

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa

Email: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 1 czerwca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Adama Burchardta

Structure constants of Jack characters

Tematyka rozprawy doktorskiej Adama Burchardta dotyczy pewnych zagadnień kombinatoryki algebraicznej związanych z ważną hipotezą Gouldena-Jacksona o skojarzeniach Jacka (ang. *the Matching-Jack Conjecture*), postawioną w roku 1996. W tradycyjnym problemie kombinatoryki przeliczeniowej chodzi zazwyczaj o znalezienie wzoru wyrażającego licznosc danej rodziny obiektów. Hipoteza o skojarzeniach Jacka ma jakby odwrotną naturę. Postuluje ona, że pewien istniejący "wzór" odpowiada nieznannej rodzinie obiektów kombinatorycznych, której odkrycie jest tutaj wyzwaniem. Nieco dokładniej rzecz formułując, hipoteza dotyczy współczynników $c_{\pi, \sigma}^{\lambda}$ pojawiających się w rozwinięciu w szereg potęgowy pewnej sumy Cauchy'ego wielomianów Jacka (występujące w oznaczeniu litery greckiej oznaczają partycje tej samej liczby naturalnej). Przypuszcza się, że współczynniki te są wielomianami (jednej zmiennej, będącej tzw. parametrem deformacji) o współczynnikach całkowitych nieujemnych, co sugeruje ich możliwą kombinatoryczną interpretację. Przypuszczenie to zostało potwierdzone jak dotąd w niewielu dość szczególnych przypadkach. Wielomiany Jacka to rodzina funkcji symetrycznych indeksowana partycjami liczb naturalnych (oraz parametrem deformacji) posiadająca liczne zastosowania w rozmaitych działach matematyki i fizyki, w szczególności w kombinatoryce przeliczeniowej, czy teorii reprezentacji.

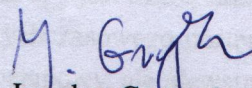
Jeden z głównych rezultatów rozprawy dotyczy współczynnika wiodącego wielomianu $c_{\pi, \sigma}^{\lambda}$. To, że $c_{\pi, \sigma}^{\lambda}$ w ogóle jest wielomianem udowodnili dopiero niedawno (2016) Dołęga i Féray, podając jednocześnie ograniczenie górne na stopień tego wielomianu. Twierdzenie 2.5 rozprawy podaje wzór na współczynnik wiodący przy założeniu, że wielomian $c_{\pi, \sigma}^{\lambda}$ osiąga to ograniczenie na stopień. Wzór ten bazuje na sprytnie dobranej statystyce dla pewnej rodziny odpowiednio ograniczonych skojarzeń. Wynika z niego w szczególności, że współczynnik wiodący wielomianu $c_{\pi, \sigma}^{\lambda}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Niewątpliwie wynik ten stanowi znaczący krok (na tle dotychczasowego postępu) w kierunku hipotezy Gouldena-Jacksona. Dowód jest dość zawiły, wieloetapowy, ale niewątpliwie pomysłowy. Kluczowa idea polega na wykorzystaniu tzw. *charakterów Jacka* i związanych z nimi współczynników $g_{\pi, \sigma}^{\lambda}$, zwanych stałymi struktury, które, jak dowiedli Dołęga i Féray, również są

wielomianami jednej zmiennej—odpowiedniego parametru deformacji. Autor rozprawy dowodzi w Twierdzeniu 3.3 wzoru na współczynnik wiodący wielomianu $g_{\pi,\sigma}^\lambda$ (przy odpowiednich założeniach o partycjach i stopniu wielomianu), który bazuje z kolei na tzw. listach map. Wykorzystując subtelne związki pomiędzy mapami a skojarzeniami, można teraz przejść (choć nie jest to łatwa droga) z jednej struktury na drugą uzyskując związek pomiędzy współczynnikami $c_{\pi,\sigma}^\lambda$ i $g_{\pi,\sigma}^\lambda$, i w efekcie otrzymać wzór z Twierdzenia 2.5. W końcowej części rozprawy autor pokazuje równoważność tego wyniku z niedawnym rezultatem Dołęgi dotyczącym "bratniej" hipotezy (ang. *b-Conjecture*) do hipotezy o skojarzeniach Jacka (jest ona sformułowana analogicznie dla współczynników $h_{\pi,\sigma}^\lambda$ występujących w innej funkcji tworzącej dla wielomianów Jacka). Warto zaznaczyć, że dowód z rozprawy różni się znacząco od podejścia Dołęgi.

Ostatni rozdział rozprawy przedstawia nieco inne podejście do charakterów Jacka, wykorzystujące pojęcie kumulanty z teorii prawdopodobieństwa. Podejście to dawało inny dowód Twierdzenia 3.3, z którego autor ostatecznie zrezygnował na rzecz bardziej bezpośredniego dowodu. Niemniej jednak uzyskane wyniki są nie tylko interesujące same w sobie, ale dają też nadzieję na dalszy postęp w hipotezie o skojarzeniach Jacka. Główny wynik tej części rozprawy (Twierdzenie 4.6) dotyczy przestrzeni liniowych z dwoma operacjami mnożenia, z każdym z nich przestrzeń tworzy algebrę przemianą. Jest to wzór pozwalający wyeliminować jedno z mnożeń w pewnym ogólnym produkcie elementów przestrzeni, zastępując je sumą zagnieżdżonych kumulant zdefiniowanych rekurencyjnie za pomocą specjalnych lasów. Wynik ten jest zaskakująco ogólny (nie zakładamy prawie niczego o obu mnożeniach). Przy odpowiednim przeformułowaniu (Twierdzenie 4.16) może być uznany za analog znanego wzoru Leonova-Shiryaeva dotyczącego kumulant produktów zmiennych losowych.

Praca jest zredagowana znakomicie. Liczne, dobrze dobrane przykłady i eleganckie ilustracje ułatwiają zrozumienie niełatwej materii rozprawy. Nieliczne drobne literówki nie wpływają na przyjemność lektury. Jestem pewien, że rezultaty pracy zostaną wkrótce opublikowane w bardzo dobrych czasopismach (dwa obszerne manuskrypty autorstwa Adama Burchardta można znaleźć w popularnym repozytorium internetowym Arxiv, choć nie ma ich w spisie literatury).

Podsumowując, stwierdzam, że praca doktorska Adama Burchardta zawiera szereg nowych, wartościowych, głębokich rezultatów w obrębie trudnej i ważnej tematyki wielomianów i charakterów Jacka. Ich uzyskanie świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji w zakresie tematyki pracy. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Adama Burchardta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Jarosław Grytczuk