Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 4.06.2019

Recenzja rozprawy doktorskiej Justyny Banaszak

O strukturze grafów Kroneckera

Tematem rozprawy doktorskiej Justyny Banaszak są funkcje progowe dla pewnych własności grafów Kroneckera. Grafy Kroneckera to ciekawa klasa grafów losowych definiowanych na ciągach binarnych długości n, w których prawdopodobieństwo wystąpienia krawędzi między dwoma wierzchołkami zależy od zgodności wyrazów tych ciągów. Dokładniej, prawdopodobieństwo to wynosi $\alpha^j\beta^{n-j-z}\gamma^z$, gdzie α, β, γ są ustalonymi dowolnie parametrami z przedziału $[0, 1]$, zaś j i z oznaczają liczbę pozycji, w których oba ciągi mają odpowiednio jedynki i zera (czyli w pozostałych $n - j - z$ miejscach ciągi te różnią się). Taki model grafów losowych pojawił się w informatyce w kontekście znanego fenomenu "małych światów" w dużych sieciach. Jest on również interesujący ze względów czysto matematycznych.

Praca Justyny Banaszak koncentruje się na trzech fundamentalnych zagadnieniach: problemie skojarzenia doskonałego, spójności krawędziowej oraz średnicy grafów Kroneckera. Główne wyniki dotyczą wartości progowych parametrów α, β, γ, przy których określona własność grafów Kroneckera zachodzi (lub nie zachodzi) *asymptotycznie prawie na pewno* (a.p.p.). Oznacza to, że prawdopodobieństwo tego, że dana własność zachodzi dąży do jeden wraz z rozmiarem grafu dążącym do nieskończoności.

Na przykład, w głównym twierdzeniu rozdziału 4 (Twierdzenie 4.1) autorka wykazuje, że jeżeli $\beta + \gamma > 1$ lub $\beta = 1$, to graf Kroneckera zawiera skojarzenie doskonałe (a.p.p.). W przeciwnym przypadku, gdy $\beta+\gamma \leqslant 1$ i $\beta \neq 1$, graf Kroneckera nie zawiera skojarzenia doskonałego (a.p.p.). Dowód sprowadza się do wykazania istnienia skojarzenia doskonałego przy warunku $\beta + \gamma > 1$ (pozostałe przypadki są niemal natychmiastowe). W tym celu wprowadzony zostaje pomocniczy graf dwudzielny H_t, w którym krawędzie łączą pary wierzchołków pozostających w odległości Hamminga t, gdzie t jest pewną liczbą nieparzystą bliską wartości $\frac{\beta}{\beta+\gamma}n$. Wykorzystując dobre własności ekspansji grafu H_t (Lemat 4.2), autorka wykazuje, że losowy podgraf tego grafu będący jednocześnie podgrafem grafu Kroneckera, spełnia warunek Halla. Praca z tym wynikiem ukazała się w czasopiśmie *The Electronic Journal of Combinatorics.*

W kolejnym rozdziale Justyna Banaszak uogólnia wcześniejsze wyniki dotyczące spójności krawędziowej grafów Kroneckera. Główny wynik tej części rozprawy (Twierdzenie 5.1) mówi, że spójność krawędziowa grafu Kroneckera jest równa minimalnemu stopniowi wierzchołka (a.p.p.), o ile $\beta \neq 1$ lub $\alpha+\gamma > 0$. Dowód zgrabnie wykorzystuje metodę pierwszego momentu, nierówność Chernoffa, a także własności ekspansji grafu H_t z poprzedniego dowodu (Lemat 4.2).

Ostatni rozdział pracy zawiera zaskakujący wynik (Twierdzenie 6.1) dotyczący średnicy grafu Kroneckera. Mówi on, że średnica grafu Kroneckera jest skończona (a.p.p.), dla tych wartości parametrów α, β, γ, dla których graf Kroneckera jest spójny (a.p.p.). Jest ona wówczas ograniczona przez stałą zależną od tych parametrów. Dowód tego twierdzenia jest dość złożony, rozdziela się na kilka przypadków. Najprostszy jest przypadek progowy, w którym wystarcza pomysłowe użycie metody pierwszego momentu. Przy wartościach parametrów powyżej progu dowód przebiega w dwóch etapach. Kluczowy pomysł polega na wyróżnieniu podgrafu M grafu Kroneckera składającego się z wierzchołków o wadze $n/2$ (tzw. środkowy poziom). Najpierw autorka wykazuje (Twierdzenie 6.2), że każdy wierzchołek spoza M jest połączony z M ścieżką ograniczonej długości (zależnej od parametrów grafu Kroneckera). Dowód opiera się na własnościach sąsiedztw w grafie Kroneckera, które zostały uzyskane w rozdziale 3. Następnie, autorka dowodzi, że średnica grafu M jest ograniczona przez stałą (Twierdzenie 6.6). Kluczowym krokiem jest dalsze rozbicie grafu M na odpowiednią liczbę podgrafów losowych i wykazanie, że w każdym z nich wierzchołki znajdujące się w małej odległości Hamminga są z dużym prawdopodobieństwem połączone krótkimi ścieżkami (Lemat 6.8). Ponieważ ścieżki te są rozłączne krawędziowe, a ich oczekiwana liczba jest odpowiednio duża, do uzyskania tezy wystarczy zastosować nierówność Talagranda. Wyniki tej części rozprawy zostały opublikowane w czasopiśmie *Discrete Mathematics*.

Podsumowując, stwierdzam, że przedłożona praca Justyny Banaszak to bardzo dobra rozprawa doktorska zawierająca kilka wartościowych rezultatów w dziedzinie grafów losowych. Ich uzyskanie świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej erudycji autorki w zakresie tematyki pracy. Ponadto, praca jest bardzo dobrze zredagowana, klarowny styl i sugestywne ilustracje uprzyjemniają miejscami trudną technicznie lekturę.

Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Justyny Banaszak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk