Warszawa, 30. 11. 2023 r.

dr hab. Krzysztof Przesławski
ul. Łukowska 2B/27
04-113 Warszawa
k.przeslawski@im.uz.zgora.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej Roberta Kolassy

Zastosowanie zbiorów wypukłych do minimalnej reprezentacji różnic funkcji wypukłych w sensie Zallgalera

Operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez nieujemne skalary możemy w sposób naturalny rozszerzyć na rodzinę wszystkich niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów rzeczywistej przestrzeni unormowanej. Takie dodawanie zbiorów jest czasami nazywane dodawaniem kompleksowym, a częściej dodawaniem Minkowskiego. Także metrykę, zadaną przez normę, możemy rozszerzyć na wspomnianą rodzinę w sposób wskazany przez Hausdorffa. Za punkt wyjścia przedstawionej rozprawy można uznać twierdzenie Rådströma, głoszące, że rodzinę tę można izometrycznie przekształcić na stożek leżący w specjalnie określonej przestrzeni unormowanej, nazywanej przestrzenią Rådströma, przy czym przekształcenie to jest izomorfizem algebraicznym. Przestrzeń Rådströma jest określana jako zbiór par uporządkowanych niepustych zbiorów zwartych i wypukłych, wydzielony przez odpowiednio zdefiniowaną relację równoważności. W związku z tym powstaje zagadnienie wyboru reprezentantów dla poszczególnych klas równoważności. Zagadnienie to ma pewne znaczenie praktyczne w tak zwanej analizie wielowartościowej. Pojawia sie także w zadaniach optymalizacji niegładkiej (rachunek quasi-różniczkowy Demianowa i Rubinowa). Najczęściej chodzi o to, by wybrane pary zbiorów (reprezentanci) miały jakieś szczególne własności; np. by zbiory tworzące parę były minimalne w sensie zawierania. Sporo wysiłku w zrozumienie tych zagadnień włożyli matematycy z Poznania i Karlsruhe –

nieżyjący już D. Pallaschke, R. Urbański, S. Scholtes oraz J. Grzybowski i inni.

Nieco odmienne podejście do zadania "wektoryzacji" rodziny niepustych zbiorów zwartych i wypukłych zaproponował Hörmander. Każdemu zbiorowi wspomnianej rodziny możemy przyporządkować tak zwaną funkcję podpierającą. Można wykazać, że przyporządkowanie jest różnowartościowe i zgodne z operacjami liniowymi. W ten sposób omawiana rodzina zostaje zanurzona w przestrzeń funkcyjną. Takie zanurzenie udaje się nie tylko dla przestrzeni unormowanych, ale także lokalnie wypukłych. Daje się ono także (podobnie jak zanurzenie Rådströma) rozszerzyć poza zbiory zwarte – w to miejsce można wstawić zbiory ograniczone i domknięte, wtedy jednak musimy nieco uogólnić operację dodawania Minkowskiego. Oba podejścia są obecne w recenzowanej rozprawie.

Powstaje naturalne pytanie, czy istnieją jakieś uogólnienia twierdzenia Rådströma jeśli nie zakładać ograniczoności rozpatrywanych zbiorów. Ogólnie rzecz biorąc, odpowiedź jest negatywna. Bierze się to stąd, że dodawanie zbiorów nieograniczonych nie podlega prawu skracania nawet w przypadku przestrzeni jednowymiarowej. Robinson zauważył, że sztuka się udaje, jeśli rozpatrzyć rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i wypukłych podzbiorów euklidesowej $\mathbb{R}^n$ mających wspólny stożek recesji. Właśnie takie rodziny stanowią najważniejszy przedmiot dociekań rozprawy.

Wstęp i rozdział pierwszy rozprawy zawierają zestaw raczej dobrze znanych informacji dotyczących omawianych zagadnień.

Rozdział drugi zaczyna się od przypomnienia własności zbiorów mających wspólny stożek recesji. W podrozdziale 2.2.2, poświęconym parom maksymalnym zbiorów o wspólnym stożku recesji, pojawia się najciekawsze moim zdaniem twierdzenie rozprawy nazwane, nie wiedzieć czemu, Faktem 2.2.3. Daje ono konstruktywny sposób wyznaczania par maksymalnych. Twierdzenie to pochodzi ze wspólnej pracy autora rozprawy i promotora. Jego dowód jest elementarny, ale wnioski dość zaskakują. Podrozdział 2.2.3 nie wydaje mi się równie interesujący. Rozptrywane jest w nim pewne zagadnienie dotyczące par maksymalnych w obrębie zbiorów zwartych. Nie rozumiem, dlaczego autor nie podjął próby rozpatrzenia stosownego zadania w klasie $C_V^2(\mathbb{R}^n)$?

W Rozdziale trzecim opisany został sposób powiązania minimalnego rozkładu Zalgallera z konstrukcją maksymalnych par zbiorów (podrozdział 3.2). W kolejnym podrozdziale rozważa się podobne zadanie dla różnicy funkcji podpierających. Praca kończy się uwagami na temat tak zwanych par zredukowanych, po których następuje podsumowanie.

Jeśli idzie o formalną stronę pracy, to pozostawia ona wiele do życzenia. Pracę czyta się źle, a także zawiera ona liczne błędy i niezręczności.

Pierwsze dwadzieścia kilka stron pracy to zestawienie definicji i twierdzeń, najczęściej nazywanych faktami. Nie wiem jaką zasadą kierował się autor, przypisując twierdzeniu nazwę *fakt.*

Przez pewien czas myślałem, że może chodzi o takie twierdzenia, które autor przywołuje i nie zamierza ich dowodzić? Jednak nie, niektóre *fakty* są dowodzone. A może autor chciał uniknąć zbitek w rodzaju: Twierdzenie 2.2.2 (Twierdzenie 2.10 w [14])? Taka zbitka musiałaby się pojawić np. na stronie 23_{14}. Jeśli tak, to wystarczyło napisać Twierdzenie 2.2.2 ([14, Th. 2.11]) lub jeszcze krócej Twierdzenie 2.2.2 ([14]). Autor nie jest tu zresztą zbyt konsekwentny, raz pisze, jak powyżej, "(Twierdzenie 2.10 w [14])", a wcześniej, przez cały rozdział pierwszy woli pisać, znacznie zresztą lepiej, "Lemat 1.3.3. ([36], Lemat 1.8)" (zob. str. 13). Pozostaje tę konwencję konsekwentnie zastosować w całym tekście rozprawy. Wtedy znikną także i takie "fakty" jak na stronie 22: Fakt 2.1.1. (Wniosek 9.1.1 in [31]). To "in" w miejsce "w" pojawia się jeszcze kilkakrotnie. W rozdziale trzecim pojawiają się, sprawiedliwie, wszystkie sposoby zapisywania odwołań. Zdaje się, że ta niestaranność ma swoją przyczynę. Praca sprawia wrażenie skompilowanej z różnych części, jednak autor nie podjął poważnej próby uzgodnienia zapisu w poszczególnych częściach, a powinien to zrobić, także w dbałości o interes czytelnika, którego autor nie rozpieszcza. Co do interesu czytelnika, to chciałbym, by autor sobie wyobraził, czym musi być przebrnięcie przez wielostronicową wyliczankę: definicja, fakt, fakt, definicja itd. Mam wrażenie, że część tej wyliczanki w ogóle nie jest potrzebna. Lepiej umieścić konieczne twierdzenia, definicje, lematy tam, gdzie one są niezbędne. Albo inaczej, jeśli lemat wykorzystujemy wielokrotnie, to najlepiej umieścić go najbliżej miejsca, gdzie będzie wykorzystany po raz pierwszy. Umieszczenie go gdzieś na początku, daleko od miejsca, w którym będziemy się do niego odwoływać nie ma sensu. To samo dotyczy wprowadzanych pojęć.

Przejdę teraz do uwag szczegółowych. Nie uporządkowałem ich według wagi, ale raczej według kolejności występowania. Sporządzałem je w nadziei ułatwienia pracy autora nad dokonaniem poprawek. Jednak dowiedziałem się, że według nowej wersji ustawy nie jest to możliwe.

Str. 2 (Wstęp): Zgodnie z zasadami transkrypcji alfabetu rosyjskiego powinno być: Demianow, Rubinow. Jasne, że w spisie literatury powinniśmy zachować zapis oryginalny.

Str. 3: W akapicie drugim jest powtórzenie: "W rezultacie rozprawa rozprawa". W akapicie 3 powinno być: " para L-minimalna", a także "Rolę zbiory wypukłego L pełni zbiór"

Str. 4: Nazwa V-politop użyta przez autora jest niezręczna i niezgodna z polską tradycją. Rozumiem, że autor nie chciał mówić o wielościanach, a tym bardziej o wielobokach. Ja bym zaryzykował *wielowierzchołek*. Tego słowa nam rzeczywiście brakuje.

Str 5. (Rozdział 1): W definicji 1.1.3 występuje bez dodatkowych wyjaśnień symbol $\mathbb{R}_+$, jednak nie wiemy, czy oznacza on przedział $[0, +\infty)$, czy też $(0, +\infty)$. Poza tym nie wyjaśniono, co oznacza symbol 0_X. Niby "każdy" wie, ale jeśli "każdy" wie, to po co w ogóle wypisywać definicję stożka abstrakcyjnego? Zresztą nie jestem przekonany, że jest ona w tej postaci w pracy potrzebna. Na marginesie, w pracy doktorskiej Tomasza Strońskiego, którą autor rozprawy z pewnością czytał, oba symbole są wprowadzone należycie.

Str. 7: Tutaj panuje nieporządek. Najpierw autor definiuje powłokę wypukłą zbioru za pomocą kombinacji wypukłych. Potem określa punkt ekstremalny zbioru, ale nie wspomina, czy chodzi mu o zbiór wypukły. Można określić punkty ekstremalne tak szeroko, tylko po co? Dalej określa autor kombinacje liniowe. Wspomina o powłoce liniowej. Potem określa pojęcie stożka za pomocą kombinacji stożkowych, które dopiero później definiuje. I na sam koniec przychodzi definicja kombinacji wypukłej, by w zasadzie powtórnie zdefiniować powłokę wypukłą. Jeśli czytelnik rozumie o czym mowa, to sobie poradzi. W przeciwnym razie będzie pogubiony. Dochodzi jeszcze jedna ważna sprawa. Na początku strony X oznacza przestrzeń liniową, potem przestrzeń wektorową, niby to samo, tylko po co? A potem już nawet się nie wspomina, co oznacza X (Fakt 1.1.16). Podobnie, autor pisze, że $\operatorname{cone} A$ jest najmniejszym stożkiem wypukłym zawierającym A (Fakt 1.1.14), ale nie podaje definicji tego tworu. Zamiast tego mamy definicję abstrakcyjnego stożka wypukłego. Niech czytelnik się biedzi.

Str. 8: Jeśli w definicji 1.1.18 określone zostały zbiory domknięte, to dlaczego ich nie użyto w definicji 1.1.19? Co to jest "zbiór podpierająca zbioru A w kierunku wektora u? (definicja 1.1.20). Dalej autor pisze: "Zbiór podpierająca jest niepusty, jeżeli". Większość czytelników nie będzie czytać dalej, tylko utknie na tej dziwacznej nazwie. Nie przypominam sobie, czy autor dalej używa tej nazwy (w skorowidzu z pewnością), jednak na stronie 35 w przykładzie 2.3.13 pojawiają się zbiory podpierające. Zbiór podpierający można zaakceptować, chociaż niektórzy wolą mówić o zbiorze podparcia czy fasadzie. Jak później zobaczymy, zbiory te zdefiniowane zostały jeszcze raz.

Str. 9: W definicji 1.1.23 stoi: "gdy dla każdym X, Y". Zdanie "Przedstawiamy również elementy tej przestrzeni." jest niezręczne. Definicja 1.2.1: Składnik sumy, ale chyba jednak składowa zbioru, a nie składnik. Definicja 1.2.3: Symbol różnicy jest niefortunny. Wysoko umieszczona kropka znika w tekście.

Str. 10: Zdanie zaczynające się od słów: "Dzięki powyższemu" musi być napisane tak, by po opuszczeniu równań miało jakiś sens. Fakt 1.2.5, powinno być: "Wtedy zachodzą następujące stwierdzenia". Stwierdzenie, że warunek (b) jest równoważny wypukłości jest nieco dziwne, jeśli założyliśmy wypukłość A. Należałoby więc napisać, że jeśli o A nie zakładać wypukłości, to (b) jest jej równoważny.

Str. 11: W twierdzeniu 1.2.6 chodzi o dodawanie Minkowskiego. Suma jest wynikiem dodawania, działaniem jest dodawanie. Dowód faktu 1.2.8 nie jest kompletny. Dowiedziono jedynie, że $\operatorname{recc} A \subset \bigcap_{t>0} t(A \dot{-} A)$. Znowu, jest to łatwe, ale jakiś komentarz się czytelnikowi należy. Fakt 1.2.12: Autor nie rozstawił nawiasów, najwyraźniej pozostawiając to zadanie czytelnikom.

Str. 12: Definicje 1.2.13 i 1.2.15, znowu brakuje nawiasów. Ponadto w literaturze, szczególnie tej, dotyczącej morfologii matematycznej, dylacja i erozja są zdefiniowane inaczej (w wikipedii znajduje się stosowne hasło). Należałoby to wyjaśnić. Może nagłówek "Porządkowe prawo skracania" należałoby wytłuścić? Fakt 1.2.23 (twierdzenie Kreina Milmana): Chciałbym wiedzieć, gdzie autor go używa?

Uwaga dotycząca całej pracy: Autor notorycznie pomija nawiasy w wyrażeniach, w których występują różne działania.

Str. 13: Na samej górze pojawia się definicja zbioru ściśle wypukłego. Wcześniej już zbiór ściśle wypukły zdefiniowano (definicja 1.1.8). Definicja 1.3.1 z pewnością nie określa odległości między zbiorami. Nawet nie bardzo wiadomo, co autor miał na myśli.

Str. 14: Sformułowanie "W kilku następujących definicjach przybliżamy funkcje podpierające i ściany podpierające" i następujące po nim są niezręczne. Wielkość $|h_A(x)|$ nie określa odległości hiperpłaszczyzny $H(x)$ od początku układu, ale odległość (odstęp) początku układu od hiperpłaszczyzny i to pod tym warunkiem, że $\|x\| = 1$. Definicja 1.3.13 to powtórne określenie zbiorów podpierających (por. uwagi do str. 8).

Str. 15: Definicja 1.3.14 pochodnej kierunkowej jest niepoprawna. Pod symbolem granicy powinno stać: $t \searrow 0$. Fakt 1.3.16 to w zasadzie twierdzenie Straszewicza. Autor o tym nie wspomina, ale pytanie, czy gdziekolwiek w rozprawie twierdzenie to zostało użyte.

Str. 16: Czym w fakcie 1.3.17 jest X?

Str.17: Przestrzeń $\mathcal{K}(X)$ nie jest źródłową, ale wyjściową. Urbański [35] nie uogólnił możliwości zanurzenia $\mathcal{K}(X)$ w przestrzeni liniowo-topologicznej, a jedynie wykazał, że takie zanurzenie istnieje w tak ogólnym przypadku. Nie powiedziałbym, że algorytm się wyznacza, raczej znajduje. Za pomocą algorytmu coś się wyznacza.

Str. 19: W Fakcie 1.3.29 jest chyba mowa o minimalnej parze wypukłej, a nie o parze minimalnie wypukłej. Zamiast "Praktycznym aspektem opisywanych zagadnień stanowi znajdowanie par" powinno chyba być "Praktycznym aspektem opisywanych zagadnień jest wyznaczanie par"

Str. 20: W Twierdzeniu 1.3.34 brak założeń o parze (C, D). Ponadto, zamiast CA_2 powinno być $C \cap A_2$

Str. 23: Autor utrzymuje, że określa mnożenie klas równoważości par zbiorów przez skalary nieujemne, po czym wprowadza mnożenie przez dowolne skalary.

Str. 24: W dowodzie lematu 2.2.5 powinno być: $V \cap (-V) = \{0\}$. Poza tym zachodzi niezgodność – w sformułowaniu lematu mamy ciąg $(C_i)_i$, gdzie $i \in \mathbb{N}$, w dowodzie pojawia się ciąg $(C_i \cap Y^\perp)_{i \in I}$.

Str. 25: Rysunek 2.2.6 jest źle podpisany. Chodzi o przykład 2.2.8 (i). Czy w dowodzie twierdzenia 2.2.7 rzeczywiście potrzebna jest indukcja pozaskończona? Przecież A^*, B^* są zadane jawnymi wzorami. I czy w świetle faktu 2.2.9 w ogóle twierdzenie to jest potrzebne?

Str. 26: Rysunek jest źle podpisany. Jest kwestią sporną, czy procedura wyznaczania pary A^*, B^* to w sensie ścisłym algorytm. Zawiera ona nieskończenie wiele kroków. Uważam, ze dowód faktu 2.2.9 zawiera lukę. Sformułowanie też powinno być staranniejsze. Najpierw chcielibyśmy mieć pewność, że wszystkie zbiory C_i, D_i są domknięte, bo ich wypukłość jest jasna. Najwygodniej jest wykazać, że są elementami $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$, ale wtedy zawczasu musimy wiedzieć, że ich stożki recesywne są równe V. To dopiero zamierzamy ustalić w jednym z kolejnych kroków (stwierdzenie (f)).

Str. 28: W 13 wierszu od dołu powinno być: $B' \subset B^*$. W przykładzie 2.2.14 autor pisze: "Zauważmy, że B^* jest ciasno włożony w stożek V". Jednak nigdzie nie definiuje "ciasnego włożenia". Chyba cudzysłów przydałby się.

Str. 30: Autor określa współrównoległe krawędzie dwóch zbiorów, po czym w twierdzeniu 2.2.17 nazywa je równo równoległymi.

Str. 31: W porozdziale 2.3 określa autor rodzinę zbiorów $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Rzecz w tym, że jest ona tożsama z określoną wcześniej rodziną $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Po co dwie nazwy dla jednego tworu? Powtórnie też określa odległość Hausdorffa.

Str. 32: Autor pisze – "Dzięki zastosowaniu prawa skracania relacja $\sim$ jest relacją równoważności" . Relacja $\sim$ jest równoważności albo nie i zastosowanie prawa skracania nie ma tu nic do rzeczy. Natomiast prawo skracania pozwala nam udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Autor pisze, że oba infima są skończone. chyba lepiej napisać, że skończone są kresy dolne.

Str. 33: Po co rozbijać twierdzenie selekcyjne Blaschkego na dwa? W książce Schneidera, na którą autor się powołuje, mogło to wynikać z logiki wywodu.

Str. 36 (Rozdział 3): W drugim akapicie autor pisze o funkcjach "o wartościach rzeczywistych i $+\infty$". Jest to niezręczne i nieścisłe. Nie lepiej napisać "o wartościach w $(-\infty, +\infty]$" lub "o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych uzupełnionym o $+\infty$"? Ponadto autor jeszcze raz określa funkcję podpierającą zbioru.

Str. 37: Funkcja $\hat{h}$ nie jest właściwie określona. Nie wiemy skąd się biorą argumenty y.

Str. 38: Autor zauważa, że skoro f_1 jest ciągła, $\tilde{f}_1$ jest także ciągła. A dowód lub odsyłacz można prosić?

Str. 41: Czy definicja ds-funkcji pojawia się jedynie w Streszczeniu? Co autor zakłada o funkcji h?

Str. 42: We wniosku 3.3.2 pojawia się funkcja dist. Gdzie ona jest zdefiniowana?

Str. 48: Autor pisze: "Bauer udowodniła (...), że zbiór wszystkich par zredukowanych wielościanów wypukłych w $\mathbb{R}^n$ jest gęstym G_δ zbiorem w przestrzeni wszystkich par" To raczej prawdą nie jest.

Str. 49: Zdaje się, że zbiór $L \dot{-} A$, o którym mowa w lemacie 3.3.10, może być pusty, jednoelementowy, bądź też ściśle wypukły.

Str. 53: Wydawca książki Rockafellara to Princeton University Press.

Listę uchybień formalnych, a także niestety merytorycznych, chciałbym zakończyć ogólnymi uwagami.

Autor powinien ujednolicić notację i nazewnictwo w rozprawie. Dorzucę jeszcze dwa przykłady. Jeśli autor rozpatruje ciągi zbiorów, to niech się zdecyduje i nazywa je zstępującymi bądź malejącymi, ale niech nie używa obu nazw jednocześnie, chyba, że gdzieś wyraźnie zaznaczy, że to to samo. Podobnie jeśli idzie o oznaczanie ciągów. Raz autor pisze $(a_i)_i$, innym razem (a_i), a jeszcze innym $(a_i)_{i \in I}$. Nie ma błędu, ale jest rozdźwięk.

Autor powinien usunąć z rozprawy informacje, może i interesujące, które nie mają istotnego związku z zagadnieniami rozpatrywanymi w rozprawie. Natomiast uważam, że powinien starannie opisać dwie struktury: $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$.

Rozprawa, w jej obecnej postaci jest trudna do zaakceptowania, wymagałaby licznych poprawek. Ponieważ nowa ustawa odebrała ubiegającym się o stopień doktora możliwość dokonania takich poprawek, do czego bym się skłaniał, więc zmuszony jestem ocenić rozprawę **negatywnie**.