

Ryszard Szwarc  
Instytut Matematyczny  
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 9 lipca 2019

**Recenzja rozprawy doktorskiej  
"Rozwiązanie problemu istnienia podprzestrzeni  
niezmienniczej dla operatorów liniowych ciągłych  
na niearchimedesowskich przestrzeniach Köthe'go"  
mgr. Henryka Kasprzaka**

Rozprawa doktorska jest rozszerzeniem artykułu kandydata *The invariant subspace problem for non-Archimedean Köthe spaces*. J. Math. Anal. Appl. 453 (2017), no. 2, 1086–1110, *Corrigendum* J. Math. Anal. Appl. 459 (2018), no. 2, 1296–1299.

Tekst zaczyna się od krótkiego wstępu, w którym wyjaśnione są podstawowe pojęcia potrzebne w dalszej części.

Rozprawa doktorska dotyczy problemu istnienia nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych dla ograniczonych operatorów liniowych na nieskończone wymiarowych liniowych metrycznych przestrzeniach zupełnych. Najślynniejszy problem dotyczący przestrzeni Hilberta pozostaje nadal otwarty. W 1987 Per Enflo w pracy w *Acta Mathematica* podał negatywne rozwiązanie problemu dla przestrzeni Banacha, wskazując konkretną przestrzeń i operator na niej, bez nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych. W pracach z 1984 i 1986 Charles Read pokazał, że problem ma negatywne rozwiązanie dla przestrzeni  $\ell^1$ . Opierając się na metodach Reada, w 2010 Wiesław Śliwa podał prostą konstrukcję operatora bez nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych na  $\ell^1$ . W 2008 Śliwa udowodnił, że dla przestrzeni Banacha przeliczalnego typu nad ciałem niearchimedesowskim problem ma negatywne rozwiązanie, rozwiązując zagadnienie postawione w 1992 przez Arnouda van Rooija i Wilhelmusa Shikhofa.

Pierwsze pozytywne rozwiązanie problemu podali w 2009 Spiros Argyros i Richard Haydon w pracy opublikowanej w *Acta Mathematica*, konstruując przestrzeń Banacha, na której każdy liniowy operator ograniczony ma postać  $\lambda I + K$ , gdzie  $K$  jest operatorem zwartym. W szczególności każdy taki operator ma nietrywialną domkniętą podprzestrzeń niezmienniczą, zgodnie z twierdzeniem z pracy Nachmana Aronszajna i Kennana Smitha z 1954 opublikowanej w *Annals of Mathematics*.

Rozprawa doktorska Henryka Kasprzaka dotyczy negatywnego rozwiązania problemu podprzestrzeni niezmienniczych dla specjalnej klasy

lokalnie wypukłych przestrzeni liniowych zwanych niearchimedesowskimi przestrzeniami Köthego. Są to przestrzenie ciągowe o współczynnikach z ciała niearchimedesowskiego  $K$ , z rosnącą rodziną norm wyznaczonych przez rodzinę dodatnich ciągów  $b^k = \{b_n^k\}_{n=1}^\infty$ . Każda z norm ma postać supremum modułu wyrazów ciągu po pomnożeniu przez wagę  $b_n^k$ .

W pierwszej części rozprawy autor rozwiązuje problem dla ciągów postaci potęgowej tzn.

$$b_n^k = r^{\alpha_n^k},$$

gdzie  $r > 1$  jest wartością waluacji elementu z ciała  $K$  oraz wykładniki spełniają warunek

$$\alpha_n^k + 1 \leq \alpha_n^{k+1}.$$

Przy tych założeniach podana jest konstrukcja szerokiej rodziny operatorów bez podprzestrzeni niezmienniczych. Każdy operator zależy od wielu parametrów. Podany jest ogólny schemat uogólniający pracę kandydata z 2017. Poprzez wprowadzenie nowych elementów autor uzyskał większą swobodę w konstruowaniu przestrzeni i operatorów. Dodatkowo zniknął kłopot z poprawnością Lematu 1.6 z pracy z 2017. Ten lemat spowodował konieczność opublikowania korekty w 2018.

W drugiej części poprzez specyfikację parametrów autor otrzymuje operatory w znacznie prostszej postaci.

Ostatnia część rozprawy oparta jest na pracy opublikowanej w 2017 w *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

Z lektury pracy doktorskiej wynika, że autor jest zdolny do przeprowadzania złożonych obliczeń wymagających wiedzy i uwagi. Praca nie jest łatwa w czytaniu. Zawiera głównie suche dowody. Brakuje mi opisowego podejścia do podanych konstrukcji i wyjaśnienia znaczenia założeń. Przydatne byłyby intuicyjne przybliżenia rozumowań poprzedzające ściśle dowody i występujące tam obliczenia.

W mojej opinii rozprawa spełnia ustawowe wymagania. Zostało rozwiązane konkretne zagadnienie dla przestrzeni Köthego, związane z ważnym problemem w wypadku przestrzeni Banacha. Wnoszę o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Rl Sc