

**Recenzja rozprawy doktorskiej  
mgr Katarzyny Mieczkowskiej  
pt. „Matchings in hypergraphs”**

Wyniki zawarte w rozprawie mgr Katarzyny Mieczkowskiej dotyczą następujących naturalnych pytań. Jaka jest maksymalna liczność rodziny podzbiorów  $k$ -elementowych zbioru  $n$ -elementowego, wśród których nie ma  $s+1$  zbiorów parami rozłącznych? Jak wyglądają rodziny podzbiorów  $k$ -elementowych, dla których to maksimum jest realizowane? Prawdopodobne odpowiedzi na te pytania są treścią jednej z najbardziej znanych hipotez postawionych przez Pála Erdősa w roku 1965. Warto wspomnieć, że nawet dla  $s = 1$  problem ten nie jest trywialny. Jego rozwiązanie jest treścią klasycznego wyniku ekstremalnej kombinatoryki – twierdzenia Erdősa-Ko-Rado. Odpowiedzi na powyższe pytania są także od dawna znane dla  $k = 2$ , tj. dla grafów. Dla  $k \geq 3$  problem ten był przez niemal 50 lat otwarty. Znanych było stosunkowo niewiele rezultatów dotyczących hipotezy Erdősa potwierdzających ją w pewnych szczególnych przypadkach. W ostatnich latach nastąpił przełom w badaniach nad tą hipotezą, który doprowadził do jej rozwiązania dla wielu nowych zakresów parametrów  $n$ ,  $k$  i  $s$ , w tym do kompletnego rozwiązania jej dla  $k = 3$ . Duży udział w tym przełomie miała autorka ocenianej rozprawy doktorskiej. Pewne znaczenie dla ponownego zainteresowania hipotezą Erdősa miało prawdopodobnie niedawne odkrycie powiązań tego problemu z innymi ważnymi problemami z zakresu kombinatoryki, teorii liczb, rachunku prawdopodobieństwa, czy teorii informacji.

Praca doktorska mgr Katarzyny Mieczkowskiej zawiera trzy główne wyniki. Najważniejszy, moim zdaniem, wynik to udowodnienie hipotezy Erdősa dla  $k = 3$  i dostatecznie dużych  $n$ . Najlepszy wcześniejszy rezultat w tym przypadku autorstwa Frankla, Röidla i Rucińskiego potwierdzał prawdziwość hipotezy Erdősa dla  $k = 3$  i  $n \geq 4s$ . Warto dodać, że w przypadku  $k = 3$  dla dowolnego  $n$  hipoteza Erdősa została ostatecznie całkowicie udowodniona w nieopublikowanej jeszcze pracy Frankla.

Drugi z najważniejszych wyników zawartych w rozprawie doktorskiej mgr Mieczkowskiej to potwierdzenie hipotezy Erdősa dla  $n \geq \frac{2k^2}{\log k} s$ . Sam Erdős w 1965 roku pokazał istnienie takiej funkcji  $g(k)$ , że jego hipoteza zachodzi dla  $n \geq g(k)s$ . Wynik uzyskany przez doktorantkę poprawia wcześniejszy najlepszy rezultat tego rodzaju, którego autorami są Huang, Loh oraz

Sudakov. Również i w tym przypadku wynik doktorantki został później poprawiony przez Frankla, który pokazał prawdziwość hipotezy Erdősa dla  $n \geq (2k - 1)s$ .

Trzeci wynik rozprawy wiąże się z wciąż jeszcze nie udowodnionym przypadkiem hipotezy Erdősa, gdy  $\frac{n}{2k-1} < s \leq \frac{n-k+1}{k}$ . W tym przypadku autorka zajmuje się tzw. asymptotyczną ułamkową wersją hipotezy Erdősa, o której wiadomo, że wynika z oryginalnej hipotezy Erdősa. Wersja ta jest ciekawa również z tego względu, że jest powiązana z pozornie odległą starą, ale wciąż otwartą hipotezą Samuelsa dotyczącą zachowania się sumy niezależnych zmiennych losowych. Wiadomo było, że hipoteza Samuelsa implikuje asymptotyczną ułamkową wersję hipotezy Erdősa w pewnym szczególnym przypadku. W rozprawie autorka proponuje pewną modyfikację hipotezy Samuelsa i pokazuje, że ta zmodyfikowana wersja jest równoważna asymptotycznej ułamkowej wersji hipotezy Erdősa. W ten sposób wszystkie częściowe wyniki dotyczące hipotezy Erdősa tłumaczą się na wyniki dotyczące zmodyfikowanej wersji hipotezy Samuelsa.

Pierwszy z omawianych wyników został opublikowany we współautorstwa pracy doktorantki i promotora w czasopiśmie *Journal of Combinatorial Theory, Seria A*, które jest czołowym periodykiem z zakresu kombinatoryki. Drugi rezultat ukazał się również w bardzo dobrym czasopiśmie *Electronic Journal of Combinatorics*, w publikacji której współautorem jest obok promotora Peter Frankl. Trzeci wynik nie został jeszcze opublikowany. Jak pisze autorka, został on uzyskany wspólnie z promotorem oraz Matasem Šileikisem.

Moim zdaniem jest to świetna rozprawa doktorska, którą przeczytałem z wielką przyjemnością. Uzyskane rezultaty są mocne. Dotyczą ważnej i bardzo dobrze znanej w środowisku matematyków zajmujących się kombinatoryką hipotezy, która pozostaje otwarta od niemal 50 lat. Wyniki zawarte w rozprawie są bardzo znaczącym fragmentem przełomu w badaniach dotyczących tej hipotezy, który dokonał się w ostatnich kilku latach.

Uzyskane rezultaty należą do głównego nurtu współczesnej kombinatoryki. Tematyką tą zajmowali się i zajmują nadal czołowi światowi kombinatorycy. Tym bardziej więc docenić należy tak znakomite wyniki mgr Mieczkowskiej zawarte w jej rozprawie doktorskiej.

Do sukcesu doktorantki przyczyniła bardzo dobra znajomość wcześniejszych wyników i metod dotyczących tematyki pracy oraz umiejętność wykorzystania tych wyników i twórczego rozwinięcia tych metod. Autorka doskonale opanowała posługiwanie się ważną w ekstremalnej kombinatoryce metodą przesunięć (ang. *shifting method*), która ma kluczowe znaczenie



w dowodach twierdzeń. Na uwagę zasługuje też przełomowe spostrzeżenie, że zamiast rozważać ekstremalne rodziny zbiorów, o których mowa w hipotezie Erdősa, wystarczy zajmować się ich "przybliżeniami". Te idee nie były jednak jeszcze wystarczające do udowodnienia najważniejszego wyniku pracy. Trzeba było również przewyciężyć pewne trudności techniczne polegające na żmudnym i wnikliwym rozważeniu pewnej liczby przypadków. Również z tą trudnością autorka umiała sobie doskonale poradzić.

Praca jest starannie napisana pod względem redakcyjnym. Niewielka liczba (drobnych) błędów powoduje, że czyta się ją bardzo dobrze.

Podsumowując uważam, że jest to bardzo dobra rozprawa doktorska spełniająca z nadwyżką wymagania zawarte w *Ustawie z dnia 18 marca 2011 r. o zmianie ustawy - Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki oraz zmianie niektórych innych ustaw*. Wnoszę więc z pełnym przekonaniem nie tylko o nadanie mgr Katarzynie Mieczkowskiej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych, ale również o wyróżnienie jej rozprawy doktorskiej.

8 maja 2014 r.



prof. dr hab. Zbigniew Lonc  
Wydział Matematyki i Nauk  
Informacyjnych  
Politechnika Warszawska