Kraków 20.09.2018

dr hab. Andrzej Żak
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. St. Staszica w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej Elizy Jackowskiej-Boryc

Tematyka rozprawy doktorskiej Elizy Jackowskiej-Boryc dotyczy dwóch fundamentalnych zagadnień matematyki dyskretnej a mianowicie teorii Ramseya i teorii Turána. Pierwsza z nich zapoczątkowana została w roku 1928. W specjalnym przypadku teorii grafów mówi ona o tym, że w każdym kolorowaniu krawędzi odpowiednio dużego grafu pełnego K_n za pomocą wcześniej zadanej liczby kolorów zawsze można znaleźć monochromatyczną klikę H o zadanym rzędzie. Głównym problemem tej teorii jest właśnie odpowiedzenie na pytanie kiedy n (czyli rząd kolorowanego grafu pełnego) jest już wystarczająco duże – minimalne takie n (dzięki Ramseyowi wiadomo, że istnieje) jest oznaczane przez $R(H;r)$, gdzie r oznacza liczbę używanych kolorów. Z kolei teoria Turána została zapoczątkowana w roku 1941, w którym to węgierski matematyk wyznaczył maksymalną liczbę krawędzi w grafie n-wierzchołkowym nie zawierającym jako podgrafu kliki H. Liczbę tę oznacza się przez $\mathrm{ex}(n;H)$. Oba problemy zostały wkrótce uogólnione na inne struktury H zarówno w grafach jak i k-grafach (czyli k-jednolitych hipergrafach) i od tej pory są niezmiennie intensywnie badane. Szczególnie interesujące stały się, oprócz klik, cykle i ścieżki. Tematyka rozprawy jest zatem ważna i plasuje się w głównym nurcie teorii grafów.

W rozdziale 1 rozprawy Doktorantka wprowadza czytelnika w tematykę oraz stosowane metody. Następnie w rozdziale 2 podaje podstawowe definicje oraz szerzej prezentuje tło historyczne oraz najważniejsze, w kontekście tematyki rozprawy, wyniki osiągnięte do tej pory przez innych naukowców.

W dalszej części rozdziału 2 Doktorantka prezentuje własne oryginalne wyniki osiągnięte samodzielnie lub też we współpracy z innymi naukowcami. Wyniki te można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy liczby Ramseya dla luźnej 3-ścieżki długości 3 (czyli 3-grafu $P = P_3^{3,1} = \{abc, cde, efg\}$). W przypadku 2 kolorów, problem właściwie był wcześniej rozwiązany w całej ogólności. Dokładne wyniki osiągnięto dla 2-ścieżek (czyli przypadek zwykłych grafów) jak i dla luźnych 3-ścieżek dowolnej długości. Ponadto dla $k \geq 4$, znana jest asymptotyka dla wartości liczb Ramseya przy długości k-ścieżki zmierzającej do nieskończoności. W przypadku większej liczby kolorów istnieje wiele wyników dla 2-ścieżek, których jednak Doktorantka nie przytacza. Oprócz tego znana jest asymptotyka dla 3-ścieżki długości 2 przy liczbie kolorów dążącej do nieskończoności, jak i dokładna wartość dla nieskończenie wielu przypadków. Najmniejszym niezbadanym przypadkiem była więc $R(P;3)$, czyli 3-kolorowa liczba Ramseya dla 3-ścieżki długości 3. Doktorantka dowodzi (twierdzenie 2.1), że $R(P;3) = 9$, a następnie (twierdzenie 2.2), że $R(P;r) = r + 6$ dla $r \leq 7$. Na pierwszy rzut oka wynik ten może wyglądać nieco skromnie np. w porównaniu z wynikami dla P_2^3 lub też pewnej 3-ścieżki $P_3^{3,2}$ również długości 3, ale nieco innego rodzaju, gdzie odpowiednie liczby Ramseya są wyznaczone asymptotycznie przy $r \to \infty$. Jednak P ma dwa wierzchołki więcej niż przytoczone 3-grafy co w problemach Ramseya zwykle powoduje typowy skokowy wzrost trudności. Przykładowo dla k-grafów pełnych, $k \geq 3$, znana jest tylko jedna wartość $R(K_4^3;2) = 13$ (zresztą niewiele lepiej jest i dla 2-grafów)! Uważam zatem, że uzyskane w tej części rozprawy wyniki to solidny i istotny wkład Doktorantki do tej teorii. Potwierdza to również ranga czasopisma, w którym się one ukazały (Electronic Journal of Combinatorics).

Niemniej ciekawe są metody zastosowane przez Doktorantkę. Jako narzędzia do uzyskania oszacowań dla liczb Ramseya użyła ona liczb Turána. Przy ograniczonej liczbie kolorów oraz wystarczająco dużym rzędzie kolorowanego k-grafu, zawsze znajdzie się duża liczba krawędzi w jednym kolorze. Dzięki odpowiednio dobranym parametrom, liczba ta jest większa od liczby Turána dla zadanego H. Otrzymujemy w ten sposób natychmiast monochromatyczną kopię H. Jest to powszechnie stosowana technika. Doktorantka też idzie tą drogą, jednak aby uzyskać lepsze oszacowania (a w konsekwencji dokładne wyniki) wprowadza pojęcie liczb Turána wyższych rzędów: liczba Turána s-tego rzędu to największa możliwa liczba krawędzi w k-grafie nie zawierającym H, gdzie maksimum jest brane tylko po takich k-grafach, które nie są podgrafami żadnego grafu ekstremalnego odpowiadającemu liczbie Turána rzędu niższego niż s. Pewnym mankamentem jest tylko brak komentarza co do zasięgu zastosowanych metod i dalszych perspektyw. Przykładowo pokazano ograniczenie $R(P;r) \leq 3r$ wykorzystując znajomość 3-grafów ekstremalnych. Nie podjęto natomiast próby jego poprawy dla $r \geq 8$ chociaż dzięki twierdzeniu 2.9 znane są również 3-grafy ekstremalne drugiego rzędu.

Chociaż liczby Turána wyższych rzędów zostały przez Doktorantkę wprowadzone jako narzędzie do rozwiązania problemu Ramseya, same w sobie są obiektem wartym badania. Zresztą jedna z nich była już badana, choć pod inną nazwą. Mianowicie Hilton i Milner w 1967 roku wyznaczyli maksymalną liczebność tzw. nietrywialnej rodziny przecinającej, co odpowiada liczbie Turána rzędu 2 dla k-grafu M_2^k, zaś zupełnie niedawno Han i Kohayakawa wyznaczyli liczbę Turána rzędu 3 dla M_2^k. Z kolei Polcyn i Ruciński podali liczby Turána wszystkich rzędów dla M_2^3. Wyniki dotyczące liczby Turána dla 3-ścieżki P stanowią drugą grupę rezultatów osiągniętych przez Doktorantkę. Choć istniały silne twierdzenia dla k-ścieżek, $k \geq 4$, dowolnej długości oraz dla 3-ścieżek długości co najmniej 4, przypadek 3-ścieżki długości 3 był jak dotąd pominięty. W rozprawie Doktorantka wypełnia tę lukę wyznaczając w twierdzeniu 2.7 dokładną wartość liczby Turána dla P wraz z kompletną listą 3-grafów ekstremalnych i to dla wszystkich wartości n (przytoczone w poprzednim zdaniu wyniki dotyczyły wystarczająco dużych wartości n). Co więcej w twierdzeniu 2.9 Doktorantka wyznacza dokładne wartości liczby Turána drugiego rzędu dla P i dowolnego n, oraz jak poprzednio znowu podaje pełną listę 3-grafów ekstremalnych.

Uważam, że i wyniki uzyskane w tej części rozprawy stanowią znaczący wkład Doktorantki do teorii Turána oraz są dobrze umotywowane. Ponownie potwierdza to ranga czasopisma, w którym się one ukazały (Electronic Journal of Combinatorics).

W dalszej części rozprawy Doktorantka dowodzi głównych twierdzeń, a także wielu pomocniczych faktów dotyczących pewnych modyfikacji i wariantów liczb Turána. Warto zaznaczyć, że fakty te zostały wykorzystane przez innych naukowców do poprawy ogólnego ograniczenia na $R(P;r)$. W dowodach nie znalazłem istotnych błędów, a wszystkie zauważone przeze mnie niedokładności, zostały już przez Doktorantkę poprawione. Wszystkie rozumowania są przedstawione w sposób drobiazgowy, jasny i nie pozostawiający wątpliwości co do ich poprawności. Dowody, chociaż elementarne, są złożone. Wymagają dużej biegłości w temacie oraz pełnej kontroli i odpowiedniego użycia bardzo wielu pomocniczych faktów.

Podsumowując, uważam, że Doktorantka uzyskała ważne i ciekawe wyniki dla problemów będących w głównym nurcie teorii grafów. Wyniki te zostały opublikowane w renomowanych czasopismach. Również zastosowane metody uważam za interesujące, pomysłowe i świadczące o dużej biegłości Doktorantki w przedstawionej tematyce. Zarówno metody jak i tematyka znalazły uznanie i są dalej rozwijane przez innych naukowców z UAM. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Elizy Jackowskiej-Boryc do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Andrzej Żak