prof. dr hab. Daniel Simson
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Toruń, 15 maja 2018 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Adama Burchadta

pt. „Structure constants of Jack characters"
Stałe strukturalne charakterów Jacka

dla Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu
im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Przedmiotem recenzowanej rozprawy doktorskiej mgra Adama Burchadta pt. „Structure constants of Jack characters" o objętości 96 stron (napisanej w języku angielskim) są trudne problemy kombinatoryczne z pogranicza kombinatoryki algebraicznej, kombinatoryki enumeratywnej, teorii reprezentacji grup i kolorowania (multi)grafów, z zastosowaniem idei probabilistycznych (w tym adaptacja pojęcia kumulanty). Badania te związane są ściśle ze znaną hipotezą o skojarzeniach Jacka sformułowanej ponad 20 lat temu i otwartą do dziś.

Głównymi obiektami badań autora są:

• zdefiniowana przez Gouldena i Jacksona (Trans. AMS 1996) rodzina współczynników $(c^{\lambda}_{\mu,\sigma})$ (wielomiany zmiennej $\beta := \alpha - 1$ z nieujemnymi współczynnikami całkowitymi, tzn. $c^{\lambda}_{\mu,\sigma} = c^{\lambda}_{\mu,\sigma}(\beta) \in \mathbb{Z}[\beta]$, nazywane w literaturze „connection coefficients") i indeksowana trójkami partycji, a w szczególności stowarzyszona z symetrycznymi wielomianami Jacka $J^{(\alpha)}_{\pi}$ względem parametru α indeksowanych całkowitymi partycjami π;

• zwarte formuły opisujące współczynniki $c^{\lambda}_{\mu,\sigma}$ oraz kombinatoryka związana ze skojarzeniami.

• stałe strukturalne $g^{\mu}_{\pi,\sigma}$ charakterów Jacka.

• współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej $\beta := \alpha - 1$ w każdym z wielomianów $c^{\lambda}_{\mu,\sigma} = c^{\lambda}_{\mu,\sigma}(\beta) \in \mathbb{Z}[\beta]$ oraz współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej $\delta = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ w każdym z wielomianów $g^{\mu}_{\pi,\sigma} = g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \in \mathbb{Q}[\delta]$.

***

Tematyka rozprawy jest aktualna, żywa i leży blisko głównych nurtów badań światowych tej ważnej teorii. W rozprawie podaje się pełne (lub częściowe) rozwiązania kilku trudnych problemów otwartych sformułowanych m.in. w artykułach Dołęga-Feray, *Duke Math. J.* 2016, Dołęga-Feray-Śniady, *Sem. Lothar. Combin.* 2013, Śniady [Śn16], 2016, Dołęga-Feray, *Trans. AMS* 2017 i bardzo precyzyjnie opisanych w rozdziale 1, na stronach 5-14, a także w preambułach do poszczególnych jej rozdziałów.

Doktorant bardzo szczegółowo i głęboko analizuje te problemy, a co najważniejsze podaje ich satysfakcjonujące rozwiązania poprzedzone dojrzałymi komentarzami i uwagami o ich genezie, motywacją ich badania, a także przeglądem wcześniejszych wyników z tego obszaru badań uzyskanych przez innych autorów.

Wspomniane komentarze i uwagi świadczą o bardzo dobrej i operatywnej znajomości tej trudnej teorii, a także stosowanych w niej różnorodnych metod i technik badawczych, w tym obszernego aparatu kombinatoryki algebraicznej, geometrii, teorii reprezentacji grup oraz zastosowań funkcji symetrycznych, wielomianów Schura, wielomianów Macdonalda i wielomianów Halla.

Bardzo ładnie napisane początkowe rozdziały rozprawy oraz obszerne preambyły do pozostałych rozdziałów mogą być wykorzystane jako znakomite wprowadzenie do tej trudnej teorii i stosowanych w niej metod. Stanowią one dużą dodatkową wartość rozprawy, poza wartościami przedstawionych w niej wyników badań autora.

***

Za główne osiągnięcia rozprawy doktorskiej mgra Adama Burchadta uważam następujące wyniki.

1. Twierdzenie 2.5 na stronie 21 zawierające warunek konieczny i wystarczający na partycje λ, μ, σ zapewniający osiąganie przez stopień wielomianu $c^{\lambda}_{\mu,\sigma} = c^{\lambda}_{\mu,\sigma}(\beta) \in \mathbb{Z}[\beta]$ zmiennej $\beta := \alpha - 1$ ograniczenia górnego

$$d(\mu, \sigma, \lambda) := (|\mu| - \ell(\mu)) + (|\sigma| - \ell(\sigma)) - (|\lambda| - \ell(\lambda))$$

podanego w artykule Dołęga-Feray, *Duke Math. J.* 2016 oraz na stronie 17 rozprawy.

2. Podanie dwóch jawnych formuł na postać współczynnika przy najwyższej potędze wielomianu $c^{\lambda}_{\mu,\sigma} = c^{\lambda}_{\mu,\sigma}(\beta) \in \mathbb{Z}[\beta]$ zmiennej $\beta := \alpha - 1$, w sytuacji, gdy partycje λ, μ, σ są takie jak w twierdzeniu 2.5.

   Na szczególną uwagę zasługuje dowód istnienia statystyki $\mathrm{stat}_\eta : \mathcal{G}^{\lambda,\lambda}_{\mu,\sigma} \to \mathbb{N}_0$ spełniającej odpowiednie warunki przedstawione w twierdzeniu 2.5 na str. 21 rozprawy.

3. Interpretacje elementów δ zbioru $\mathcal{G}^{\lambda,\lambda}_{\mu,\sigma}$ w terminach oznakowanych kolekcji odwzorowań M_δ, a także problem mierzenia nie-orientowalności i nie-dwupodzielności przedstawione w rozdziale 2.2 rozprawy na stronach 21-36 w powiązaniu z wynikami pracy Dołęga [Doł17c] i jego hipotezy znanej pod nazwą b-Conjecture. Wysoko cenię przedstawione tu pomysły doktoranta istotnie wyjaśniające wyniki pracy [Doł17c], co potwierdzają konstruktywne wnioski zawarte w Appendix A na stronach 88-90 pokazujące m.in. związek wyników uzyskanych w twierdzeniu 2.5 z wynikami uzyskanymi w pracy Dołęgi [Doł17c].

4. Śliczne wyniki rozdziału 3 o „sytuacji dualnej", tzn. dotyczącej znormalizowanych charakterów Jacka Ch_π (w sensie Dołęga-Feray, *Duke Math. J.* 2016) omówionych dokładnie na stronach 37-39 rozprawy. Są to wyniki dotyczące tzw. stałych strukturalnych $g^{\mu}_{\pi,\sigma} = g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \in \mathbb{Q}[\delta]$ charakterów Jacka Ch_π występujących w następującej formule

$$\mathrm{Ch}_\pi \cdot \mathrm{Ch}_\sigma = \sum_{\mu} g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \cdot \mathrm{Ch}_\mu$$

   opisującej produkt $\mathrm{Ch}_\pi \cdot \mathrm{Ch}_\sigma$ dwóch charakterów Jacka w bazie charakterów Jacka, gdzie $\delta = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, zobacz również Conjecture 0.1 w artykule Śniady [Śn16].

   Wysoko cenię główny wynik rozdziału 3 (i jego dowód), tzn. Theorem 3.3 na stronie 42 (analogiczne do Theorem 2.5), a także bardzo ważne wnioski zawarte w Corollary 3.5 na stronie 43.

   W Theorem 3.3 autor podaje warunek konieczny i wystarczający na partycje π, μ, σ zapewniający osiąganie przez stopień wielomianu $g^{\mu}_{\pi,\sigma} = g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \in \mathbb{Q}[\delta]$ zmiennej $\delta = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ograniczenia górnego $d(\pi, \sigma, \mu)$. Autor udowodnił ponadto, że dla takich partycji współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \in \mathbb{Q}[\delta]$ zmiennej δ jest liczbą całkowitą o ślicznej postaci przedstawionej na stronie 42 rozprawy.

   Bardzo złożony elegancki dowód Theorem 3.3 i Corollary 3.5 podany na stronach 45-56 świadczy o dużej klasie doktoranta, jego pomysłowości, operatywności, głębokiej znajomości tej zaawansowanej teorii, o jego wysokiej kulturze matematycznej i dużym potencjale twórczym. Ten fragment rozprawy czytałem z wielką przyjemnością i podziwem dla umiejętności tak młodego badacza.

5. Opis związków pomiędzy twierdzeniem 3.3 oraz twierdzeniem 2.5 zawarty w podrozdziale 3.2.2 i wynikający z tego opisu bardzo pomysłowy dowód Theorem 2.5 podany na stronach 43-44 wykorzystujący omówione powyżej idee oraz wyniki podrozdziału 2.2, a w szczególności zastosowanie lematu 2.29.

6. Główne wyniki rozdziału 4; tzn. Theorem 4.6 oraz jego dowód; w szczególności formuła kumulantowa dla charakterów Jacka opisana w Theorem 4.22 oraz długi złożony dowód przedstawiony na stronach 71-87. Na szczególne wyróżnienie zasługują idee prowadzące do Propositions 4.9-4.10 na stronie 63 zastosowanych w dowodzie Theorem 4.6. Autor pokazuje również, że jego formuła kumulantowa jest odpowiednikiem formuły Leonova-Shiraeva z pracy [LS59] z 1959 roku.

   Zrozumienie tego długiego dowodu zmusiło mnie do wielkiego wysiłku ze względu na pewne luki w moim wykształceniu z tego obszaru badań. Te głębokie wyniki, leżące u ich podstaw idee i przedstawione dowody w rozdziale 4 oceniam równie wysoko jak rezultaty doktoranta omawiane wcześniej.

***

Recenzowana rozprawa doktorska mgra Adama Burchadta zawiera sformułowanie kilku ważnych i trudnych problemów naukowych; zawiera też eleganckie i satysfakcjonujące rozwiązania tych problemów. Poziom naukowy rozprawy jest wysokim poziomem światowym. Uzyskane wyniki są nowe, oryginalne i poprawne. Są to wyniki o wysokich walorach poznawczych stanowiące bardzo istotny i wartościowy wkład do rozwoju tej teorii.

Wypracowane w rozprawie metody dowodowe i konstrukcje prowadzące do rozwiązania sformułowanych problemów bardzo dobrze świadczą o dużej pomysłowości autora oraz o bardzo dobrej umiejętności rozwiązywania problemów naukowych, o dużym potencjale twórczym doktoranta, a także o bardzo dobrej znajomości obszernych i ważnych działów współczesnej kombinatoryki, geometrii, probabilistyki, teorii grafów oraz dziedzin pokrewnych.

Wyniki recenzowanej rozprawy są merytorycznie poprawne. Praca jest zredagowana z zastosowaniem standardowych oznaczeń, pojęć, cytowań prac innych badaczy i napisana jest z zachowaniem stylu i reguł stosowanych przy redagowaniu prac naukowych z matematyki. Dowody twierdzeń są poprawne i wystarczająco pełne.

Mimo faktu, że rozprawa napisana jest bardzo ładnie, to ze względu na obszerność tej tematyki i bogactwo stosowanych w niej niestandardowych metod badawczych pochodzących z różnych dziedzin matematyki, studiowanie jej nie jest łatwe i może sprawiać kłopoty nawet specjalistom z tej dziedziny.

***

Bardzo dobrze oceniam stronę literacką rozprawy doktorskiej mgra Adama Burchadta oraz stosowaną w niej terminologię. Nie mam żadnych istotnych uwag w tym zakresie, poza bardzo drobnymi poprawkami typu „zamiast $d(\pi,\sigma,\lambda)$ na stronie 42 winno być $d(\pi,\sigma,\mu)$".

Jedynym mankamentem rozprawy jaki dostrzegam jest brak w niej krótkiej notatki biograficznej doktoranta. Przy ocenie rozprawy chciałoby się wiedzieć m.in. kiedy doktorant się urodził, kiedy i gdzie ukończył studia wyższe, pod czyim kierunkiem i na jaki temat przygotował pracę magisterską, czy uczestniczył w jakimś szerszym projekcie badawczym (poza zamieszczoną na drugiej stronie tytułowej informacją o grancie badawczym NCN), czy uczestniczył w jakiejś specjalistycznej konferencji naukowej z referatem.

***

W mojej ocenie rozprawa doktorska mgra Adama Burchadta pt. „Structure constants of Jack characters" jest bardzo dobra, nosi znamiona „wybitnej" i **spełnia z dużym naddatkiem** odpowiednie wymagania ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym. Może być zatem podstawą do nadania jej autorowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki.

W związku z powyższym przedkładam Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu wniosek o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie mgra Adama Burchadta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

***

Przedkładam również Radzie Wydziału **wniosek o uznanie rozprawy doktorskiej mgra Adama Burchadta za wyróżniającą się**. Uzasadnienie jej wyróżnienia znajduje się w opiniach 1-6 omawiających główne osiągnięcia rozprawy. Ze względów czysto formalnych powtórzę je jeszcze raz.

Uzasadnienie

• Tematyka rozprawy jest aktualna, żywa i leży blisko głównych nurtów badań światowych tej ważnej teorii. W rozprawie podaje się pełne (lub częściowe) rozwiązania kilku trudnych problemów otwartych sformułowanych m.in. w artykułach Dołęga-Feray, *Duke Math. J.* 2016, Dołęga-Feray-Śniady, *Sem. Lothar. Combin.* 2013, Śniady [Śn16], 2016, Dołęga-Feray, *Trans. AMS* 2017 i bardzo precyzyjnie opisanych w rozdziale 1, na stronach 5-14, a także w preambułach do poszczególnych jej rozdziałów.

• Głębokie wyniki badań doktoranta zawarte: (i) w Theorem 2.5 na stronie 21, (ii) w Theorem 3.3 na stronie 42, (iii) bardzo ważne wnioski zawarte w Corollary 3.5 na stronie 43, (iv) w Theorem 4.6 (w szczególności formuła kumulantowa dla charakterów Jacka opisana w Theorem 4.22).

• Nowatorskie pomysły przedstawione w rozdziale 2.2 rozprawy na stronach 21-36 (w powiązaniu z wynikami pracy Dołęga [Doł17c] i jego hipotezy znanej pod nazwą b-Conjecture), w tym m.in. pomysły istotnie wyjaśniające wyniki pracy [Doł17c], co potwierdzją konstruktywne wnioski zawarte w Appendix A na stronach 88-90 pokazujące m.in. związek wyników uzyskanych w twierdzeniu 2.5 z wynikami uzyskanymi w pracy Dołęgi [Doł17c].

• Dowód faktu, że dla takich partycji jak w Theorem 3.3 współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $g^{\mu}_{\pi,\sigma}(\delta) \in \mathbb{Q}[\delta]$ zmiennej δ jest liczbą całkowitą o ślicznej postaci przedstawionej na stronie 42.

• Bardzo złożony elegancki dowód Theorem 3.3 oraz Corollary 3.5 podany na stronach 45-56 oraz pomysłowy, długi i złożony dowód Theorem 4.6 przedstawiony na stronach 71-87; w szczególności formuła kumulantowa dla charakterów Jacka opisana w Theorem 4.22.

Idee tych dowodów oraz przeprowadzone w nich rozumowania potwierdzają dużą klasę doktoranta. Świadczą również m.in. o jego pomysłowości, operatywności, głębokiej znajomości tej zaawansowanej teorii, o jego wysokiej kulturze matematycznej i dużym potencjale twórczym. Te fragmenty rozprawy czytałem z wyjątkową przyjemnością i podziwem dla umiejętności tak młodego badacza.

• Poziom naukowy rozprawy jest wysokim poziomem światowym. Uzyskane przez doktoranta rezultaty są nowe, oryginalne i poprawne. Są to wyniki o wysokich walorach poznawczych stanowiące bardzo istotny i wartościowy wkład do rozwoju tej teorii.

Daniel Simson

Daniel Simson