UNIVERSITY OF WARSAW
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ul. Banacha 2
02–097 Warszawa, Poland
e-mail: imat@mimuw.edu.pl

Tel. (22) 554 44 81, 82, 83
Fax (22) 554 43 00
http://www.mimuw.edu.pl

Warszawa dn. 4. 02. 2014

dr hab. Jacek Pomykała
profesor Wydziału MIM
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Karola Gierszewskiego nt.

Oszacowanie dolne dla współczynników Dirichleta odwrotności funkcji z wybranych podklas klasy Selberga

dla Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Przedmiotem badan doktoranta są dolne oszacowania typu Ω dla wartości średnich współczynników Dirichleta odwrotności funkcji z wybranych podklas klasy Selberga. Były one badane przez wielu autorów, m. in. w pracach [2], [17], [22], [25], [28] (wg numeracji w bibliografii rozprawy). Bardzo ładne i konkretne wprowadzenie do tematyki rozprawy z wyszczególnieniem głównych jej celów podstawowych definicji i wyników pomocniczych znajduje się w rozdziale 1 przedstawionej rozprawy.

Główny wynik rozprawy doktorskiej stanowią Twierdzenia 3.1 i 3.2 rozdziału 3 pracy dotyczące Ω –rezultatów dla średnich wartości arytmetycznej funkcji Möbiusa $\mu = \mu_E$ krzywej eliptycznej E nad ciałem liczb wymiernych Q.

Część wyników zawartych w pracy jest dowodzona w ogólności dla współczynników Dirichleta odwrotności funkcji ze zdefiniowanej w pracy podklasy klasy Selberga S(Γ). Wyniki typu Ω już w przypadku klasycznej zeta funkcji były przedmiotem zainteresowania wielu wybitnych matematyków, a w podstawowej monografii E. C. Titchmarsha na temat zeta funkcji Riemanna stanowią znaczącą część rozdziału 14, gdzie można m. in. znaleźć dowód, że odpowiednia średnia (do poziomu x) jest rzędu $\Omega(x^{1/2})$.

Twierdzenia 3.1 i 3.2 dotyczą średnich ważonych μ_E -M(*w*) (do poziomu x) z wagami *w* typu 1, $(x/n)^{1/2}$, lub $[(x/n)^{1/4}\cos a\,(x/n)^{1/2}]$ oznaczanymi dalej M(1), $M[(x/n)^{1/2}]$ i $M[(x/n)^{1/4}\cos a\,(x/n)^{1/2}]$ odpowiednio. W pierwszym z nich autor stwierdza, że co najmniej jedna z nich jest rzędu $\Omega_{+/-}(x^{1/2}g(x))$, gdzie *g* jest dowolną funkcją klasy C^1, monotonicznie rosnącą od pewnego miejsca i spełniającą warunki: $g'(x) = O(x^{-1})$ oraz *g*(x)

=o(log log log x), gdy x dąży do nieskończoności. W symbolu $\Omega_{+/-}$ (występującym w oszacowaniu $M[(x/n)^{1/2}]$) znak +/- zależy od znikania lub nieznikania unormowanej L-funkcji $F(s)= L(s+1/2, E)$ krzywej eliptycznej E w punkcie krytycznym s=1/2 (i wtedy w przypadku gdy F(1/2)=0 mamy rząd $\Omega_+(x^{1/2}\log x)$). Twierdzenie 3.2 wyraża podobną konkluzję tym razem ograniczoną jedynie do 2 rodzajów średnich, a mianowicie $M[(x/n)^{1/2}]$ i $M[(x/n)^{1/4}\cos a\, (x/n)^{1/2}]$, dla dowolnej niezerowej, rzeczywistej wartości a i symbolem $\Omega(x^{1/2}g(x))$. Ten wynik jest naturalnym uogólnieniem wcześniejszego wyniku Kaczorowskiego dla klasycznej funkcji Möbiusa.

Powyższe twierdzenia wynikają z dowodzonych w rozdziale 3 pracy ograniczeń górnych i dolnych (typu Ω) dla odpowiednich średnich ważonych sum wartości funkcji Möbiusa dla krzywej eliptycznej E (Lematy 3.31 i 3.34). W obu przypadkach zakładamy, że zachodzi oszacowanie typu $M(1) << x^{1/2}g(x)$, gdzie funkcja g spełnia warunki podane powyżej. Wtedy zachodzą ograniczenie górne (z tym samym g) dla średnich postaci: $M[(x/n)^{1/4}]$ oraz $M[w_1-w_2]$, gdzie $w_1= (x/n)^{1/4}\cos [(2/Q_E) (x/n)^{1/2}]$, natomiast $w_2= x^{1/4} J(n,x)$, gdzie $J(n,x)=\mathrm{Re}\{n^{-1/4}\exp (-i [(1/Q_E) (x/n)^{1/2}] -1)\}$. Tutaj $Q_E= N_E^{1/2}/2\pi$, gdzie N_E jest przewodnikiem krzywej E. Stąd wynika, że jeśli dla w_1 zachodzi powyższe oszacowanie to także dla w_2. W takim przypadku w oparciu o Lemat 3.6 szacujący człon reszty dla odpowiedniego szeregu wartości funkcji Möbiusa z wagami, autor dowodzi, że zachodzi bardziej uniwersalne oszacowanie górne dla szeregu z wagą typu $w_1' = [(x/n)^{1/4}\cos a\, (x/n)^{1/2}]$ przez $<<_a x^{1/2}g(x)$ i podobnie dla wagi w_2, gdzie a jest dowolną niezerową stałą rzeczywistą.

Z drugiej strony dla oszacowania typu Ω autor wykorzystuje dodatkowo założenie, ż $M(w_2)= M[x^{1/4} J(n,x)] << x^{1/2}g(x)$ co daje z uwagi na górne oszacowanie dla szeregu z wagami J(n,x) i Lemat 3.31 kluczową w dowodzie informację, że

$$E\, M[(x/n)^{1/2}] + Dx^{1/2} \log x = \Omega_{+/-}(x^{1/2}g(x)),$$

gdzie $g(x)$=o(log log log x) spełnia warunki określone powyżej. Tutaj E i D są stałymi absolutnymi związanymi z krzywą eliptyczną E/Q i co więcej D=0 gdy L-funkcja krzywej F(s) nie znika w punkcie s=1/2. Zatem jeśli przyjmiemy, że nie zachodzi warunek typu Ω ani dla średniej M(1) ani $M(w_1)=M\{(x/n)^{1/4}\cos [(2/Q_E) (x/n)^{1/2}\}$ to są one majoryzowane z góry przez $O\{ x^{1/2}g(x)\}$, co przy wyborze $g(x)$=o(log log log x) daje sprzeczność w obliczu Lematu 3.31, rozumowania zastosowanego w dowodzie Lematu 3.34 i faktu, że oszacowanie $M[(x/n)^{1/2}] << x^{1/2}g(x)$ pociąga za sobą oszacowanie $M(1) << x^{1/2}g(x)$ (patrz Lemat 3.3). To jest w skrócie szkic argumentacji przeprowadzonej przez autora w dowodzie drugiego głównego Twierdzenia 3.2. rozprawy. Warto dodać, że warunki $M(1) << x^{1/2}g(x)$, i $M(w_2)= M[x^{1/4} J(n,x)] << x^{1/2}g(x)$ z funkcją $g(x)$ << log log x pociągają za sobą prawdziwość hipotezy Riemanna dla funkcji F (Lemat 3.21).

Znaczącą część rozdziału 3 rozprawy stanowi dowód zasadniczego wyniku rozprawy, tj. Ω –rezultatu (patrz Lemat 3.31) postaci:

$$M[x^{1/4} J(n,x)] + E\, M[(x/n)^{1/2}] + Dx^{1/2} \log x = \Omega_{+/-}(x^{1/2}g(x))$$

Metoda dowodu bazuje na ogólnym wyniku Kaczorowskiego i Wiertelaka dotyczącego oszacowania typu Ω dla specjalnej klasy funkcji U. Autor rozprawy dowodzi wyniku warunkowego postaci:
jeśli $M[x^{1/4} J(n,x)] \ll x^{1/2}g(x)$, oraz $g \ll \log\log x$ to odpowiednio zdefiniowana całka G(F, z) dla (zmodyfikowanej) transformaty Mellina m(F, w) odwrotności funkcji F należy do klasy U (patrz Lemat 1.15).
Duża część rozdziału 3 rozprawy poświęcona jest badaniu G(F,x) a zwłaszcza jej asymptotyki dla $|x|$ dążącego do nieskończoności. Do tego autor wykorzystał główny wynik rozdziału 2 polegający na podaniu przedłużenia meromorficzngo funkcji m(F,w) na całą płaszczyznę zespoloną wyznaczając odpowiednie osobliwości i residua w jej biegunach. Ten wynik jest ogólny dla dowolnej funkcji L w podklasie Selberga $S(\Gamma)$. Dla wyznaczenia asymptotyki G(F,x) autor potrzebował i wykorzystał wzór jawny dla m(F, w) w przypadku gdy $F(s)= L(s+1/2, E)$ jest L-funkcją krzywej eliptycznej E/Q udowodniony przez A. Łydkę. Autor rozprawy potrafił dobrze kontrolować odpowiednie składniki G(F, x) pochodzące od odpowiednich wkładów do m(F,w) pod warunkiem, że średnie ważone M(1) oraz $M[x^{1/4} J(n,x)]$ są $\ll x^{1/2}g(x)$, dla $g(x) \ll \log\log x$ (co pociąga prawdziwość hipotezy Riemanna dla L- funkcji F) (Lemat 3.27). W konsekwencji przy tych samych założeniach funkcja G(F, x) należy do klasy U (Lemat 3.30) i stosując ogólne twierdzenie Kaczorowskiego i Wiertelaka autor ostatecznie dowodzi wspomnianego już kluczowego w swojej pracy Ω –rezultatu (Lemat 3.31) dla sum ważonych funkcji Möbiusa $\mu= \mu_E$ krzywej eliptycznej E nad ciałem liczb wymiernych Q.

Resumując uważam, że wyniki prezentowane w rozprawie są matematycznie bardzo zaawansowane i ważne dla współczesnej teorii liczb. Autor wykazuje bardzo dobrą orientację w tej dziedzinie, co wskazuje zarówno na wysoki poziom jego wiedzy i jak i kreatywność w rozwiązywaniu trudnych problemów badawczych. Podjął w rozprawie bardzo ambitne zadanie i moim zdaniem znakomicie się z niego wywiązał. Poziom naukowy rozprawy jest bardzo dobry, a uzyskane wyniki nowe i oryginalne. Część prezentowanych w rozprawie wyników została już przyjęta do publikacji w Functiones et Approximatio.

Praca jest bardzo techniczna jednak autor ułożył wyniki w sposób kompetentny choć miejscami brakowało mi komentarzy ułatwiających czytanie pracy. Pragnę też zwrócić uwagę na drobne usterki rozprawy, które można łatwo poprawić:
-Na str. 35 pierwsza nierówność w dowodzie Lematu 3.6 jest nieprawdziwa
-Na str. 21 zbieżność pierwszego szeregu implikuje zbieżność pozostałych dwóch
-Jeśli dziedziną funkcji g są liczby rzeczywiste dodatnie (patrz str. 31) to w dalszych oszacowaniach powinno się konsekwentnie pisać $g(|x|)$ (np. str. 86)

Resumując uważam, że rozprawa *Oszacowanie dolne dla współczynników Dirichleta odwrotności podklas klasy Selberga* jest bardzo dobra i spełnia wymagania ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym. W związku z tym przedstawiam Radzie

Wydziału Matematyki i Informatyki UAM wniosek o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie magistra Karola Gierszewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jacek Pomykała