

Warszawa, 8 kwietnia 2015

RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ MGR WOJCIECHA POLITARCZYKA

Rozprawa doktorska mgr Wojciecha Politarczyka „*Khovanov homology of symmetric links*” mówi o homologiach Khovanova dla splotów symetrycznych, to znaczy dla splotów w S^3 , które są niezmiennicze ze względu na działanie grupy \mathbb{Z}_n .

W pracy można wyróżnić dwa główne wyniki. Pierwszy (tzn. łatwiejszy) dotyczy własności wielomianów Jonesa dla węzłów periodycznych. Autor definiuje periodyczny wielomian Jonesa (jako ślad periodycznych homologii Khovanova) i dowodzi relacji skein dla takiego wielomianu. Następnie powiązuje tradycyjny wielomian Jonesa z wielomianami periodycznymi. Ta relacja pozwala na udowodnienie i wzmocnienie kryterium Przytyckiego dla wielomianu Jonesa węzła periodycznego. Jako zastosowanie autor pokazuje, że węzeł 10_{161} nie dopuszcza symetrii \mathbb{Z}_5 .

Drugi wynik to konstrukcja ekwiwariantnych homologii Khovanova. Jakkolwiek ekwiwariantne homologie Khovanova były zdefiniowane przez Chbili (referencja [5] w rozprawie), to definicja Politarczyka jest zupełnie inna, prawdę mówiąc, o wiele bardziej pomysłowa. Punktem wyjścia jest kompleks łańcuchowy Khovanova ($CKhD$), który to kompleks w przypadku diagramu dopuszczającego symetrię \mathbb{Z}_n dopuszcza działanie grupy \mathbb{Z}_n , tak więc może być traktowany jako $\mathbb{Z}[\xi_d]$ moduł, gdzie $\xi_d = e^{2\pi i/d}$, oraz $d|n$. Otóż odpowiednie grupy typu $Ext(\mathbb{Z}[\xi_d], CkhD)$ (zwracam uwagę na formalne związki tej konstrukcji z konstrukcją homologii grup) okazują się niezależne od wyboru diagramu, czyli są niezmiennikami splotu. Co ciekawe, ekwiwariantne homologie Khovanova okazują się mieć potrójną gradację, zamiast podwójnej: ta ostatnia gradacja jest związana z działaniem grupy \mathbb{Z}_n .

Sploty periodyczne (albo też symetryczne) są nieco z boku teorii węzłów: wyszukiwanie frazy *symmetric links* albo *periodic links* w MathSciNet podaje kilka prac w latach 2010–2015 (są oczywiście wcześniejsze prace), opublikowanych w przeciętnych bądź marnych czasopismach, jakkolwiek słyszałem rozmowę światowej sławy matematyków zaskoczonych, że pewien splot o 18 skrzyżowaniach dopuszcza symetrię \mathbb{Z}_3 . Natomiast homologie Khovanova stanowią jeden z najważniejszych obiektów we współczesnej teorii węzłów. Słynny *Hitchhiker guide to Khovanov homology* (preprint na arxiv z września 2014) ma pięciostronową bibliografię. Większość prac cytowanym w „przewodniku” ukazała się po 2000 roku, w samym tylko roku 2014 ukazywały się prace poświęcone homologiom Khovanova w takich czasopismach jak JAMS, Duke, Quantum Topology czy G&T, przy czym przewodnik wcale nie jest wyczerpującym źródłem bibliografii. Użycie tych, a nie innych metod przez Politarczyka świadczy o jego bardzo wysokiej kulturze matematycznej. Nowy wynik w dziedzinie homologii Khovanova, a w przypadku rozprawy możemy nawet mówić o nowym podejściu, jest bardzo dużym osiągnięciem.

Oba wyniki zawarte w pracy oceniam bardzo wysoko i nawet mniejszy z nich, to znaczy sam piąty rozdział, w zupełności wystarczyłby na pracę doktorską. Rozszerzenie kryterium Przytyckiego i wprowadzenie ekwiwariantnych wielomianów Jonesa

jest bardzo ciekawym wynikiem, nadającym się na dobrą publikację, prawdopodobnie w czasopiśmie klasy „A”.¹ Druga część pracy, mianowicie konstrukcja i własności ekwiwariantnych homologii Khovanova, jest jeszcze lepsza i — moim zdaniem — kwalifikuje się do czasopism „A*”, czyli tych z bardzo wysokiej półki. Mamy tutaj ciekawy pomysł, nietrywialne zastosowanie niezmienników Khovanova i wyjaśnienie, dlaczego naiwna definicja nie działa (zob. Przykład 3.2.1 w rozprawie). Dopuszczenie trzeciej gradacji w homologiach jest niezwykle interesującym pomysłem.

Poza tym wart odnotowania jest fakt, że w zasadzie p. Politarczyk jest pionierem używania homologii Khovanova w Polsce. Właściwie na palcach jednej ręki można policzyć specjalistów w tej dziedzinie afiliowanych w kraju, powstaje też bardzo niewiele prac w Polsce na ten temat. Mgr Politarczyk musiał więc uczyć się całej tej teorii od osób z innych krajów (również Polaków), jak Józef Przytycki czy Krzysztof Putyra. Warto dodać, że jest to teoria która się wciąż rozwija, bardzo trudno jest więc się jej nauczyć tylko czytając prace. Godna uwagi jest biegła znajomość zaawansowanych metod algebry homologicznej, z jaką napisana jest praca. Z pewnością na okrzepnięcie i rozwój naukowy doktoranta miał wpływ semestralny wyjazd do Bonn na semestr z niskowymiarowej topologii. Na marginesie dodam, że do jednego z wykładów M. Freedmana, p. Politarczyk wspólnie z Markiem Powellem zrobili znakomite notatki.

Młodość ma swoje prawa, w tym prawa do popełniania drobnych błędów. Nie rzucają one w żaden sposób na ocenę pracy. Przytaczam je po to, aby uczulić doktoranta na niedostatki, które mogą utrudnić publikację artykułów w przyszłości.

- Po pierwsze i najważniejsze: dlaczego doktoratu nie ma jeszcze na arxiv (jedna część ukazała się w miesiąc po złożeniu rozprawy)? Publikowanie preprintów na arxiv jest standardem światowym i jeśli autor aspiruje do czołówki światowej (a sądząc po klasie rozprawy domyślam się, że tak jest), powinien doktorat na arxiv wstawić. Serwer preprintów daje okazję szybkiej wymiany pomysłów wśród specjalistów; jeśli praca jest ciekawa, nie ma szans żeby była przeoczona. Ponadto osoby postronne łatwiej zauważą błąd, kiedy można go jeszcze poprawić.² Specjaliści albo sami rozwiną pomysły (co zwiększa indeks cytowań doktoranta), albo — co bardziej prawdopodobne — mogą chcieć nawiązać współpracę naukową.
- Autor stosuje bardzo abstrakcyjną definicję homologii Khovanova. W ten sposób dowody upraszczają się, ale zdecydowanie zmniejsza się potencjalne grono odbiorców. W publikacji naukowej warto nawet podać dwie definicje (kategoryjną i standardową jak np. u Bar-Natana, albo *Odd Khovanov homology*) po to, aby ułatwić czytelnikowi odbiór. Warto to zrobić nawet, jeśli w dowodzie niezmienniczości ekwiwariantnych homologii używa się tylko definicji

¹Podobnie jak większość moich zagranicznych kolegów, używam tu znakomitego rankingu australijskiego, dzielącego czasopisma na kategorie „A*”, „A”, „B” oraz „C”. Ranking opiera się nie tylko na przepisywaniu Impact Factorów do excela ale również na ocenie klasy edytorów oraz oszacowaniu jakości artykułów publikowanych. Dostępny jest pod adresem http://www.austms.org.au/Rankings/AustMS_final_ranked.html.

²Na marginesie: doktorant już po wysłaniu pracy znalazł i poprawił techniczny błąd w dowodzie Lematu 3.2.15. Prawdopodobnie, gdyby był wstawił pracę na arxiv, to miałby szansę uniknięcia tej drobnej, aczkolwiek kłopotliwej, wpadki.

kategoryjnej. Wydłużenie pracy nie szkodzi (artykuł 40-stronicowy jest publikowany bez problemu), a może sprawić że potencjalny recenzent przeczyta pracę niemal jednym tchem.

- Autor bardzo lubi literę T , która oznacza dużo różnych rzeczy: raz splot trywialny, raz motek, raz element w pierścieniu. To chyba trochę przesada.
- Czasami autorowi trudno się zdecydować, do kogo pisze pracę: do specjalistów czy nie. Na przykład paragraf rozpoczynający Podrozdział 2.2.2 jest bardzo enigmatyczny dla nie-specjalisty i zupełnie zbędny dla specjalisty. Sugerowałbym przy publikacji (artykułu a nie pracy doktorskiej) zrezygnować zupełnie z przypominania podstaw algebry homologicznej i ewentualnie bardziej się skupić na lepszym wytłumaczeniu homologii Khovanova.
- Definicja splotów symetrycznych jest trochę „po łebkach” i pozostawia pewnien niedosyt. Brakuje np. jasnej definicji ekwiariantnych ruchów Reidemeistera. Poza tym pytanie: czy te ruchy wystarczą? To znaczy czy każde dwa diagramy ekwiariantne daje się przekształcić w siebie za pomocą sekwencji ruchów Reidemeistera? Warto by było zacytować odpowiedni wynik (albo nawet powiedzieć, że to jest folklor).
- Podawanie ISSN, DOI, ULR i MR w bibliografii nie jest konieczne. Czasami nawet pogarsza czytelność. DOI się czasem przydaje w wersjach elektronicznych, bo jest gdzie kliknąć, ale w papierowych nie za bardzo. Domyślałem się, że autor używał bibtex'a, ale warto czasem wyłączać pewne jego funkcje.
- Spośród dość niewielu jak na taką pracę technicznych błędów chciałem zwrócić uwagę na użycie słowa „author” w trzecim paragrafie na stronie 2: p. Politarczyk ma na myśli Chbili'ego, ale słowo „author” może również oznaczać piszącego dany tekst. Następuje drobna niejednoznaczność. Podobna niejednoznaczność jest podczas cytowania Twierdzenia 5.1.7. Z tekstu nie wynika jednoznacznie, że chodzi o cytowanie wyniku Przytyckiego. Niewielkie reformułowanie zdania przed tym twierdzeniem pozwoliłoby na uniknięcie problemu.
- Standardem w pracach jest stosowanie kursywy w sformułowaniach twierdzeń i lematów (po to, żeby czytelnik nie musiał się zastanawiać, gdzie się kończy twierdzenie), oraz wyróżnianie (poprzez np. \emph) obiektu definiowanego w definicji. Warto o to zadbać w przyszłości.

Podsumowanie. Uważam że praca doktorska mgr Wojciecha Politarczyka spełnia ze znaczną nawiązką ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy oraz o dopuszczenie mgr Wojciecha Politarczyka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto, mając na względzie wagę wyników otrzymanych w pracy, wnoszę o jej wyróżnienie.

dr hab. Maciej Borodzik
Instytut Matematyki,
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski
Banacha 2
02-097, Warszawa
mcboro@mimuw.edu.pl

Maciej Borodzik