prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski
Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej
"O pewnych uogólnieniach funkcji prawie okresowych i ich zastosowaniach"
przedstawionej przez pana mgr Adama NAWROCKIEGO

Teoria funkcji okresowych rozwijana jest ok. ponad 90 lat i wciąż stanowi źrodło istotnych rozważań matematycznych. Badanie funkcji prawie okresowych zapoczątkował H. Bohr w latach 30-tych XX-go wieku. Zdefiniował on pojęcie funkcji jednostajnie okresowej i ustalił podstawowe własności tej klasy funkcji. Obecnie znane jest wiele klas funkcji prawie okresowych: m. in. w sensie Stiepanowa, Weyla, Besicovitcha, Lewitana (tzw. model LAP), $\mu-$ prawie okresowych, że wymienię najważniejsze. Badane są nie tylko różnego typu klasy takich funkcji, ale i sytuacje, gdy odpowiedź układu $D[y] = f$ jest (albo nie jest) w tej samej klasie, co funkcja wejścia. Funkcji prawie okresowych używa się w opisie modeli matematycznych m. in. sieci elektrycznych, sieci neuronowych, komórek nerwowych czy kwazikryształów. Za te ostatnie była przyznana w 2011 nagroda Nobla z chemii, a wyrafinowany model matematyczny opracował Y. Meyer.

W tematykę funkcji prawie okresowych dobrze wpisuje się rozprawa doktorska pana magistra Adama Nawrockiego. Składa się ona ze Wstępu, sześciu rozdziałów oraz spisu literatury i terminów. Rozdziały są następujące:
- **Wstęp;**
- **Rozdział 1**: Pojęcia wstępne;
- **Rozdział 2**: Relacje między wybranymi klasami funkcji okresowych;
- **Rozdział 3**: Operator splotu;
- **Rozdział 4**: Prawie okresowe rozwiązania równania różniczkowego liniowego;
- **Rozdział 5**: Wartość średnia funkcji $\mu-$ prawie okresowych;
- **Rozdział 6**: Model LIF.

Tytuły są adekwatne do treści.

Przejdę teraz do dokładnego omówienia treści rozprawy pana Nawrockiego i uzyskanych przez niego wyników. W **Rozdziale 1** omówione są podstawowe rodzaje funkcji okresowych, ich własności oraz przypomniane ułamki łańcuchowe i twierdzenie Liouville'a. Ułamki łańcuchowe pan Nawrocki wykorzystuje w bardzo pomysłowy sposób do badania operatora splotu i do konstrukcji pewnych przykładów. Użycie ich stanowi dla mnie pewne zaskoczenie, nigdzie bowiem ich wykorzystania w równaniach różniczkowych nie widziałem. Poza tym muszę zwrócić uwagę, że **Definicje 1.10** i **1.11** opisują tę samą sytuację, więc jedna z nich jest zbyteczna. Być może w literaturze funkcjonują dwie terminologie, ale to powinno być jakoś zaznaczone.

Rozdział 2 poświęcony jest porównaniu klasy ciągłych funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana z funkcjami $\mu-$ prawie okresowych względem miary Lebesgue'a μ. Klasy te nie pokrywają się, co ilustrują odpowiednie przykłady. Jeden znich rozstrzyga też, postawiony przez Basita i Günzlera, problem istnienia jednostajnie ciągłej funkcji prawie automorficznej, która nie jest jednostajnie prawie okresowa. Jest to jednak poza głównym nurtem rozprawy.

W **Rozdziale 3** badany jest operator splotu

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

dla funkcji $\mu-$ prawie okresowych $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz prawie okresowych w sensie Lewitana (LAP). Szczególną uwagę doktorant poświęcił własnościom splotu z funkcją

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} \exp(\lambda x) & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

gdzie $\lambda < 0$. W **Twierdzeniu 3.4** podany jest warunek konieczny na to, aby dla funkcji $\mu-$ prawie okresowej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ splot $f * g_\lambda$ był funkcją określoną dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i jednostajnie prawie okresową. Z kolei **Twierdzenie 3.5** podaje warunek dostateczny na to, aby splot $f * g_\lambda$ nie był $\mu-$ prawie okresowy. Oba te wyniki są zilustrowane przykładami takich funkcji i niemożności osłabienia założeń.

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ typu LAP oraz całkowalnej $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ splot $f * g$ jest na ogół funkcją LAP. Tak jest dla funkcji ograniczonej f lub g posiadającej zwarty nośnik. Sytuacje te opisują **Twierdzenia 3.6** i **3.7**. W przypadku, gdy funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ typu LAP spełnia warunek

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\, dt < \infty \tag{1}$$

to splot $f * g_\lambda$ jest dobrze zdefiniowaną i ograniczoną funkcją LAP. Jeśli z kolei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest taką funkcją lokalnie całkowalną, że

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+1} f(t)\, dt = \infty \tag{2}$$

oraz splot $f * g_\lambda$ istnieje dla każdego $x \in \mathbb{R}$ to nie jest on ograniczony i nie jest LAP. Te dwa wyniki opisane są w **Twierdzeniach 3.8** i **3.9**. Ponadto **Przykład 3.7** pokazuje, że istnieją funkcje LAP, które nie spełniają warunku (2). Konsekwencją powyższych wyników są **Wnioski 3.1 - 3.4**, które wiążą warunek (1) z własności LAP dla splotu $f * g_\lambda$.

Kolejnym tematem, który pan Nawrocki podejmuje w tym rozdziale jest badanie asymptotycznych własności funkcji

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)}. \tag{3}$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Są to funkcje $\mu-$ prawie okresowe i LAP. Za najistotniejsze w Rozdziale 3 uważam następujące wyniki:

Twierdzenie 3.10: *Jeśli α jest niewymierną liczbą algebraiczną stopnia n, to dla $x > \frac{\pi}{2}$ mamy*

$$\frac{1}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)} \ll x^{2(n-1)}.\blacksquare$$

Twierdzenie 3.11: *Dla dowolnej funkcji* $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ oraz każdych $a \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje α takie, że

$$|a - \alpha| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \limsup_{x \to \infty} \frac{g(x)}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)} = \infty.\blacksquare$$

W dowodzie powyższych wyników wykorzystane są ułamki łańcuchowe i twierdzenie Liouville'a. Wynika z nich w szczególności, że:

a) dla *niewymiernych liczb algebraicznych α stopnia n* splot $\frac{1}{2+\cos x+\cos(\alpha x)} * g_\lambda$ *jest zawsze określony*;

b) *dla każdych $a \in R$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $\alpha \notin \mathbb{Q}$ takie, że*

$$|a - \alpha| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{\exp(-\lambda t)}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)} = \infty.\blacksquare$$

Operator splotu używany jest w **Rozdziale 4** do badania, czy dla funkcji typu LAP lub $\mu-$ prawie okresowej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rozwiązania równania różniczkowego

$$y' - \lambda y = f(x), \quad \lambda < 0. \tag{4}$$

też są odpowiednich klas. Naturalnym kandydatem na rozwiązanie jest na ogół funkcja $y = f * g_\lambda$, o ile splot ten jest dobrze określony. Przeformułowanie **Twierdzeń 3.4** i **3.5** daje **Twierdzenia 4.1** i **4.2** orzekające dla jakich funkcji $\mu-$ prawie okresowych $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ równanie (4) posiada lub nie posiada rozwiązanie $\mu-$ prawie okresowe. Podobnie **Twierdzenia 3.8** i **3.9** tłumaczą się na **Twierdzenia 4.3** i **4.4** pisujące warunki, kiedy dla funkcji typu LAP $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ równanie (4) posiada lub nie posiada rozwiązanie tego typu. Może się jednak zdarzyć, że dla funkcji typu LAP i $\mu-$ prawie okresowej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ splot nie istnieje, a mimo to równanie (4) posiada rozwiązanie. Taka, dość zaskakująca sytuacja, opisana jest w **Przykładzie 4.1**. Jako przykład równania (4) omawiane jest równanie

$$y' - \lambda y = \begin{cases} \frac{1}{w(x)} & \text{gdy } w(x) \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } w(x) = 0, \end{cases}, \tag{5}$$

gdzie $w(x) = \sum_{n=1}^{k} (a_n \sin(\lambda_n x) + b_n \cos(\lambda_n x)) \neq \text{const}$ jest uogólnionym wielomianem trygonometrycznym. Zachodzi wtedy następujące:

Twierdzenie 4.7:

(i) *jeśli dla pewnego x_0 mamy $w(x_0) = 0$, to (5) nie jest dobrze określone*;

(ii) *jeśli* $\inf |w(x)| > 0$, *to* f *jest funkcją jednostajnie prawie okresowe i* (5) *posiada rozwiązanie tej klasy*;

(iii) *jeśli dla każdego* x *jest* $|w(x)| > 0$ *oraz* $\inf |w(x)| = 0$, *to* f *jest funkcją typu* LAP *i* $\mu-$ *prawie okresową, a* (5) *nie posiada rozwiązań typu* LAP *i* $\mu-$ *prawie okresowych.*■

Szczególnym przykładem (5) i jest równanie

$$y' - \lambda y = \frac{1}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)},$$

gdzie $\lambda < 0$ i $\alpha \notin \mathbb{Q}$, które nie posiada rozwiązań typu LAP i $\mu-$ prawie okresowych.

Rozdział 5 poświęcony jest badaniu wartości średniej

$$\mathcal{M}\{f\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

funkcji $\mu-$ prawie okresowych i lokalnie całkowalnych $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o ile istnieje). $\mathcal{M}\{f\}$ istnieje dla funkcji S^p- prawie okresowych, ale nie musi istnieć dla funkcji ciągłych i $\mu-$ prawie okresowych (patrz **Przykład 5.1**). Z drugiej strony w **Przykładzie 5.2** pokazana jest funkcja, która posiada wartość średnią, ale nie jest S^1- prawie okresowa. Warunek dostateczny na istnienie $\mathcal{M}\{f\}$ dla funkcji funkcji lokalnie całkowalnej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i $\mu-$ prawie okresowej opisany jest w **Twierdzeniu 5.1**. Kolejne dwa rezultaty (**Twierdzenia 5.2** i **5.3**) orzekają, że dla funkcji S^1- prawie okresowych $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ oraz dla $\mu-$ okresowych wartość średnia $\mathcal{M}\{f\} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ $\mu-$ prawie wszędzie.

Kwintesencją rozprawy jest **Rozdział 6**, w którym badany jest tzw model LIF (leaky integrate-and fire). Jest to model dany przez równanie różniczkowe

$$y' + \sigma y = f(x), \quad \mu - \text{ prawie wszedzie w } \mathbb{R} \tag{6}$$

oraz warunek

$$y(s) = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to s^+} y(x) = 0. \tag{7}$$

Zakłada się do końca, że f jest funkcją lokalnie całkowalną oraz $\sigma \geq 0$. Warunek (7) należy rozumieć tak, że jeśli w pewnym momencie s trajektoria osiągnie wartość 1, to rozwiązanie przeskakuje do 0. Model ten badali m. in. F.C. Hoppensteadt, P. Kasprzak, J. P. Keener, W. Marzantowicz, J. Rinzel, J. Signerska, a ostatnio zainteresował się nim p. Nawrocki. Istnienie rozwiązań i ich własności nie są łatwe do opisu, gdyż trudno jest opisać klasę dopuszczalnych trajektorii. Przy badaniach modelu LIF rozważa się tzw. "*firing map*":

$$\Phi(x) = \inf\left\{ x_* > x : \exp(\sigma x) \leq \int_x^{x_*} (f(t) - \sigma) \exp(\sigma t)\, dt \right\}$$

oraz "*displacement map*": $\Psi(x) = \Phi(x) - x$.

Odwzorowania Φ i Ψ są poprawnie zdefiniowanie dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\limsup_{x \to \infty} \int_0^x (f(t) - \sigma) \exp(\sigma t)\, dt = \infty.$$

Stanowi to treść **Twierdzenia 6.1**. Taka sytuacja ma w szczególności miejsce, gdy wartość średnia $\mathcal{M}\{f\} > \sigma$, co jest wykazane we **Wniosku 6.1**.

Załóżmy teraz, że $f(x) - \sigma > 0$ dla $\mu-$ prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $\Phi(x_0)$ jest zdefiniowane dla pewnego x_0, to Φ jest dobrze zdefiniowane dla wszystkich $s < x_0$ oraz $\Phi(s) < \Phi(x_0)$ (vide **Lemat 6.1**). Z kolei **Twierdzenie 6.3** orzeka, że gdy $\Phi(x)$ jest zdefiniowane dla wszystkich x to $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest jednostajnie ciągłe.

Jeśli chodzi o odwzorowanie Ψ to **Twierdzenie 6.2** podaje warunki dostateczne na to, aby było ono jednostajnie ciągłe i ograniczone. Wtedy również $\inf \Psi(x) > 0$.

Dla modelu LIF bada się zachowanie funkcji Φ i Ψ, gdy funkcje wejścia f są $\mu-$ prawie okresowe. Sprawę poprawnej określoności odwzorowania Φ rozstrzyga **Twierdzenie 6.4.**

Dla funkcji $\omega-$ okresowej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **Twierdzenie 6.5** podaje własności $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) + \omega$ oraz $\omega-$ okresowość Ψ, o ile Φ i Ψ są dobrze zdefiniowane na $\mathbb{R}$, a **Twierdzenie 6.6** omawia sytację, gdy $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest granicznie okresowa. Orzeka ono, że jeśli:

$$\text{istnieje takie } \varsigma > 0, \text{ że } f(x) - \sigma \geq \varsigma \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

to Ψ jest granicznie okresowe. Z kolei **Twierdzenie 6.7**. powiada, że gdy warunek (8) jest spełniony dla $\mu-$ prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$, to Ψ jest jednostajnie prawie okresowe. Wyniki te są matematycznie ładne, a dowody dość eleganckie. Ten cykl rozważań kończą dwa bardzo pracowite i pomysłowe przykłady: **Przykład 6.2**, który pokazuje funkcję $\mu-$ prawie okresową, dla której Ψ nie dziedziczy tej własności oraz **Przykład 6.3**, gdzie skonstruowano funkcję $\mu-$ prawie okresową $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest S^p- prawie okresowa, ale tę własność posiada Ψ. Obie te konstrukcje świadczą dobrze o potencjale badawczym doktoranta i jego dojrzałości matematycznej.

Rozprawę kończą rozważania dotyczące odwzorowań: "*firing rate*"

$$\mathrm{Fr}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\Phi^n(x)},$$

liczby obrotów w punkcie x dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varrho(f, x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$$

oraz punktowej liczby obrotów

$$\varrho_p(f) = \{\varrho(f, x) : \ x \in \mathbb{R} \text{ dla których } \varrho(f. x) \text{ istnieje}\}.$$

Oczywiście pod warunkiem, że te granice istnieją (dopuszcza się $+\infty$). Trochę brakuje tu interpretacji geometrycznej powyższych pojęć, co wyjaśniałoby ich nazwę oraz potrzebę rozważania. Ogólnie rzecz biorąc odwzorowanie $\mathrm{Fr}(x)$ dla zagadnienia LIF okazuje się być stałe. W sytuacji, gdy $\sigma = 0$ oraz Φ i $\mathcal{M}\{f\}$ są dobrze zdefiniowane, mówi o tym **Twierdzenie 6.9**. Wtedy $\mathrm{Fr}(x)$ jest dobrze zdefiniowane oraz $\mathrm{Fr}(x) = \mathcal{M}\{f\}$ (może być $+\infty$). Wynik powyższy uzupełnia **Twierdzenie 6.10** dla nieujemnej funkcji f. Ogólna sytuacja, gdy $\sigma > 0$ dla zagadnienia LIF jest opisana w **Twierdzeniu 6.11**. Powiada ono, że jeśli $f(x) - \sigma \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz "*firing rate*" $\mathrm{Fr}(x)$ istnieje dla pewnego x_0, to istnieje zawsze i jest funkcją stałą. Z kolei w **Twierdzeniu 6.13** dowodzi się, że dla funkcji $S-$ prawie okresowej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającej (8) $\mathrm{Fr}(x)$ zawsze istnieje oraz $\mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}(0) \in (0, \infty)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Inne typy prawie okresowości nie są rozważane.

Jeśli chodzi o punktową liczbę obrotów $\varrho_p(f)$, to opisuje ją

Twierdzenia 6.12: *Załóżmy, że nierosnąca funkcja $f : R \longrightarrow R$ jest postaci $f(x) = x + g(x)$, gdzie g jest jednostajnie prawie okresowa oraz* $\inf g(x) > 0$. *Wówczas $\varrho_p(f)$ jest zbiorem jednopunktowym.* ∎

Na tym praca się kończy.

Oceniając wyniki zawarte w rozprawie pana magistra Adama Nawrockiego stwierdzam, że stanowią one kawałek dobrego rzemiosła, w pozytywnym tego słowa znaczeniu. Widać wyraźnie pracę włożoną w zrozumienie badanych pojęć. Doktorant bardzo głęboko wniknął w rozważaną tematykę, wykazał się sporym potencjałem i dojrzałością w prowadzeniu badań oraz dużym zacięciem przy odnajdowaniu zależności pomiędzy rozważanymi pojęciami. Również konstruowane przykłady wymagały sporej pomysłowości. Należy też podkreślić, że wyniki osiągnięto bez używania wyrafinowanych środków, czy super zaawansowanych teorii. Cały tekst został przygotowany bardzo starannie, z dużą dbałością autora o precyzję. Styl prezentacji jest jasny i klarowny, a ilość literówek jest znikoma, choć kilka dostrzegłem. Trochę szwankuje numeracja, gdyż cofając się w tekście czasem trudno jest odpowiedni akapit znaleźć. Poza tym w ostatnim Rozdziale, w niektórych rozważaniach, są drobne przeskoki i niedopowiedzenia utrudniające śledzenie dość trudnych technicznie dowodów. Np. na początku dowodu **Lematu 6.1** wypisana jest pewna równość, a nie jest podkreślone, że oba wyrażenia są równe 1. Usterki te nie psują jednak pozytywnego obrazu rozprawy.

Podsumowując **uważam, że rozprawa pana magistra**

Adama Nawrockiego

spełnia wszystkie wymagania Ustawy o Tytułach i Stopniach Naukowych i wnoszę o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 4 maja 2018.