dr hab. Mariusz Skałba,
Wydział Matematyki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr Katarzyny Emilii Taczały

Pani mgr Katarzyna Emilia Taczała przedstawiła rozprawę doktorską pod tytułem

Ramsey properties of the linear equations

Promotorem tej rozprawy jest prof. dr hab. Tomasz Schoen.

Praca ta składa się z czterech rozdziałów, z których pierwszy jest krótkim wstępem. Rozdział drugi wprowadza podstawowe oznaczenia ogólnomatematyczne oraz specyficzne dla kombinatoryki addytywnej - w szczególności sformułowano podstawowe twierdzenia analizy fourierowskiej dla skończonych grup cyklicznych. W kolejnych rozdziałach autorka przedstawiła główne rezultaty swojego doktoratu - dotyczą one przede wszystkim monochromatycznych rozwiązań pewnych równań liniowych, zgodnie z tytułem rozprawy.

I tak w rozdziale trzecim doktorantka przedstawiła dowód hipotezy Foxa-Kleitmana. Wynik ten jest już opublikowany we wspólnej pracy z promotorem [19]. Dotyczy on stopnia regularności konkretnego równania liniowego o $2n$ zmiennych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ z parametrem naturalnym b:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i + b.$$

Straus udowodnił w 1975 roku, że dla każdego n istnieje $b = b_n$ takie, że jeśli pokolorujemy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ na nie więcej niż $c \log n$ kolorów (gdzie $c > 0$ jest pewną stałą) to znajdzie się monochromatyczne rozwiązanie powyższego równania. Z drugiej strony Fox i Kleitman w pracy z 2006 roku skonstruowali dla każdego $b > 0$ konkretne kolorowanie (bardzo proste) $2n$ kolorami, dla którego rzeczone równanie nie ma monochromatycznych rozwiązań. Przy okazji wypowiedzieli odważną hipotezę, że w przypadku użycia $2n - 1$ kolorów, nie unikniemy rozwiązania monochromatycznego przy odpowiednio dobranym b. Tę właśnie hipotezę udowodnili Schoen i Taczała w pracy [19]. Dowód tego dość spektakularnego rezultatu wypełnia rozdział trzeci. Nie sposób podać tu (ani tym bardziej przedyskutować) szczegółów metody, która prowadzi do tego wyniku, ale napiszę jak ją postrzegam w najogólniejszych zarysach. Opiera się ona generalnie na podejściu Eberharda, Greena i Mannersa, którzy w pracy [6], (Annals of Mathematics 2014) wykazali, że jeśli zbiór różnic zbioru A spełnia:

$$|A - A| < (4 - \varepsilon)|A|$$

to A ma duże przecięcie z ciągiem arytmetycznym o kontrolowanej wielkości. Pani Taczała uogólniła to twierdzenie w ten sposób, że powyższa nierówność-założenie jest zastąpiona przez:

$$|(nA - nA)| < (4n^2 - \varepsilon)|A|,$$

a teza odpowiednio zmodyfikowana. Jest to twierdzenie 3.4 - według mnie najważniejszy wynik pracy doktorskiej. Dowód tego twierdzenia jest złożony i trudny - w ogólnych zarysach naśladuje on dowód Eberharda, Greena i Mannersa, ale konieczne są dodatkowe pomysły. Dowód ten korzysta (między innymi) z tzw. lematu o regularności arytmetycznej Greena i Tao [14], ale również z klasycznego twierdzenia Brunna-Minkowskiego szacującego miarę Lebesgue'a sumy Minkowskiego zbiorów (wykorzystanie go w dowodzie Lematu 3.16 jest bardzo pomysłowe).

Mając twierdzenie 3.4 uzyskuje się dowód hipotezy Foxa- Kleitmana już stosunkowo prosto. Mianowicie jedna z $2n-1$ jednokolorowych klas musi mieć gęstość co najmniej $1/(2n-1)$, a więc istotnie większą od $1/2n$. Ta klasa podpada pod twierdzenie 3.4, a więc ma dużą część wspólną z ciągiem arytmetycznym, co standardowo daje rozwiązanie monochromatyczne.

Omówię teraz krótko drugi wynik dysertacji, dotyczący monochromatycznych rozwiązań równań liniowych, opublikowany przez panią mgr Taczałę w pracy [22]. Punktem wyjścia jest słynne twierdzenie Schura, które mówi, że po pokolorowaniu zbioru $\mathbb{N}$ skończoną liczbą kolorów zawsze znajdziemy trzy liczby x_1, x_2, x_3 tego samego koloru, spełniające równanie $x_1 + x_2 = x_3$. Zresztą tytuł pracy Schura nawiązuje do wielkiego twierdzenia Fermata, gdyż najbardziej spektakularnym wnioskiem z twierdzenia Schura jest konstatacja, że wielkiego twierdzenia Fermata nie można udowodnić za pomocą kongruencji. Można rozważać ogólniejsze równanie

$$x_1 + \cdots + x_{k-1} = x_k$$

i pytać o najmniejszą liczbę rozwiązań monochromatycznych przy kolorowaniu grupy cyklicznej $\mathbb{Z}_N$. Najtrudniejszy jest przypadek, gdy liczba k jest parzysta i ten przypadek jest rozpatrzony w ostatnim rozdziale dysertacji. Niech więc $k = 2n$. Autorka rozpatruje cztery przypadki indywidualnej parzystości N oraz n i każdorazowo konstruuje (stosunkowo proste) kolorowanie grupy $\mathbb{Z}_N$, które daje mało monochromatycznych rozwiązań powyższego równania (twierdzenie 4.1) . W przypadku, gdy N jest liczbą pierwszą uzyskuje również oszacowanie od dołu na liczbę monochromatycznych rozwiązań (twierdzenie 4.2). Metoda uzyskania tych wyników bazuje bezpośrednio na oszacowaniu odpowiednich współczynników Fouriera, które podają dokładną liczbę rozwiązań. Autorka bardzo starannie szacuje kombinacje funkcji trygonometrycznych i uzyskuje odpowiednie oszacowania. Metoda dowodowa użyta w rozdziale czwartym jest bardzo klarowna, ale też uzyskany wynik jest mniej spektakularny niż dowód hipotezy Foxa-Kleitmana z rozdziału trzeciego.

Podsumowując, uważam, że praca doktorska pani mgr Taczały zawiera bardzo interesujące wyniki i cała praca z pewnością spełnia wymagania ustawowe stawiane pracom doktorskim z matematyki. Dlatego z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pani Taczały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

dr hab. Mariusz Skałba

M. Skałba