_1, b_2, \ldots, b_{l-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{P}) \setminus A$ i $[a_1] = [b_1] = \ldots = [b_{l-1}] = [a_l]$.

J. Kaczorowski i J. Pintz [44] oraz J. Kaczorowski i A. Perelli [42] badali własności oscylacyjne członów resztowych różnych funkcji liczących dla różnych podzbiorów pierścieni algebraicznych liczb całkowitych. Badane w tych pracach podzbiory są Ω-zbiorami rangi 0. Charakteryzują się one tym, że ich funkcje dzeta dają się wyrazić, powiedzmy w półpłaszczyźnie $\sigma \geq \frac{2}{5}$, jako wielomiany od logarytmów funkcji dzeta Heckego, stopnia równego stopniowi zbioru. Współczynnikami tych wielomianów są funkcje zadane przez szeregi Dirichleta bezwzględnie zbieżne w tej samej półpłaszczyźnie. W przypadku zbiorów $\boldsymbol{G}_k$, a także innych zbiorów niezerowej rangi, funkcja dzeta jest kombinacją iloczynów nie tylko logarytmów, ale także zespolonych potęg funkcji dzeta Heckego. Skutkuje to większym możliwym rzędem wzrostu funkcji $Z(s, \boldsymbol{G}_k)$ w pasie krytycznym, jak wspomniano wyżej, ale też utrudnia dowodzenie istnienia osobliwości tej funkcji potrzebnych do zastosowania twierdzenia 1. Również struktura kombinatoryczna zbioru $\boldsymbol{G}_k$ jest znacznie słabiej rozpoznana: nawet określenie rangi takiego zbioru jest problemem otwartym rozważanym przez różnych autorów. W przeszłości habilitant [10, 11, 15] oraz W. A. Schmid i habilitant [27] uzyskali twierdzenia o oscylacjach (wielkości $x^{1/2-\varepsilon}$) dla zbioru $\boldsymbol{G}_k$ w niektórych półgrupach liczb algebraicznych, poza najważniejszym przypadkiem $k = 1$, dla którego uzyskano szereg wyników warunkowych, zależnych pewnych hipotez analitycznych (o krotnościach miejsc zerowych funkcji dzeta Heckego) bądź kombinatorycznych (o strukturze zbioru $\boldsymbol{G}_1$). Wyniki te dotyczyły szczególnego rodzaju uogólnionych półgrup Hilberta opartych na grupie klas $H^*(K)$ ciała. W omawianym cyklu prac uzyskano twierdzenie o oscylacjach o częstości logarytmicznej i wielkości $x^{1/2}(\log x)^{-M}$, dla pewnego $M > 0$, dla członu resztowego funkcji liczącej zbioru $\boldsymbol{G}_k$ bezwarunkowo, dla wszystkich k. Ponadto wynik ten został udowodniony dla istotnie szerszej klasy tzw. prostych półgrup typu L z liczbą klas $h \geq 3$ (wtedy zbiór $\boldsymbol{G}_k$ jest różny od całej półgrupy). Klasa prostych półgrup typu L jest zdefiniowana aksjomatycznie i zawiera wszystkie uogólnione półgrupy Hilberta.

Rozważano również zbiór $B(a, q)$ liczb naturalnych nie posiadających nietrywialnych (różnych od $\mathrm{NWD}(a, q)$) dzielników w postępie arytmetycznym $a \bmod q$. Zbiór ten rozważali jako pierwsi W. Banks, J. Friedlander i F. Luca [36], w przypadku, kiedy q jest liczbą pierwszą, a asymptotykę funkcji liczącej w ogólnym przypadku, przy nieco innym potraktowaniu przypadków trywialnych, podali W. Narkiewicz i habilitant [20]. W omawianym tu cyklu prac wykazano istnienie oscylacji (poza przypadkami trywialnymi) członu resztowego funkcji liczącej tego zbioru.

Zbiór ten nie jest wprawdzie Ω-zbiorem, ale jego funkcja dzeta jest blisko związana z funkcją dzeta Ω-zbioru, zazwyczaj niezerowej rangi, w półgrupie Hilberta. Rozważano też uogólnienie tej konstrukcji na przypadek ideałów w pierścieniach liczb algebraicznych i również tu uzyskano pewne twierdzenia o oscylacjach.

W pracy **[2]** badano zagadnienie niezależności algebraicznej funkcji zespolonych mających rozgałęzione przedłużenie w ustalonym obszarze $\mathcal{D}$, których osobliwości są postaci (1), ale z całkowitymi b_j (i dowolnymi całkowitymi c_j), ponadto wszystkie osobliwości zawarte są w dyskretnym podzbiorze pewnej półpłaszczyzny. Pierścień takich funkcji oznaczamy $\mathrm{LI}(\mathcal{D})$. Udowodniono, że niezależność algebraiczna układu takich funkcji nad pierścieniem $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ funkcji holomorficznych w $\mathcal{D}$ pociąga za sobą ich niezależność nad większym pierścieniem, ozn. $\mathrm{Hol}^{\mathbf{C}}(\mathcal{D})$, generowanym przez potęgi zespolone funkcji holomorficznych, z tymi samymi ograniczeniami na położenie osobliwości.

Twierdzenie 3 ([2, Theorem 1]). *Niech $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem i niech $F_1, \ldots, F_n \in \mathrm{LI}(\mathcal{D})$ będą algebraicznie niezależne nad pierścieniem $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$. Wtedy $F_1, \ldots, F_n$ są algebraicznie niezależne nad pierścieniem $\mathrm{Hol}^{\mathbf{C}}(\mathcal{D})$.*

Z głównego twierdzenia wspomnianej wcześniej pracy J. Kaczorowskiego i A. Perelli [42, Theorem 1] wynika w szczególności, że jeśli $F_1, \ldots, F_n$ są funkcjami z klasy Selberga $\mathcal{S}$ takimi, że funkcje $\log F_1, \ldots, \log F_n$ są liniowo niezależne nad $\mathbf{Q}$, a $\mathcal{D}$ jest obszarem zawierającym zbiór

$$\left\{s \in \mathbf{C} : \Re s \geq \frac{1}{2}, |\Im s| \geq T\right\} \cup \{s \in \mathbf{C} : \Re s > 1, |\Im s| \leq T\} \tag{3}$$

dla pewnego $T > 0$, to każda funkcja postaci

$$f(s) = P(\log F_1(s), \ldots, \log F_n(s), s),$$

gdzie P jest nietrywialnym (tj. niestałym) wielomianem o współczynnikach w pierścieniu $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$, posiada w $\mathcal{D}$ nieskończenie wiele osobliwości zawartych w półpłaszczyźnie $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Stąd i z twierdzenia 3 natychmiast wynika istnienie osobliwości podobnej funkcji $f(s)$ w przypadku, gdy P jest nietrywialnym wielomianem o współczynnikach w pierścieniu $\mathrm{Hol}^{\mathbf{C}}(\mathcal{D})$. Istotne jest jednak także wykazanie, że osobliwość taka będzie się znajdować poza prostą rzeczywistą, w półpłaszczyźnie $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Wniosek ten otrzymano w pracy korzystając z topologicznych własności płaszczyzny zespolonej. Uzyskane twierdzenie jest uogólnieniem opisanego powyżej szczególnego przypadku twierdzenia Kaczorowskiego i Perelli.

Twierdzenie 4 ([2, Theorem 2]). *Niech $T > 0$ i niech $\mathcal{D}$ będzie obszarem zawierającym zbiór (3). Niech $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{S}$, niech $\log F_1, \ldots, \log F_n$ będą liniowo niezależne nad $\mathbf{Q}$ i niech $P \in \mathrm{Hol}^{\mathbf{C}}(\mathcal{D})[X_1, \ldots, X_n]$, $\deg P > 0$. Wtedy funkcja*

$$f(s) = P(\log F_1(s), \ldots, \log F_n(s), s)$$

posiada nieskończenie wiele osobliwości zawartych w części wspólnej obszaru $\mathcal{D}$ i półpłaszczyzny $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

W pracy **[3]** opisano podstawowe własności rangi i stopnia Ω-zbioru, udowodniono, że warunek $l(A) < +\infty$ jest równoważny możliwości przedstawienia funkcji charakterystycznej zbioru A w postaci (jednoznacznie określonej) kombinacji liniowej funkcji charakterystycznych prostszych zbiorów, zwanych kostkami, wreszcie wprowadzono i badano pojęcia związane z tym jednoznacznym przedstawieniem: stopień bezwzględny zbioru A, ozn. $\deg_0(A)$, oraz pojęcie zbioru (r,d)-syngularnego. Zbiór A nazywamy (r,d)-syngularnym, jeśli w jednoznacznym przedstawieniu zbioru A wszystkie kostki rangi r i stopnia d występują z tym samym znakiem, ponadto $d \geq 1$ i para (r,d) jest maksymalna wśród par (ranga, stopień) dla kostek z jednoznacznego przedstawienia. W przypadku zbiorów A zamkniętych na dzielniki (także w słabszym sensie: z $a \in A$, $d \mid a$ i $[d] = [a]$ wynika $d \in A$, co zapisujemy $\mathrm{Div}(A) = A$) uzyskano równoważnościową charakteryzację zbiorów (r,d)-syngularnych:

Twierdzenie 5 ([3, Theorem 11]). *Niech A będzie Ω-zbiorem takim, że $\mathrm{Div}(A) = A$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(*i*) *A jest (r,d)-syngularny dla pewnych $r \in \mathbf{N}_0$ i $d \in \mathbf{N}$,*

(*ii*) $\deg_0(A) > 0$.

Uzyskano stąd twierdzenie o (r,d)-syngularności zbiorów $\boldsymbol{G}_k$ poza przypadkiem, kiedy S jest tzw. półgrupą półfaktorialną, tzn. kiedy $S = \boldsymbol{G}_1$ (wtedy zbiór $\boldsymbol{G}_1$ syngularny nie jest). Twierdzenie to można sformułować następująco.

Twierdzenie 6 ([3, Theorem 13]). *Niech $k \in \mathbf{N}$. Zbiór $\boldsymbol{G}_k$ jest (r,d)-syngularny dla pewnych $r \in \mathbf{N}_0$ i $d \in \mathbf{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy S nie jest półgrupą półfaktorialną.*

Uzyskano również kryterium (r,d)-syngularności zbioru elementów półgrupy dywizorów nie posiadających dzielników w zadanym „zakazanym" podzbiorze. Zgodnie z życzeniem recenzenta pracy, zastosowano tam formalizm z książki Geroldingera i Halter-Kocha [38, Chapter 9], używany powszechnie przez matematyków zajmujących się arytmetyczną teorią półgrup. W kolejnej pracy [4] podano inne (równoważne) sformułowanie najważniejszych rezultatów pracy [3]. W tym autoreferacie podano te wyniki w formie przedstawionej w [4] dla zachowania jednolitości tekstu.

W pracy **[4]** wprowadzono pojęcie półgrupy typu L i udowodniono twierdzenie o oscylacjach dla zbiorów $\boldsymbol{G}_k$ w takich półgrupach oraz twierdzenia o oscylacjach dla zbioru $B(a,q)$ i pewnego jego uogólnienia na półgrupy ideałów w pierścieniach liczb algebraicznych. Półgrupa typu L musi spełniać wszystkie wymienione wcześniej założenia o półgrupie S, ponadto funkcje L stowarzyszone z charakterami grupy klas $\mathrm{Cl}(S)$ powinny, z dokładnością do czynnika o skończonym iloczynie Eulera, spełniać aksjomaty klasy Selberga. Półgrupę typu L nazywamy prostą, jeśli funkcja L stowarzyszona z charakterem głównym ma biegun pojedynczy w punkcie $s = 1$, a funkcje L stowarzyszone z pozostałymi charakterami są regularne i niezerowe w tym punkcie.

Twierdzenie 7 ([4, Theorem 1.1])**.** *Jeśli S jest prostą półgrupą typu L z liczbą klas $h \geq 3$, to dla każdej liczby naturalnej k człon resztowy funkcji liczącej $\boldsymbol{G}_k(x)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości $\sqrt{x}(\log x)^{-M}$ dla pewnego $M > 0$.*

Twierdzenie 8 ([4, Theorem 1.2])**.** *Niech a, q będą takimi liczbami naturalnymi, że $\frac{q}{\mathrm{NWD}(a,q)} \geq 3$. Wtedy człon resztowy funkcji liczącej zbioru $B(a, q)$ posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości $\sqrt{x}(\log x)^{-M}$ dla pewnego $M > 0$.*

Podstawowym technicznym wynikiem tej pracy jest twierdzenie [4, Theorem 4.7] o istnieniu odp. osobliwości funkcji dzeta Ω-zbioru (r, d)-syngularnego w prostej półgrupie typu L. Dodajmy, że we wcześniejszych wynikach dotyczących oscylacji dla zbiorów $\boldsymbol{G}_k$ przy $k \geq 2$ w istotny sposób korzystano z faktu, że są to zbiory stopnia dodatniego. Warunek (r, d)-syngularności jest znacznie słabszym warunkiem wystarczającym: nie wiemy np. czy dla $h \geq 3$ mamy zawsze $\deg \boldsymbol{G}_1 > 0$, natomiast wiemy, z twierdzenia 6, że $\boldsymbol{G}_1$ jest wtedy (r, d)-syngularny. Funkcja dzeta Ω-zbioru o skończonej liczbie warstw jest kombinacją iloczynów potęg zespolonych i logarytmów funkcji L badanej półgrupy, z odp. współczynnikami funkcyjnymi, stąd, wobec twierdzenia 4 wystarczy wykazać, że kombinacja ta jest nietrywialnym (dodatniego stopnia) wielomianem od logarytmów odp. funkcji z klasy Selberga, aby uzyskać pewność istnienia wymaganej osobliwości. Dalej, z twierdzenia 1, otrzymujemy informacje o oscylacjach członu resztowego funkcji liczącej. Problem polega więc na wykazaniu, że składające się na współczynniki tego wielomianu potęgi zespolone funkcji L pomnożone przez funkcje, które nie do końca kontrolujemy, nie redukują się do funkcji tożsamościowo równych 0.

Twierdzenie 8 otrzymuje się, w prawie wszystkich przypadkach, jako wniosek z ogólniejszego twierdzenia o podzbiorach półgrupy ideałów $\mathcal{I}(\mathcal{O}_K)$ pierścienia liczb całkowitych algebraicznego ciała liczbowego K. Zwykle za odpowiednik postępu arytmetycznego a modulo q w półgrupie ideałów uważa się klasę grupy klas modulo ideał $\mathfrak{q}$ w wąskim sensie, tj. jeden z elementów grupy $H^*_{\mathfrak{q}}(K)$. Jest to, ściśle rzecz biorąc, odpowiednik postępu arytmetycznego $a \bmod q$ w przypadku, gdy a i q są względnie pierwsze. W omawianej pracy zwykła definicja przystawania ideałów (w wąskim sensie) modulo ideał $\mathfrak{q}$ została nieco rozszerzona, dzięki czemu otrzymana konstrukcja $B(\mathfrak{a}, \mathfrak{q})$ istotnie obejmuje zbiory $B(a, q)$ w półgrupie liczb naturalnych jako szczególny przypadek.

Twierdzenie 9 ([4, Theorem 5.4]). *Niech* $\mathfrak{a}, \mathfrak{q} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)$, $\mathfrak{d} = \mathrm{NWD}(\mathfrak{a}, \mathfrak{q})$, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{f} = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{q}$. *Niech S będzie uogólnioną półgrupą Hilberta mod* $\mathfrak{f}$. *Jeżeli*

(*i*) $[\mathfrak{a}_1] = E$ *i* $|\mathrm{Cl}(S)| \geq 2$ *lub*

(*ii*) $[\mathfrak{a}_1] \neq E$ *i* $\mathrm{Cl}(S) \ncong C(2)^m$, $m \in \mathbf{N}$ *lub*

(*iii*) $[\mathfrak{a}_1] \neq E$ *i dla pewnego* $\chi \in \widehat{\mathrm{Cl}(S)}$ *takiego, że* $\chi([\mathfrak{a}_1]) \neq 0$, *funkcja* $L(s, \chi)$ *posiada zero pojedyncze* ρ *spełniające* $\rho \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $\Re\rho \geq \frac{1}{2}$ *oraz*

$$L(\rho, \psi) \neq 0, \qquad \psi \in \widehat{\mathrm{Cl}(S)} \setminus \{\chi\},$$

to człon resztowy funkcji liczącej zbioru $B(\mathfrak{a}, \mathfrak{q})$ *posiada oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości* $\sqrt{x}(\log x)^{-M}$ *dla pewnego* $M > 0$.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych.

Pozostały dorobek można podzielić na dwie części: badania teoretyczne w dziedzinie Teorii Liczb oraz zastosowania Matematyki w badaniach nad zmianami klimatu i w hydrologii. Część dotycząca zastosowań nie zawiera twierdzeń matematycznych: wartość opisanych wyników polega raczej na nowym podejściu do ważnych praktycznych zagadnień. Wszystkie prace są poniżej omówione łącznie, w kolejności ich przygotowywania. Odstępami oddzielono wyniki uzyskane przed doktoratem, wyniki związane z doktoratem (nie zawsze tożsame) oraz wyniki uzyskane po doktoracie.

W pracy [5], wspólnej z Z. W. Kundzewiczem, badano własności przepływów dziennych rzeki Warty zarejestrowanych w Poznaniu, w długim szeregu czasowym (tzn. ciągu pomiarów dokonanych w równych odstępach czasu). Badano m. in. własności rozkładu w czasie przepływów ekstremalnych, zjawisko Hursta i własności dyskretnej transformaty Fouriera badanego ciągu, po tzw. standaryzacji szeregu. Przedstawiono nową, szybką i precyzyjną metodę obliczania wymiaru Kołmogorowa, wykazano istnienie struktury fraktalnej rozkładu w czasie przepływów ekstremalnych (w odniesieniu do ograniczonego przedziału skali czasowej), zaobserwowano nieoczekiwaną symetrię we własnościach zależności wymiaru od progu dla ekstremalnie wysokich i ekstremalnie niskich przepływów. W pracy wspomina się też o generowaniu losowych szeregów czasowych o własnościach podobnych do wyjściowego szeregu przepływów. Pomysł ten został rozwinięty w kolejnych pracach i znalazł zastosowanie w problemie detekcji zmian.

W pracy [6], wspólnej z A. Bardossym i Z. W. Kundzewiczem, przedstawiono metodę detekcji długoterminowych zmian i trendów w szeregach czasowych przepływów rzecznych, nazwaną metodą randomizacji faz. W istocie ta sama idea może być wykorzystana do badania zmian także w innych szeregach czasowych o dużej zmienności naturalnej. Ważnym problemem w detekcji zmian jest określenie istotności zmian (w najprostszym ujęciu ustala się jeden poziom istotności i określa tylko czy zmiany są istotne na zadanym poziomie). To z kolei zależy od przyjętej hipotezy zerowej. Otóż najprostsza hipoteza zerowa, o niezależności ciągu kolejnych obserwacji, jest nieadekwatna w przypadku przepływów dziennych bądź miesięcznych. Przyjęcie nieadekwatnej hipotezy zerowej mogłoby prowadzić do poważnego błędu: uznania za istotne zmian, które powinniśmy uznać za nieistotne. Metoda randomizacji faz polega na przyjęciu, w hipotezie zerowej, przestrzeni probabilistycznej złożonej z szeregów czasowych mających identyczne z wyjściowym szeregiem własności podstawowe (rozkład marginalny, sezonowe średnie i odchylenia standardowe) oraz identyczne widmo mocy (po standaryzacji), ale losowe widmo fazy. O istotności zmian rozstrzyga się stosując *resampling* czyli generując losowe szeregi i porównując wartości statystyki wybranego testu dla szeregu wyjściowego i szeregów zrandomizowanych. Ze względu na własności transformaty Fouriera, zrandomizowany szereg zachowuje strukturę autokorelacji wyjściowego szeregu, natomiast nie posiada systematycznego trendu, stąd przyjęta przestrzeń probabilistyczna jest adekwatna nawet dla badania przepływów dziennych. Jest to o tyle istotne, że niektóre rodzaje zmian długoterminowych mogą nie być widoczne po zagregowaniu do danych rocznych. W artykule przedstawiono wyniki badania wykrywalności kontrolowanych zmian i trendów metodą randomizacji faz z użyciem siedmiu wybranych statystyk. Zbadano też zmiany długoterminowe dla ponad 200 szeregów czasowych przepływów rzek Amerykańskich (dane te są niemal bezpłatne, podczas gdy dane Polskie, w takiej ilości, kosztowałyby, przynajmniej wówczas, kilka milionów dolarów) i zanalizowano istotność wykrytych zmian.

W pracy [22] opisano podstawowe własności algebraiczne i analityczne półgrup wyznaczonych przez całkowite wartości funkcji *cross number*, zwanej też funkcją Zaksa-Skuli. Niech M będzie półgrupą z teorią dywizorów $\partial : M \to \mathcal{F}(\mathcal{P})$, o skończonej liczbie klas, i niech S_M i $\mathcal{S}_M$ oznaczają podzbiory odpowiednio półgrupy M i $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ złożone z elementów o całkowitych wartościach *cross number*. W pracy wykazano, że są to półgrupy z teorią dywizorów, wyznaczono grupy klas oraz, w przypadku gdy M jest półgrupą multyplikatywną elementów całkowitych w algebraicznym ciele liczbowym, określono podstawowe własności analityczne funkcji dzeta tych półgrup i wyznaczono asymptotykę ich funkcji liczących.

Praca [11] zawiera uogólnienie twierdzenia J. Kaczorowskiego i J. Pintza [44] o oscylacjach funkcji arytmetycznych na szerszą klasę funkcji. Uzyskuje się tu oscylacje o częstości logarytmicznej wielkości $x^{\beta-\varepsilon}$, gdzie β jest kresem górnym części rzeczywistych osobliwości (położonych poza osią rzeczywistą) transformaty Mellina badanej funkcji. Uogólnienie to było motywowane badaniami w dziedzinie ilościowej teorii faktoryzacji w ciałach algebraicznych, m. in. badaniami oscylacji funkcji liczącej $\boldsymbol{G}_k(x)$ w niektórych półgrupach liczb algebraicznych. Wynik ten pochodzi z rozprawy doktorskiej habilitanta.

W pracy [10] udowodniono, dla szczególnego rodzaju uogólnionych półgrup Hilberta S, że człon resztowy funkcji $\boldsymbol{G}_k(x)$ posiada odp. oscylacje (wielkości $x^{1/2-\varepsilon}$) dla k odpowiednio dużych, w zależności od grupy klas $\mathrm{Cl}(S)$. Udowodniono też bezwarunkowe twierdzenia o oscylacjach dla kilku innych podzbiorów półgrupy zadanych przez własności faktoryzacyjne. Dowód tych wyników opiera się na ogólnym kryterium, którego założenia są w istocie równoważne dodatniości stopnia badanego Ω-zbioru. Udowodniono też istnienie osobliwości transformaty Mellina, a stąd odp. własności oscylacyjne, w przypadku, gdy pewna stała $m(S) \in \mathbf{N}$, związana z krotnościami nietrywialnych miejsc zerowych funkcji L półgrupy S, nie jest wielokrotnością ilorazu $h/\gcd(h, M)$, gdzie M jest w istocie rangą badanego zbioru. Wyniki tej pracy pochodzą częściowo z rozprawy doktorskiej (w części dotyczącej stopnia dodatniego), a częściowo stanowią istotne wzmocnienie wyników rozprawy (w części dotyczącej stałej $m(S)$).

W pracy [15] wykazano metodami analitycznymi silniejsze kryteria dla istnienia oscylacji funkcji $\boldsymbol{G}_1(x)$ w przypadku ciała normalnego K. Dowód jest oparty na wykazanym w tej samej pracy twierdzeniu, że logarytmy różnych funkcji ζ Heckego stowarzyszonych z charakterami grupy $H^*(K)$ są liniowo niezależne. W połączeniu z lematem z pracy [27] wyniki z tego artykułu pokazują, że dla ciał kwadratowych i dla normalnych ciał sześciennych człon resztowy funkcji $\boldsymbol{G}_1(x)$ posiada odp. oscylacje, jeśli tylko grupa klas nie jest postaci $C_2^a \oplus C_3^b \oplus C_4^c$ dla nieujemnych całkowitych a, b i c. Wyniki tej pracy stanowią rozszerzenie i wzmocnienie wyników rozprawy doktorskiej (m. in. dodano wniosek o ciałach sześciennych), poprawiono też wniosek dotyczący ciał kwadratowych.

W pracy [7], wspólnej z Z. W. Kundzewiczem, badana była wykrywalność, za pomocą wybranych pięciu testów nieparametrycznych, kontrolowanych trendów wprowadzonych do losowo generowanych szeregów czasowych, w zależności od intensywności i czasu trwania zmiany. Szeregi te były generowane na wzór średnich rocznych przepływów rzecznych, stąd zastosowano klasyczne metody detekcji, z hipotezą zerową zawierającą założenie o niezależności kolejnych obserwacji.

W pracy [23], wspólnej z wieloma autorami, przedstawione są wyniki badań prowadzonych w ramach projektu Modelling the Impact of Climate Extremes (MICE) Komisji Europejskiej. Zbadano m. in. zmiany sezonowego rozkładu opadów atmosferycznych w Europie, wg. przewidywań modelu regionalnego HadRM3-P.

W pracy [24], wspólnej z wieloma autorami, przedstawione są również wyniki badań przeprowadzonych w projekcie MICE. Przedstawione są przewidywane przez model zmiany w występowaniu ekstremów klimatycznych oraz ich możliwe skutki.

W pracy [25], wspólnej z I. Pińskwar i Z. W. Kundzewiczem, przedstawione są uzyskane w projekcie MICE wyniki badań nt. przewidywanych przez modele zmian w występowaniu suszy i fal upałów w Europie.

W pracy [8], wspólnej z wieloma autorami, przedstawione są wyniki badań prowadzonych we współpracy z Global Runoff Data Centre w Koblencji. Badania te dotyczyły zmian w szeregach czasowych ekstremalnych przepływów (maksima roczne) rzek z różnych kontynentów w XX wieku. Istotność zmian oceniano za pomocą klasycznego testu Manna-Kendalla.

W pracy [9], wspólnej z wieloma autorami, przedstawione są wyniki badań prowadzonych w ramach projektu MICE. Przedmiotem badań są zmiany w charakterystyce opadów ekstremalnych na terenie Europy w symulacjach dokonanych za pomocą modeli klimatycznych HadRM3 i HadRM3P z Centrum Hadleya dla końca XX i końca XXI wieku. Zbadano m. in. (str. 182, ryc. 10) przewidywane przez model zmiany kwantyli opadów w wybranych oczkach siatki modelu.

W pracy [26] uzyskano ulepszone oszacowanie członu resztowego w formule Riemanna-von Mangoldta dla funkcji z rozszerzonej klasy Selberga stopnia 0. Wcześniejsze znane oszacowanie tego typu, jednostajne dla funkcji nie posiadających miejsc zerowych w określonej półpłaszczyźnie, zostało podane przez J. Kaczorowskiego i A. Perelli [43].

Praca [27], wspólna z W. A. Schmidem, zawiera wyniki badań nad sformułowaną przez habilitanta hipotezą, która jest równoważna dodatniości stopnia zbioru $\boldsymbol{G}_k$ w półgrupach liczb algebraicznych i innych półgrupach Krulla ze skończoną grupą klas takich, że liczba klas jest większa lub równa 3 oraz każda klasa zawiera ideał pierwszy. W artykule wykazano m. in. prawdziwość tej hipotezy dla $k \geq 2$. Wykazano też jej prawdziwość dla $k = 1$ w szczególnych przypadkach, np. kiedy grupa klas jest postaci C_2^a, C_3^b lub C_4^c.

W pracy [12], wspólnej z wieloma autorami, przedstawiono wyniki badań uzyskanych w projekcie MICE. Rozważany jest tu problem adekwatnej interpretacji danych dotyczących opadu uzyskanych z symulacji za pomocą modeli klimatycznych. Ze względu na konieczność porównania (przynajmniej pod pewnymi względami) danych modelowych i danych obserwacyjnych, a także dla celów badania skutków spodziewanych zmian klimatu, potrzebne jest określenie progu definiującego tzw. okresy suche i mokre. Tematem artykułu jest zagadnienie optymalnego doboru tego progu.

W pracy [13], wspólnej z Z. W. Kundzewiczem i I. Pińskwar, opisano spodziewane zmiany w różnych charakterystykach opadów atmosferycznych w Europie, wg. symulacji za pomocą modelu HadRM3-P z centrum Hadleya, oraz ich możliwe konsekwencje.

W recenzowanym artykule konferencyjnym [28], wspólnym z Z. W. Kundzewiczem, przedstawiono zagadnienie detekcji zmian od strony teoretycznej.

W pracy [14], wspólnej z wieloma autorami, przedstawiono podsumowanie licznych badań przeprowadzonych w ramach projektu MICE. Omówiono wyniki badań nad przydatnością modeli do modelowania skutków zmian klimatu, przewidywane przez modele zmiany ekstremów klimatycznych i modele skutków tych zmian.

W artykule [29], wspólnym z trzema innymi autorami, zbadano m. in. możliwość zastosowania regresji łamanej i dwóch innych prostych modeli matematycznych do obserwowanych wartości temperatury globalnej.

W pracy [30], wspólnej z Z. W. Kundzewiczem, M. Szwed i I. Pińskwar, przedstawiono wyniki badań uzyskanych w ramach projektów ADAM i ENSEMBLES Komisji Europejskiej. Badano m. in. przewidywane przez model HadRM3-P zmiany w jednoczesnym występowaniu wysokich temperatur i dni bez opadów.

W pracy [16], wspólnej z W. A. Schmidem, uzyskano m. in. pełną charakteryzację podzbiorów skończonej grupy przemiennej G spełniających warunek J. Śliwy „C_0", maksymalnych w sensie inkluzji. Otrzymano stąd nowe oszacowanie na maksymalny rozmiar podzbiorów półfaktorialnych w badanej grupie (wielkość obecnie oznaczana przez $\mu(G)$, badana przez wielu autorów). Badano też arytmetyczne znaczenie własności C_0 w odniesieniu do struktury zbiorów długości rozkładów w półgrupach bloków opartych na takich podzbiorach.

W pracy [17], wspólnej z czterema innymi autorami, opisano wyniki badań uzyskanych w projekcie ADAM. Przedstawiono metody określania ryzyka strat powodziowych na dużych obszarach, m. in. metodę agregacji przestrzennej nazwaną "hybrid convolution" czyli splotem hybrydowym, opisaną niżej.

W pracy [18], wspólnej z wieloma autorami, badany jest wpływ przewidywanych zmian klimatu, wg. symulacji za pomocą modelu HadCM3 z Centrum Hadleya, na rolnictwo w Europie. Badana jest także przewidywana skuteczność wybranych strategii adaptacji.

W pracy [19], wspólnej z wieloma autorami, opisano wyniki badań uzyskanych w projekcie ENSEMBLES. Badania te dotyczyły prawdopodobnych skutków przewidywanych zmian klimatu. W artykule wykorzystano wyniki symulacji sześciu różnych regionalnych modeli klimatycznych. Badano różne aspekty zmian klimatu, wyrażone za pomocą tzw. indeksów, wpływ tych zmian na rolnictwo i dostępność wody oraz ich bezpośrednie skutki zdrowotne.

W recenzowanym rozdziale w monografii nt. ekstremów klimatycznych [31] rozwinięto teoretyczny opis zagadnienia detekcji zmian. Przedstawiono tam też wcześniej uzyskane wyniki dotyczące detekcji zmian w przepływach ekstremalnych.

W pracy [20], wspólnej z W. Narkiewiczem uzyskano opis struktury i asymptotykę funkcji liczącej zbioru $C(a, q)$ liczb naturalnych nie posiadających nietrywialnych (różnych od 1) dzielników w postępie arytmetycznym a mod q. Wcześniej, w szczególnym przypadku, kiedy q jest liczbą pierwszą, zbiór ten rozważali W. Banks, J. Friedlander i F. Luca [36].

W pracy [21], której współautorami są S. Hochrainer-Stigler i N. Lugeri, metodę splotu hybrydowego rozwinięto i zastosowano do oceny ryzyka powodziowego na dużych obszarach. Metoda ta pozwala na modelowanie ryzyka strat powodziowych na dużych obszarach w sytuacji, gdy dostępna jest jedynie informacja o ryzyku lokalnym, w formie funkcji prawdopodobieństwa lokalnych strat powodziowych. Prosta agregacja splotowa, przy (nieuprawnionym) założeniu o niezależności pomiędzy lokalnymi stratami powodziowymi, prowadzi do niedoszacowania ekstremów dla strat regionalnych. Z kolei agregacja przez sumowanie kwantyli, odpowiadająca założeniu o jednomonotoniczności strat lokalnych, powoduje przeszacowanie ekstremów regionalnych (tak jakby lokalne, nawet małe powodzie, występowały zawsze jednocześnie w całym regionie). Agregacja hybrydowa w klastrach opiera się na założeniu, wyrażonym w sposób ilościowy, że powodzie o większej intensywności obejmują większe obszary. Idea ta może być stosowana także do innych procesów przestrzenno-czasowych.

Habilitant jest też:

- współredaktorem oraz autorem lub współautorem kilku rozdziałów w polskojęzycznej monografii [32] nt. detekcji zmian,
- członkiem zespołu autorów monografii [35] dotyczącej zmian klimatu w zlewni Bałtyku,
- członkiem zespołu autorów rozdziału książki [34] zawierającej niektóre wyniki badań przeprowadzonych w projekcie unijnym ADAM, w szczególności w przedstawionych w pracy [17],
- autorem publikowanej recenzji [33].

Spis publikacji własnych nie wchodzących w skład osiągnięcia, o którym mowa w pkt. 4.

Publikacje wymienione w Załączniku 3 w punkcie II A (w czasopismach z bazy JCR):

[5] M. Radziejewski, Z. W. Kundzewicz, *Fractal analysis of flow of the river Warta*, J. Hydrol. **200** (1997), 280–294.

[6] M. Radziejewski, A. Bardossy, Z. W. Kundzewicz, *Detection of change in river flow using phase randomization*, Hydrol. Sci. J. **45** (2000), no. 4, 547–558.

[7] M. Radziejewski, Z. W. Kundzewicz, *Detectability of changes in hydrological records*, Hydrol. Sci. J. **49** (2004), no. 1, 39–51.

[8] Z. W. Kundzewicz, D. Graczyk, T. Maurer, I. Pińskwar, M. Radziejewski, C. Svensson, M. Szwed, *Trend detection in river flow series: 1. Annual maximum flow*, Hydrol. Sci. J. **50** (2005), no. 5, 797–810.

[9] Z. W. Kundzewicz, U. Ulbrich, T. Brucher, D. Graczyk, A. Kruger, G. Leckebusch, L. Menzel, I. Pińskwar, M. Radziejewski, M. Szwed, *Summer floods in central Europe — Climate change track?*, Nat. Hazards **36** (2005), no. 1-2, 165–189.

[10] M. Radziejewski, *On the distribution of algebraic numbers with prescribed factorization properties*, Acta Arith. **116** (2005), no. 2, 153–171.

[11] M. Radziejewski, *Oscillations of error terms associated with certain arithmetical functions*, Monatsh. Math. **144** (2005), no. 2, 113–130.

[12] L. Barring, T. Holt, M.-L. Linderson, M. Radziejewski, M. Moriondo, J. P. Palutikof, *Defining dry/wet spells for point observations, observed area averages, and regional climate model gridboxes in Europe*, Clim. Res. **31** (2006), no. 1, 35–49.

[13] Z. W. Kundzewicz, M. Radziejewski, I. Pińskwar, *Precipitation extremes in the changing climate of Europe*, Clim. Res. **31** (2006), no. 1, 51–58.

[14] C. E. Hanson, J. P. Palutikof, M. T. J. Livermore, L. Barring, M. Bindi, J. Corte-Real, R. Durao, C. Giannakopoulos, P. Good, T. Holt, Z. W. Kundzewicz, G. C. Leckebusch, M. Moriondo, M. Radziejewski, J. Santos, P. Schlyter, M. Schwarb, I. Stjernquist, U. Ulbrich, *Modelling the impact of climate extremes: an overview of the MICE project*, Clim. Change **81** (2007), 163–177.

[15] M. Radziejewski, *Independence of Hecke zeta functions of finite order over normal fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 5, 2383–2394.

[16] M. Radziejewski, W. A. Schmid, *Weakly half-factorial sets in finite abelian groups*, Forum Math. **19** (2007), no. 4, 727–747.

[17] N. Lugeri, Z. W. Kundzewicz, E. Genovese, S. Hochrainer, M. Radziejewski, *River flood risk and adaptation in Europe—assessment of the present status*, Mitig. Adapt. Strateg. Glob. Chang. **15** (2010), no. 7, 621–639.

[18] M. Moriondo, M. Bindi, Z. W. Kundzewicz, M. Szwed, A. Chorynski, P. Matczak, M. Radziejewski, D. McEvoy, A. Wreford, *Impact and adaptation opportunities for European agriculture in response to climatic change and variability*, Mitig. Adapt. Strateg. Glob. Chang. **15** (2010), no. 7, 657–679.

[19] M. Szwed, G. Karg, I. Pińskwar, M. Radziejewski, D. Graczyk, A. Kedziora, Z. W. Kundzewicz, *Climate change and its effect on agriculture, water resources and human health sectors in Poland*, Nat. Hazards Earth Syst. Sci. **10** (2010), no. 8, 1725–1737.

[20] W. Narkiewicz, M. Radziejewski, *Integers without divisors in a given progression*, Monatsh. Math. **164** (2011), no. 1, 75–85.

[21] S. Hochrainer-Stigler, N. Lugeri, M. Radziejewski, *Up-scaling of impact dependent loss distributions: a hybrid convolution approach for flood risk in Europe*, Nat. Hazards **70** (2014), no. 2, 1437–1451.

Publikacje wymienione w Załączniku 3 w punkcie II C (monografie, artykuły w czasopismach spoza JCR):

[22] M. Radziejewski, *A note on certain semigroups of algebraic numbers*, Colloq. Math. **90** (2001), no. 1, 51–58.

[23] Z. W. Kundzewicz, L. Barring, C. Giannakopoulos, D. Graczyk, G. Leckebusch, J. Palutikof, I. Pińskwar, M. Radziejewski, M. Schwarb, M. Szwed, U. Ulbrich, *Changes in extremes occurrence – Part I. Climatic background*, Papers on Global Change IGBP **11** (2004), 9–20.

[24] Z. W. Kundzewicz, L. Barring, C. Giannakopoulos, D. Graczyk, G. Leckebusch, J. Palutikof, I. Pińskwar, M. Radziejewski, M. Schwarb, M. Szwed, U. Ulbrich, *Changes in extremes occurrence – Part II. Impacts on selected sectors*, Papers on Global Change IGBP **11** (2004), 21–32.

[25] I. Pińskwar, M. Radziejewski, Z. W. Kundzewicz, *Dry and warm spells in Europe – climate model projections*, Papers on Global Change IGBP **11** (2004), 33–42.

[26] M. Radziejewski, *On the zeros of functions from the extended Selberg class of degree* 0, Funct. Approx. Comment. Math. **33** (2005), 97–100.

[27] M. Radziejewski, W. A. Schmid, *On the asymptotic behavior of some counting functions*, Colloq. Math. **102** (2005), no. 2, 181–195.

[28] Z. W. Kundzewicz, M. Radziejewski, *Methodologies for trend detection*, 5th FRIEND World Conference, Climate Variability and Change - Hydrological Impacts, Havana, CUBA (S. Demuth, A. Gustard, E. Planos, F. Scatena, E. Servat, eds.), vol. 308, IAHS Publication, 2006, pp. 538–549.

[29] Z. Kundzewicz, R. Mańczak, I. Pińskwar, M. Radziejewski, *Models of impacts of hydrometeorological extremes*, Geographia Polonica **80** (2007), no. 2, 165–179.

[30] Z. Kundzewicz, M. Szwed, I. Pińskwar, M. Radziejewski, *Global change and extreme hydrological events*, Papers on Global Change IGBP **14** (2007), 79–93.

[31] M. Radziejewski, *About trend detection in river floods*, In Extremis (J. Kropp, H.-J. Schellnhuber, eds.), Springer, 2011, pp. 144–165.

[32] Z. W. Kundzewicz, M. Radziejewski (eds.), *Detekcja zmian klimatu i procesów hydrologicznych*, Sorus, Poznań, 2002 (Polish).

Publikacje wymienione w Załączniku 3 w punkcie II D (opracowania zbiorowe i inne):

[33] M. Radziejewski, *Review of "Distributed hydrologic modeling using GIS" by Baxter E. Vieux*, Hydrol. Sci. J. **47** (2002), no. 6, 995–996.

[34] M. Hulme, H. Neufeldt (eds.), *Making climate change work for us: European perspectives on adaptation and mitigation strategies (the adaptation and mitigation strategies: supporting European climate policy)*, Cambridge University Press, 2010.

[35] The BACC Author Team, *Assessment of climate change for the Baltic Sea basin: Regional climate studies*, Springer, 2008.

Spis cytowanych powyżej prac innych autorów.

[36] W. Banks, J. Friedlander, F. Luca, *Integers without divisors from a fixed arithmetic progression*, Forum Math. **20** (2008), 1005–1037.

[37] E. Fogels, *Zur Arithmetik quadratischer Zahlenkörper*, Univ. Riga. Wiss. Abh. Kl. Math. Abt. **1** (1943), 23–47.

[38] A. Geroldinger, F. Halter-Koch, *Non-unique factorizations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[39] J. Kaczorowski, *Some remarks on factorization in algebraic number fields*, Acta Arith. **43** (1983), no. 1, 53–68.

[40] J. Kaczorowski, *On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula. I*, Acta Arith. **44** (1984), no. 4, 365–377.

[41] J. Kaczorowski, *On the distribution of irreducible algebraic integers*, Monatsh. Math. **156** (2009), no. 1, 47–71.

[42] J. Kaczorowski, A. Perelli, *Functional independence of the singularities of a class of Dirichlet series*, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 2, 289–303.

[43] J. Kaczorowski, A. Perelli, *Factorization in the extended Selberg class*, Funct. Approx. Comment. Math. **31** (2003), 109–117.

[44] J. Kaczorowski, J. Pintz, *Oscillatory properties of arithmetical functions. II*, Acta Math. Hungar. **49** (1987), no. 3-4, 441–453.

[45] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. I*, Acta Mathematica Hungarica **13** (1962), 299–314.

[46] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. II*, Acta Mathematica Hungarica **13** (1962), 315–342.

[47] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. III*, Acta Mathematica Hungarica **13** (1962), 343–364.

[48] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. IV*, Acta Mathematica Hungarica **14** (1963), 31–42.

[49] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. V*, Acta Mathematica Hungarica **14** (1963), 43–63.

[50] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. VI*, Acta Mathematica Hungarica **14** (1963), 65–78.

[51] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory. VII*, Acta Mathematica Hungarica **14** (1963), 241–250.

[52] E. Landau, *Über einen Satz von Tschebyschef*, Mathematische Annalen **61** (1906), 527–550.

[53] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers.*, C. R. Acad. Sci., Paris **158** (1914), 1869–1872 (French).

[54] W. Narkiewicz, *On algebraic number fields with non-unique factorization*, Colloq. Math. **12** (1964), 59–68.

[55] W. Narkiewicz, *On algebraic number fields with non-unique factorization. II*, Colloq. Math. **15** (1966), 49–58.

[56] W. Narkiewicz, *Numbers with unique factorization in an algebraic number field*, Acta Arith. **21** (1972), 313–322.

[57] W. Narkiewicz, *Finite abelian groups and factorization problems*, Colloq. Math. **42** (1979), 319–330.

[58] W. Narkiewicz, *Numbers with all factorizations of the same length in a quadratic number field*, Colloq. Math. **45** (1981), no. 1, 71–74 (1982).

[59] W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, third ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[60] J. Śliwa, *Factorizations of distinct lengths in algebraic number fields*, Acta Arith. **31** (1976), no. 4, 399–417.

[61] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Maciej Radziejewski