Klasyczne operatory na przestrzeni funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej

Celem rozprawy jest zbadanie operatorów działających na przestrzeni funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej $\mathscr{A}(\mathbb{R})$. Dokładniej, badamy operatory mnożnikowe Hadamarda, operatory Hankela i operatory Toeplitza.

Badając operatory mnożnikowe Hadamarda skupimy się na problemie generowania silnie ciągłej półgrupy przez te operatory. W oparciu o teorię rozwiniętą przez P. Domańskiego i M. Langenbrucha, podajemy twierdzenie o generatorach silnie ciągłej półgrupy dla mnożników Hadamarda. Następnie stosujemy je do klasycznych przykładów mnożników. Pierwszą grupą badanych mnożników są operatory różniczkowe Eulera skończonego rzędu, $E = \sum_{n=0}^{N} a_n \theta^n$, $\theta f(x) = x f'(x)$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Pokazujemy, że operator różniczkowy Eulera pierwszego rzędu $E = a\theta + bI$ generuje silnie ciągłą półgrupę wtedy i tylko wtedy gdy $a \in \mathbb{R}$. Następnie wskazujemy na inne przypadki gdy operator różniczkowy Eulera skończonego rzędu nie generuje silnie ciągłej półgrupy. Niestety, nie udało nam się uzyskać pełnej klasyfikacji generatorów wśród operarorów różniczkowych Eulera. Innym multiplikatorem, który rozważamy jest operator Hardy'ego $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty f(y)dy$. Pokazujemy, że każdy operator postaci $M = \sum_{n=0}^{N} a_n H^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, generuje silnie ciągłą półgrupę.

Następnie badamy operatory Hankela. Podajemy reprezentację całkową operatorów Hankela i dowodzimy, że przestrzeń operatorów Hankela na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$ z topologią indukowaną z $L_b(\mathscr{A}(\mathbb{R}))$ jest topologicznie izomorficzna z przestrzenią funkcji całkowitych $H(\mathbb{C})$. Ponadto badamy spektrum oraz inne własności operatorów Hankela na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$. Pokazujemy, że widmo operatora Hankela $H_\varphi \colon \mathscr{A}(\mathbb{R}) \to \mathscr{A}(\mathbb{R})$ równe jest widmu punktowemu, a ciąg wartości własnych należy do przestrzeni ciągów szybko malejących s.

Ostatnim tematem roprawy sa operatory Toeplitza na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$. P. Domański i M. Jasiczak pokazali, że operator Toeplitza na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$ podobnie jak klasyczny operator Toeplitza na $H^2(\mathbb{T})$, jest kompresją operatora mnożenia. Dokładniej, operator $T \colon \mathscr{A}(\mathbb{R}) \to \mathscr{A}(\mathbb{R})$ jest operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $F \in \mathcal{X}$ taka, że $T = \mathcal{C} M_F$. Przestrzeń symboli $\mathcal{X}$ definiujemy jak granicę induktywną przestrzeni Frécheta

$$\mathcal{X} = \operatorname{ind}_{U,K} H(U \setminus K),$$

gdzie U przebiega wszystkie zespolone otoczenia prostej rzeczywistej, a K przebiega wszystkie zwarte podzbiory $\mathbb{R}$. Symbol $\mathcal{C}$ oznacza odpowiednią transformatę Cauchy'ego, które jest również projekcją z $\mathcal{X}$ na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$. Operator M_F oznacza operator mnożenia przez F. W pracy podajemy pełną klasyfikację lewostronnie odwracalnych operatorów Toeplitza, co wraz z wynikiem M. Jasiczaka dotyczącym prawostronnie odwracalnych operatorów Toeplitza, rozwiązuje problem jednostronnej odwracalności operatorów Toeplitza.

Komutator dwóch operatorów A i B dany jest wzorem $[A, B] := AB - BA$. W pracy podajemy pełną charakteryzację skończenie wymiarowych komutatorów operatorów Toeplitza na $\mathscr{A}(\mathbb{R})$.

Anna Golińska