Zielona Góra, 28.05.2018

prof. dr hab. Janusz Matkowski

Recenzja pracy doktorskiej mgra Tadeusza Chawziuka pt.

Composition and Multiplication Operators between Distinct Orlicz Spaces

(Operatory kompozycji i mnożenia pomiędzy różnymi przestrzeniami Orlicza)

Praca poświęcona jest operatorowi kompozycji C_{T} generowanemu przez odwzorowanie T zbioru Ξ w zbiór Ω, przekształcającym przestrzeń liniową R^{Ξ} wszystkich funkcji $f:\Xi\rightarrow R$ w przestrzeń R^{Ω}, określonemu wzorem

$$C_{T}(f)=f\circ T, \qquad f\in R^{\Xi},$$

oraz operatorowi multiplikacji $M_{u}:R^{\Omega}\rightarrow R^{\Omega}$, mnożenia przez ustaloną funkcję $u\in R^{\Omega}$, określonemu wzorem

$$M_{u}(f)=u\cdot f, \qquad f\in R^{\Xi}.$$

Te liniowe operatory pojawiają się w naturalny sposób w wielu zagadnieniach teoretycznych i w licznych zastosowaniach. Poświęcono im wiele prac i monografii. W przypadku przestrzeni Lebesgue'a L^{p} oraz funkcji zespolonych spotykamy je w kontekście przestrzeni funkcji holomorficznych Bergmana i przestrzeni Hardy'ego. Znaczącą rolę odgrywają w teorii równań funkcyjnych typu iteracyjnego; najprostsze równanie liniowe tego typu angażuje złożenie obu tych operatorów.

W badania operatorów kompozycji działających z przestrzeni Orlicza w nią samą, rozpoczęte przez R. Kumara w roku 1997, włączyli się m. in. Profesorowie Henryk Chudzik i Lech Maligranda. Otrzymano szereg wyników dotyczących ciągłości i zwartości operatora kompozycji.

Operatory kompozycji i operatory multiplikacji, działające między niekoniecznie tymi samymi przestrzeniami Lesbesque'a, rozważali H. Takagi i K. Yakouchi w roku 1999. Badali oni ciągłość, domkniętość obrazu oraz skończony rząd takich operatorów.

W recenzowanej, ponad stustronicowej, rozprawie rozważa się operatory kompozycji i multiplikacji działające między dwoma przestrzeniami Orlicza. Składa się ona ze wstępu oraz pięciu rozdziałów o tytułach: 1. Preliminaria, 2 Continuity. The internal method; 3 Continuity, surjectivity. The external method; 4. Uniform absolute continuity and compactness. 5. Closed range, finite rank, and Fredholmness, oraz Bibliografii. Bada się w niej warunki gwarantujące ciągłość, domkniętość obrazu, skończoność rzędu, jednostajną absolutną ciągłość, zwartość surjektywność i fredholmowskość tych operatorów. Stosuje się przy tym dwie metody. Pierwsza, nazwana w pracy wewnętrzną ("internal"), korzysta jedynie z narzędzi, które daje teoria przestrzeni Orlicza. Zgodnie z komentarzem ze wstępu, ma one pewne słabe strony. Np., nie pozwala ona na uzyskanie warunków charakteryzujących w pełni ciągłości tych operatorów działających miedzy różnymi przestrzeniami Orlicza. Jej stosowanie prowadzi do pewnych trudności technicznych, oraz nie jest wygodna w badaniu ich zwartości oraz surjektywności dla różnych przestrzeni Orlicza. Jej korzystną stroną, w porównaniu z drugą jest fakt, że nie wymusza oddzielnego traktowania przestrzeni z miarą nie-atomową i atomową. Druga z metod, nazwana w pracy zewnętrzną ("external"), wykorzystująca twierdzenia Ishii oraz Shragina, polega na wyrażeniu ciągłości operatora kompozycji za pomocą inkluzji pomiędzy pewnymi przestrzeniami Musielaka-Orlicza, ogólniejszymi niż przestrzenie Orlicza. W bibliografii liczącej 46 pozycji, wymienione są dwie opublikowane, współautorskie, prace Doktoranta, dotyczące tej tematyki. Jednak w zdecydowanej większości, wyniki tej rozprawy są nowe.

W trakcie czytania nasunęły mi się następujące

Uwagi.

1. str. 1 linia 10 od dołu. "... Φ is continuous, non-decreasing on [0,b_{Φ}] ...". Byłoby lepiej napisać albo: że "... Φ is real continuous, non-decreasing on [0,b_{Φ}] ..." albo, że "... Φ is continuous, non-decreasing on $[0,\infty)$ ..."

2. str. 1 linie 7-6 od dołu. Tutaj b_{Φ} powinno być różne od ∞. Można by napisać np. "i.e. if b_{Φ}<∞ then lim_{x$\to$b_{Φ}$^-$}Φ(x)=Φ(b_{Φ})."

Przyjęcie $\Phi(\infty):=\infty$ skutkuje tym, że w przypadku gdy b_{Φ}<∞ i Φ(b_{Φ})<∞, funkcja Φ przestaje być wypukła w sensie geometrycznym: cięciwa łącząca punkty (b_{Φ},Φ(b_{Φ})) i $(\infty,\Phi(\infty))$ leży pod wykresem funkcji Φ.

3. str. 2. Definicja 1.6: "Δ'-condition at ∞" jest równoważny submultiplikatywności funkcji $c\Phi$ w przedziale (x_0,∞). Czy zatem nie dałoby sie uprościć tej definicji poprzez rezygnację ze stałej c?
(Podobnie "∇'-condition at ∞" jest równoważny supermultiplikatywności odpowiedniej funkcji.)

4. str. 3. Brakuje definicji symboli "$\nless$" oraz "$\nless$", które pojawiają się w Lemacie 1.1. Czytelnik może domyśleć się ich znaczenia z dowodu lematu.

5. str. 3. W drugiej linii dowodu Lematu 1.1 jest "since Φ^{-1} is subadditive as a concave function". Już tutaj trzeba się tutaj powołać na to, że Φ^{-1} jest rosnącą z dwoch przyczyn: najpierw aby z nierówności $\Phi(\Psi^{-1}(x)\Gamma^{-1}(x))\leq 2x$ dostać $\Psi^{-1}(x)\Gamma^{-1}(x)\leq\Phi^{-1}(2x)$, a następnie, aby uzasadnić subaddytywność funkcji Φ^{-1}. (Funkcja odwrotna do funkcji wypukłej i malejącej jest funkcją wypukłą.)

6. str. 3. linia 9 od dołu na końcu zdania brakuje "for all $x \geq x_0$."

7. str. 3. Ponieważ w Lemacie 1.1 funkcje Ψ i Γ pełnią rolę symetryczną, w drugiej linii Uwagi 1.1 można by napisać np.: "..., it is enough to assume that Φ and Ψ are Young functions and Γ is invertible on R_+".

8. str. 4. W akapicie rozpoczynającym się od "Occasionally..." należałoby coś założyć o funkcji Γ, aby zagwarantować całkowalność funkcji $\Gamma \circ (\lambda f)$.

9. Dlaczego w definicji operatora kompozycji przyjmuje się nieujemność funkcji generującej ten operator? W Twierdzeniu 2.1 (O'Neila) $u \in L^{\Gamma}(\Omega)$.

10. Mam wrażenie, że w samych definicjach operatorów multiplikacji i kompozycji można zrezygnować z założeń regularnościowych, a poźniej zauważyć ich liniowość.

11. Dla ustalonej funkcji dwóch zmiennych $h:\Omega \times R \to R$ określmy operator $H:R^{\Omega} \to R^{\Omega}$ wzorem

$$H(f)=h \circ (id|_{\Omega},f), \qquad f \in R^{\Omega}.$$

H jest operatorem Niemyckiego, zwanym także operatorem "kompozycji" lub superpozycji. Łatwo udowodnić, że H jest liniowy wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taka funkcja $u \in R^{\Omega}$, że

$$H=M_{u}.$$

Zatem operator multiplikacji M_{u} jest także operatorem złożenia, który generuje funkcja $h(x,y)=u(x)y$.

12. str. 8 linia 11. Czy nie powinno tutaj być "$\psi(\omega,x):=\Psi(x)h(\omega)$ for . ."?

13. str. 8, ostatni akapit. W Twierdzeniach 5.1 oraz 5.2 pojawiają się jednak przestrzenie z miarą, które nie spełniają tego założenia.

14. str. 10. Example 2.1 napisany jest zbyt pośpiesznie. Korzysta się tutaj z Twierdzenia 2.1, w którym pojawiają się m.in. funkcje Ψ, Γ oraz stała c. W przykładzie ilustrującym to twierdzenie obiektów tych nie ma. Ponadto stwierdzenie "... composition of convex functions is convex" nie jest prawdziwe (funkcje $f,g:(0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x)=1+(1/x)$, $g(x)=(1/x)$, są malejące i wypukłe, lecz ich złożenie $(g \circ f)(x)=(x/(x+1))$ jest funkcją wklęsłą w $(0,\infty)$). Prawdziwe jest stwierdzenie: jeśli f jest wypukła oraz g jest rosnąca i wypukła to $g \circ f$ jest wypukła.

W części (ii) używa się litery λ w innym znaczeniu niż w Preliminariach.

15. str. 12 linia 3: "acts" zamiast "act".

16. str. 49. W Twierdzeniu 3.26 brakuje odpowiedniego komentarza dotyczącego funkcji "g".

17. str. 63. Brakuje określenia klasy Musielaka-Orlicza $L^{\phi,*}(\Omega)$. (Jest określenie klasy Orlicza.)

18. Czy zapis "a sequence (f_{n})_{n=1}^{∞} ⊂L^{Φ}(Ω)" (str. 89) jest formalnie poprawny?

19. W dowodzie Twierdzenia 5.5 korzysta się z Twierdzenia 3.26, w którym zakłada się bezatomowość miary. Przydałby się tutaj jakiś komentarz.

20. Funkcja „g z wężykiem" w dowodzie Twierdzenia 5.5 nie została zdefniowana.

Te drobne uwagi, mają głównie charakter redakcyjny. W szczególności uwaga 11 pokazuje, że rozważanie jednoczesne operatorów kompozycji i multiplikacji nie jest przypadkowe.

Otrzymane w pracy rezultaty są wartościowe. Ich uzyskanie wymagało od Doktoranta opanowania zaawansowanego warsztatu opartego na teorii przestrzeni Orlicza i Musielaka-Orlicza.

Jestem przekonany, że warunki ciągłości oraz zwartości rozważanych operatorów zainteresują specjalistów zajmujących się teorią i zastosowaniami równań funkcyjnych typu iteracyjnego. Rozpatrywanie w tej pracy operatorów działających między różnymi przestrzeniami Orlicza może mieć tutaj szczególną wartość. Uzyskane twierdzenia pozwalają np. rozpatrywać sytuację gdy operator mutiplikacji i operator kompozycji działają między różnymi przestrzeniami Orlicza, a ich złożenie działa z tej samej przestrzeni Orlicza w siebie, co umożliwia stosowanie teorii punktów stałych.

Reasumując stwierdzam, że rozprawa ta wypełnia wszystkie wymagania Ustawy o stopniach i tytule naukowym i wnoszę o dopuszczenie pana **mgra Tadeusza Chawziuka** do dalszych etapów przewodu doktorskiego.