UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Lipków, 10.06.2020

prof. dr hab. Adrian Langer
Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej pana magistra Jędrzeja Garnka "Abelian varieties over p-adic fields"

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Jędrzej Garnek bada kilka problemów związanych z rozmaitościami abelowymi i z krzywymi algebraicznymi w mieszanej lub w dodatniej charakterystyce. Rozprawa podzielona jest na wstęp i cztery rozdziały. Wstęp zawiera omówienie wyników uzyskanych w rozprawie, a w pierwszym rozdziale autor ustala notację i przypomina różne definicje, fakty i twierdzenia używane w dalszej części rozprawy. Obie te części są bardzo dobrze napisane (choć w dalszej części skrytykuję trochę 1.4). Główną część rozprawy stanowią Rozdziały 2, 3 i 4, z których każdy poświęcony jest innemu zagadnieniu i będzie poniżej osobno omawiany. W recenzji posługuję się bibliografią używając, kiedy to tylko możliwe, odpowiedniej bibliografii z rozprawy.

Rozdział 2 rozprawy dotyczy badania podniesień zwyczajnych rozmaitości abelowych. Klasyczny rezultat Mumforda mówi, że każda rozmaitość abelowa A nad ciałem algebraicznie domkniętym k o dodatniej charakterystyce ma podniesienie do charakterystyki zero. Dokładniej, istnieje zupełny pierścień waluacji dyskretnej R z ciałem reszt k i ciałem ułamków charakterystyki zero oraz schemat abelowy $\mathcal{A}$ nad $\operatorname{Spec} R$ takie, że $\mathcal{A} \otimes k \simeq A$. Serre i Tate pokazali, że infinitezymalna teoria deformacji rozmaitości abelowej A jest równoważna z infinitezymalną teorią deformacji p-podzielnych grup (które w zasadzie są obiektem algebry liniowej, więc są łatwiejsze do zrozumienia). W przypadku, gdy rozmaitość A jest zwyczajna, daje to istnienie pewnej nieoczekiwanej struktury grupy na formalnej przestrzeni moduli podniesień, z czego wynika istnienie pewnego wyróżnionego podniesienia A do pierścienia Witta ciała k. Później okazało się, że podniesienie to można scharakteryzować jako jedyne podniesienie dla którego istnieje podniesienie morfizmu Frobeniusa rozmaitości A do $W(k)$ (zob. Theorem 1 w dodatku do V. B. Mehta, V. Srinivas, Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle. With an appendix by Srinivas and M. V. Nori, *Compositio Math.* **64** (1987), 191–212). Z dowodu powyższego twierdzenia wynika też istnienie jednoznacznych kanonicznych podniesień do $W_n(k)$ dla dowolnego ustalonego n. Najwyraźniej autor rozprawy nie znał tego faktu, bo cytuje tylko słabszy (i późniejszy!) rezultat de Jonga–Noota działający gdy $k = \bar{\mathbb{F}}_p$ (Lemat 2.1.2).

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
tel.: 22 55 44 215
e-mail: mim@mimuw.edu.pl

Rozdział 2 zawiera kilka rezultatów dotyczących kanonicznych podniesień. Pierwszy rezultat, Twierdzenie 2.2.1, mówi, że kanoniczne podniesienia rozmaitości abelowych można scharakteryzować przy pomocy p-prymarnej torsji. Dowód autora polega na przetłumaczeniu problemu na język p-podzielnych grup przy użyciu teorii Serre'a–Tate'a i na nietrywialnych obliczeniach sprawdzających istnienie pewnych izomorfizmów. Z geometrycznego punktu widzenia fakt ten nie jest jednak specjalnie zaskakujący i można go łatwo udowodnić używając wyżej wspomnianej charakteryzacji kanonicznych podniesień przy pomocy podniesień morfizmu Frobeniusa. Przypomnijmy, że w charakterystyce p morfizm $[p] : A \to A$ mnożenia przez p rozkłada się na złożenie geometrycznego morfizmu Frobeniusa i morfizmu Verschiebung (w dowolnej kolejności). Jeśli więc p-prymarna torsja podniesienia jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}/p)^g$, to dzieląc przez nią dostaje się podniesienie morfizmu Verschiebung. Daje to też podniesienie morfizmu Frobeniusa, więc podniesienie rozmaitości abelowej jest kanoniczne. Z drugiej strony jeśli istnieje podniesienie morfizmu Frobeniusa, to mamy też podniesienie morfizmu Verschiebung, co daje natychmiast podniesienie p-prymarnej torsji. Pozostałe dwa twierdzenia w tym rozdziale związane są z wprowadzonym przez autora tzw. (n, d)-stopniem rozmaitości abelowej nad $\mathbb{Q}$. Ta część jest motywowana hipotezą Davida i Westona (której szczególnym przypadkiem jest Hipoteza 1 ze str. 10 z rozprawy) dotyczącą lokalnej torsji. Pierwsze z tych twierdzeń, Twierdzenie 2.3.6, mówi, że przy pewnych założeniach dotyczących (n, d)-stopnia redukcja rozmaitości abelowej A określonej nad $\mathbb{Q}$ jest zwyczajna i oryginalna rozmaitość daje jej kanoniczne podniesienie. W dowodzie, oprócz Twierdzenia 2.2.1, główną rolę odgrywa Lemat 2.3.7, którego dowód pochodzi z pracy Gamzona [Gam14]. Twierdzenie 2.3.6 jest związane z trudną i bardzo ciekawą hipotezą Serre'a mówiącą, że rozmaitość abelowa w charakterystyce zero powinna mieć dużo zwyczajnych redukcji. Niestety kryterium podane przez autora jest tutaj bardzo trudne do użycia. Pokazuje to Twierdzenie 2.4.1 obliczające pewne (n, d)-stopnie w bardzo szczególnym przypadku krzywej eliptycznej z mnożeniem zespolonym. W tym przypadku obliczanie (n, d)-stopnia jest, jak pokazał autor, związane z innymi od dawna otwartymi problemami z teorii liczb. Dowód Twierdzenia 2.4.1 jest nietrywialny i używa kryterium Deuringa i hipotez Weila dla krzywej eliptycznej.

Rozdział 3 rozprawy poświęcony jest badaniu pierwszych kohomologii de Rhama gładkiej krzywej rzutowej z działaniem grupy skończonej. Badanie gładkich krzywych rzutowych w dodatniej charakterystyce z działaniem grupy skończonej jest tematem klasycznym, któremu poświęcona jest bardzo duża liczba prac. Autor rozprawy zajmuje się następującym problemem. Niech X będzie gładką krzywą rzutową określoną nad algebraicznie domkniętym ciałem k o dodatniej charakterystyce p i niech G będzie grupą skończoną działającą na X. Wiadomo, że przeszkody do podnoszenia znikają dla gładkich krzywych, więc twierdzenie Deligne'a i Illusie pokazuje, że mamy ciągi dokładne otrzymane z klasycznych ciągów spektralnych Hodge'a do de Rhama i "sprzężonego" (ciągi (3.1) i (3.2) z rozprawy). Głównym celem autora jest badanie przeszkód do rozszczepiania tych ciągów jako ciągów $k[G]$-modułów. Autor bada związek między lokalnymi i globalnymi przeszkodami do rozszczepiania tych ciągów pokazując, że globalne przeszkody do rozszczepiania można obliczać lokalnie (Stwierdzenie 3.2.1). Dowód tego faktu jest najdłuższym dowodem w rozprawie i wymaga delikatnych obliczeń porównujących różne ciągi spektralne z podziałem na przypadki dziki i oswojony.

Mając Stwierdzenie 3.2.1 autor skupia się na obliczeniu lokalnych składników w uzyskanym wzorze w przypadku nakryć Artina–Schreiera. Po dłuższych obliczeniach jako wniosek autor jest w stanie wyliczyć przeszkody do rozszczepiania ciągów w przypadku grupy cyklicznej rzędu p (Wniosek 3.3.7). Fakt ten jest istotny w dowodzie Twierdzenia 3.4.5.

W następnej części 3.4, znajduje się dwa twierdzenia. Pierwsze Twierdzenie 3.4.1 uogólnia drobną część wyniku Deligne'a i Illusie do przypadku rozmaitości z działaniem grupy. Dokładniej, twierdzenie to mówi, że ciąg (3.2) rozszczepia się, gdy para (X, G) ma podniesienie modulo p^2. Obecnie uogólnienia rezultatu Deligne'a i Illusiego istnieją w dużo bardziej rozbudowanych wersjach i jest to przedmiotem kilku prac (jednak dokładniejsze rezultaty tego dotyczące tutaj pominę). Jako wniosek autor dostaje rozszczepialność ciągów (3.1) i (3.2) dla krzywej zwyczajnej. Jednak Twierdzenie 3.4.1 nie jest tu do niczego potrzebne, a sam Wniosek 3.4.4 wynika natychmiast z interpretacji złożenia odwzorowań $H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \to H^1_{dR}(X/k)$ i $H^1_{dR}(X/k) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ jako odwzorowania indukowanego przez morfizm Frobeniusa. Z założenia złożenie to jest izomorfizmem, więc oba ciągi się rozszczepiają (dowód tego faktu w pracy jest zbyt skomplikowany).

Jednym z najważniejszych twierdzeń Rozdziału 3 jest drugie twierdzenie z 3.4, Twierdzenie 3.4.5, mówiące, że jeśli ciągi $k[G]$-modułów (3.1) i (3.2) rozszczepiają się i charakterystyka ciała bazowego $p > 2$, to grupa G działa na X w sposób słabo rozgałęziony (tzn. wszystkie drugie grupy rozgałęzienia są trywialne). Jest to otrzymane przez redukcję do ilorazu przez grupę cykliczną rzędu p i użycie Wniosku 3.3.7. Warto zauważyć, że twierdzenie to jest ciekawe głównie jeśli krzywa X nie jest zwyczajna. Wiadomo bowiem, że każde działanie grupy skończonej na krzywej zwyczajnej jest słabo rozgałęzione (zob. Theorem 2 w S. Nakajima, p-ranks and automorphism groups of algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 595–607; autor cytuje tu [Sub75], ale nie wiadomo gdzie miałoby się to znajdować i nie udało mi się tam tego faktu znaleźć). Co prawda Twierdzenie 3.4.5, razem z Wnioskiem 3.4.4 dają nowy dowód tego faktu, zupełnie inny od oryginalnego, ale jest on dużo bardziej skomplikowany od oryginalnego.

Twierdzenie 3.4.5 pozwala autorowi na konstrukcję przykładów krzywych dla których Jakobian nie ma podniesienia kanonicznego do $W_2(k)$ i na początku Rozdziału 3 przedstawione jest to jako jedno z głównych zastosowań. Akurat tutaj nie podzielam jednak entuzjazmu autora i uważam, że konstrukcja takich przykładów jest trywialna. Z wspomnianego rezultatu z pracy Mehty i Srinivasa wynika bowiem, że jeśli dla rozmaitości abelowej w dodatniej charakterystyce morfizm Frobeniusa podnosi się do $W_2(k)$, to rozmaitość ta jest zwyczajna (zresztą w cytowanej przez autora pracy [AWZ17] główny rezultat dotyczy uogólnienia tego rezultatu). To oznacza, że dla każdej krzywej, której

Jakobian nie jest zwyczajną rozmaitością abelową, Jakobian nie ma kanonicznego podniesienia do $W_2(k)$ i to w mocniejszym sensie niż ten z Wniosku 3.4.8. Podobnie nawet Lemat 2.1.2 daje dużą liczbę przykładów tego typu. Mimo powyższych uwag dotyczących wagi wniosku uważam, że samo Twierdzenie 3.4.5 jest ciekawe i wysoce nietrywialne.

Następna część Rozdziału 3 poświęcona jest badaniu kiedy ciąg (3.1) ma szansę być dokładny. Znajduje się tutaj zadziwiająco proste Pytanie 3.5.2 na które zapewne specjaliści z teorii grup znają odpowiedź (niestety ani autor pracy ani ja do nich nie należymy). Autor podaje Przykład 3.6 pokazujący, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna w charakterystyce 2. Przykład pochodzi z obliczenia struktury $k[G]$-modułu na $H^1_{dR}(X/k)$ dla pewnej specjalnej krzywej eliptycznej. Niestety nie daje to odpowiedzi na pytanie, czy w Twierdzeniu 3.4.5, dotyczącym ciał charakterystyki $p > 2$, zachodzi równoważność warunków a nie tylko implikacja. Trochę brakuje tutaj większej liczby przykładów a w szczególności odpowiedzi na pytanie jak wygląda struktura $k[G]$-modułu na $H^1_{dR}(X/k)$ dla krzywych zwyczajnych z nieoczekwianie dużą grupą automorfizmów jak w przykładach z pracy Subrao [Sub] czy z wyżej wymienionej pracy Nakajimy. Być może zbadanie tego typu przykładów dałoby już negatywną odpowiedź na Pytanie 3.5.2. W Rozdziale 3 znajdują się też różne wzory na wymiary G-niezmienników kohomologii (w 3.7), które wymagają pewnej niemałej wprawy obliczeniowej, ale nie są one używane w dalszej części rozprawy.

Rozdział 4 poświęcony jest zupełnie innemu problemowi dotyczącemu rozmaitości abelowej A zdefiniowanej nad ciałem liczbowym K. Autor bada wielkość p-podgrupy Sylowa w grupie klas ciała K_n otrzymanego przez dołączenie do K jądra mnożenia przez p^n dla ustalonej liczby pierwszej p. Autor pokazuje dolne ograniczenie na tę podgrupę Sylowa w terminach między innymi rangi r $End_K(A)$-modułu $A(K)$ oraz wymiaru A. Główny rezultat, Twierdzenie 4.1.4, jest zbyt techniczny, by warto przytaczać jego sformułowanie w niniejszej recenzji. Zamiast tego warto zacytować Wniosek 4.1.5, który mówi, że rząd grupy klas ciała K_n dąży do nieskończoności gdy n dąży do nieskończoności. Główną ideą dowodu jest użycie teorii Kummera rozmaitości abelowych, klasyfikacji zwartych ℓ-adycznych grup Liego i własności modelu Nérona rozmaitości A nad maksymalnym nierozgałęzionym rozszerzeniem uzupełnienia K w $\mathfrak{p}$ leżącym nad p. Główne twierdzenie tego rozdziału jest zilustrowane nietrywialnym Przykładem 4.5, do którego autor używał intensywnie metod komputerowych. Niestety, wszystkie obliczenia zostały tutaj pominięte, a kody źródłowe odpowiednich programów nie zostały załączone, więc są one niesprawdzalne bez sporej dodatkowej pracy.

Recenzowana praca zawiera pewne nieścisłości i niepełne argumenty, ale niedociągnięcia te nie są na tyle poważne by zagrozić prawdziwości twierdzeń.

Na stronie 40, l. 4 autor podaje wzór na dywizor rozgałęzienia R odwołując się do rezultatu Serre'a. Jest to drobne nadużycie i wymaga uzasadnienia, bo cytowany rezultat odnosi się do innej sytuacji lokalnej i zawiera dodatkowe założenia o zupełności ciał względem waluacji.

W pracy brak jest definicji pojęcia G-snopa (ang. G-sheaf), mimo iż jest ono używane. W używanej przez autora książce Mumforda [Mum08, str. 69] G-snop jest $\mathcal{O}_X$-modułem na X z działaniem G zgodnym z działaniem na X. Tymczasem autor na str. 40, l.-17 mówi o G-snopach na ilorazie $Y = X/G$, co nie ma według tej definicji sensu. Później na tej samej stronie cytuje on błędnie (ewidentnie w wyniku niedopatrzenia) rezultat Mumforda o równoważności kategorii (równoważność w opisanej sytuacji jest między snopami koherentnymi na Y i koherentnymi G-snopami na X). Następnie wnioskuje z tego znikanie pewnych ekwiwariantnych grup kohomologii zdefiniowanych na stronie 27 pracy. Niestety z tą częścia (1.4), zawierającą definicje, mam ten kłopot, że podane tu definicje ekwiwariantnych kohomologii są bardzo szczególnym przypadkiem standardowych definicji i nie do końca zgadzają się z tymi, które są używane później przez autora. W 2.7 autor odwołuje się do [Gro57] i [BM00]. Przykładowo w [BM00, 3.1] kohomologie ekwiwariantne $\mathcal{H}^i(X, F)$ są definiowane dla G-snopa F na X jako funktory pochodne funktora π_*^G, gdzie $\pi : X \to Y = X/G$ jest ilorazem. Tymczasem definicja podana przez autora dotyczy szczególnego przypadku gdy działanie grupy G na Y jest trywialne. Później dla G-snopa F na X rozpatruje on $\mathcal{H}^i(G, \pi_* F)$ z trywialnym działaniem G na Y zamiast $\mathcal{H}^i(G, F)$. Autor nie tłumaczy związku między tymi snopami mimo iż jednocześnie używa on wyżej wspomnianego rezultatu Mumforda o równoważnosci kategorii, a z którego wynika znikanie wyższych snopów kohomologii $\mathcal{H}^i(G, F)$ w przypadku, gdy działanie G na X jest wolne. Fakt ten jest używany w dowodzie Stwierdzenia 3.1.1. Oczywiście w rozpatrywanej przez autora sytuacji dowód działa, ale wymaga to pewnego uzasadnienia.

W pracy gdzieniegdzie pominięte są szczegóły rozumowań, czasem znacznie utrudniając sprawdzenie szczegółów jak we wspomnianym wyżej Przykładzie 4.5. Dowód Wniosku 3.1.4 mógłby być dokładniej wyjaśniony, bo autor używa, nie wspominając o tym, znikania $H^1(K_Y + R')$ dla $R' \neq 0$ (co tutaj wynika np. z dualności Serre'a i znikania $H^0(-R')$ dla niezerowego efektywnego dywizora R'). Dowód Wniosku 3.2.5 główną część dowodu zbywa argumentem "One easily checks...", które jest nieuzasadnione (po konsultacjach z autorem otrzymałem prawdziwy dowód tego wniosku).

Na stronie 42, l.-6 autor mówi, że pewna równość wynika z (1.11), ale użycie ciągów spektralnych jest tu zupełnie niepotrzebne i równość wynika z poprzedniego zdania.

Dowód Lematu 3.2.2 zawiera nieudowodnione zapewnienie, że d na poziomie H^1 jest dualne do d na poziomie H^0. Jednak dowód tego faktu wcale nie jest oczywisty i wymagałby głębszego zrozumienia dualności Serre'a. Na dodatek znikanie $d : H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^1(Y, \Omega_Y)$ jest równoważne z degeneracją ciągu spektralnego Hodge'a na poziomie E_1, co nawet w przypadku krzywych nie jest oczywistym faktem. Wynika to np. z twierdzenia Deligne'a–Illusie albo z degeneracji odpowiedniego ciągu spektralnego dla Jakobianu krzywej.

Na str. 44, l. -10 przy założeniu "dzikiego" przypadku autor mówi "Then ..."i podaje równość, która zachodzi w każdym przypadku. Podany w następnym zdaniu "izomorfizm" z 0 (choć powinno się raczej mówić o równości) wymaga niewspomnianej dualności Serre'a i dopiero tutaj używa się założenia o dzikości.

W Rozdziale 3 autor zaczyna od powiedzenia, że ciągi (3.1) i (3.2) są dokładne, ale nie podaje uzasadnienia. Tymaczasem jest ono nietrywialne i wynika z tego, że każda krzywa gładka podnosi się do $W_2(k)$, co pozwala na zastosowanie rezultatu Deligne'a i Illusie. To daje ciąg (3.1), z którego przez porównanie wymiarów i użycie pewnego ciągu spektralnego wynika (3.2).

Twierdzenie 3.4.1 na stronie 51 mówi, że ciąg dokładny (3.2) rozszczepia się, ale wcześniej brak uzasadnienia, że ten ciąg jest w rozważanej sytuacji dokładny. W (3.2) pojawia się on tylko jako ciąg dokładny ma krzywej, a tu jest używany w wyższych wymiarach (tutaj znowu trzeba użyć Twierdzenia 1.3.1). Później w Pytaniu 3.4.3 występuje podobny problem dotyczący ciągu (3.1), ale tutaj Twierdzenie 1.3.1 w ogóle nie działa i trzeba użyć oryginalnego rezultatu Deligne'a i Illusie, którego sformułowania w pracy brak.

Inne problemy dotyczą jakości cytowań, które czasem są nieprecyzyjne. Przykładowo na stronie 41 podany bez dowodu Lemat 3.1.3 pochodzi podobno z [BM00, Proposition 5.3.2], które jednak nie ma z tym lematem wiele wspólnego i jest wzorem na wymiar pewnej grupy kohomologii (i to w przypadku nakrycia cyklicznego stopnia p). Oczywiście sam rezultat jest prawdziwy, ale wypadałoby podać krótki dowód lub prawdziwy odnośnik. Na stronie 53, l.-1, cytowany rezultat Köcka pochodzi raczej z dowodu cytowanego twierdzenia niż z jego sformułowania.

Dowód Twierdzenia 3.4.1 jest tylko szkicem dowodu a sformułowanie cytowanego Twierdzenia 1.3.1 jest nieprecyzyjne i nie jest wytłumaczone co oznacza funktorialność izomorfizmu. Na dodatek oryginalny dowód Deligne'a i Illusie [DI87] daje żądaną funktorialność tylko dla otwartych podschematów a ogólniejsze twierdzenie wymaga delikatnego sformułowania i nietrywialnej pracy sprawdzającej m.in. istnienie różnych zgodnych podniesień morfizmu Frobeniusa. W sytuacji używamej przez autora wystarczy taką funktorialność sprawdzić dla otwartych włożeń, gdzie prosto wynika to z dowodu [DI87, Théorème 2.1]. Po sprawdzeniu funktorialności i sprawdzeniu szczegółów dowodu Twierdzenia 3.4.1, otrzymuje się rezultat bez potrzeby zakładania, że $p > \dim X$.

W pracy znajduje się pewna liczba misprintów i drobne usterki. W wielu miejscach autor pisze "e.g." nie stawiając nigdzie przecinków mimo iż musi się on pojawić przed "e.g." (a w amerykańskim angielskim też po). Z innych przykładów są też następujące misprinty:

Dowód Stwierdzenia 3.1.1 zawiera odnośnik do (1.16) mimo iż autorowi chodziło zapewne o (1.19).

str. 11, l. -7, jest "multplication", powinno być "multiplication"

str. 23 drugie zdanie w 1.2.5 jest niedokończone

str. 25, l.-1 jest "E_1^{ij}", powinno być "E_2^{ij}"

str. 40, l.-3, autor myli "ramification locus" (na X) z "branch locus" (na Y) pisząc o "wild ramification locus" jako punktach na Y.

str. 42 l.-13 jest "cetain", powinno być "certain"

str. 44, l.3 jest "," zamiast kropki

str. 44, l.-8 brak "the" przed "Riemann–Roch"

str 45, l.-8 jest "Propostion" zamiast "Proposition"

Jednak liczba usterek w stosunku do długości rozprawy jest mała. Sam sposób prezentacji wyników i jej jakość oceniam wysoko.

Każdy z Rozdziałów 2, 3 i 4 jest przedmiotem osobnej pracy autora. Rozdział 2 zawiera uogólnienie wyników pracy [Gar18] opublikowanej w *Int. J. Number Theory*, z krzywych eliptycznych do rozmaitości abelowych. Najdłuższy Rozdział 3 został wysłany do publikacji a Rozdział 4 jest oparty na pracy [Gar19b] opublikowanej w *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*. Nie są to czasopisma z najwyższej półki, ale są to solidne czasopisma specjalistyczne z teorii liczb. Niestety, nadmierny pośpiech z publikacją jest oznaką obecnych czasów gdy wymaga się od doktorantów w Polsce publikacji przed zakończeniem doktoratu. Widać to po rozprawie gdzie wyniki z rozprawy są niekiedy dużo ciekawsze od tych opublikowanych, ale ich dalsza publikacja może być problematyczna, bo nie stanowią odrębnej całości.

Rozprawa wymagała od autora biegłego opanowania dużej liczby technik z algebraicznej teorii liczb, algebry homologicznej i geometrii algebraicznej. Aparat matematyczny wykorzystany w dowodach jest bardzo różnorodny a dowody otrzymanych rezultatów są pomysłowe i pokazują głębokie zrozumienie najróżniejszych punktów widzenia na rozmaitości abelowe. W rozprawie znajduje się też omówienie różnych rezultatów związanych z problemami rozważanymi przez autora, wskazując na głębsze zrozumienie tematyki i bardzo dobrą znajomość literatury (z wytkniętym powyżej wyjątkiem dotyczącym pracy Mehty–Srinivasa). Same rozważane problemy są trudne i klasyczne i są przedmiotem zainteresowania bardzo mocnych matematyków. Bardzo ciężko jest w tej tematyce uzyskać nowe spektakularne rezultaty. Mimo to autorowi udało się otrzymać ciekawe rezultaty. Na wyróżnienie zasługują tutaj zwłaszcza rezultaty z ostatniego rozdziału pracy dotyczące grupy klas ciał podziału rozmaitości abelowej. Z kolei rezultaty z Rozdziału 3 świadczą o tym, że autor potrafi stawiać i atakować nowe problemy, które są jednak bardzo mocno związane z klasyczną tematyką grup automorfizmów gładkich krzywych rzutowych w dodatniej charakterystyce. Mimo ich nietrywialności i trudności dowodów, wyniki z Rozdziału 2 oceniałbym tu trochę niżej od pozostałych.

Uważam, że **przedstawiona rozprawa doktorska z nadwyżką spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i określone w art 13. ustawy będącej załącznikiem do *obwieszczenia Marszałka Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 15 września 2017 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki*.** W związku z tym wnoszę o dopuszczenie mgr Jędrzeja Garnka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Jednocześnie w związku z tym, że autor wykazał się dużą wiedzą i pomysłowością atakując trudne problemy **wnoszę o uznanie rozprawy za wyróżniającą**.

A. Langer