Wniosek o wszczęcie postępowania habilitacyjnego na podstawie osiągnięcia naukowego zatytułowanego

Wspólne punkty stałe dla półgrup odwzorowań nieliniowych

Wojciech M. Kozłowski

Załącznik 2
Autoreferat

Spis treści

1. Dyplomy i stopnie naukowe

1977	magister matematyki	Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie Promotor: Prof. Jacek Szarski Tytuł: *Operator Hammersteina w przestrzeniach Orlicza*
1981	doktor nauk matematycznych	Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie Promotor: Prof. Julian Musielak Tytuł: *Operatory nieliniowe w przestrzeniach funkcji mierzalnych o wartościach wektorowych*

2. Informacja o zatrudnieniu

1977 - 1980 asystent, Zakład Zastosowań Matematyki, Instytut Informatyki, Uniwersytet Jagielloński. Praca naukowo-dydaktyczna.

1980 - 1982 starszy asystent, Zakład Zastosowań Matematyki, Instytut Informatyki, Uniwersytet Jagielloński. Praca naukowo-dydaktyczna.

1982 - 1986 adiunkt, Zakład Zastosowań Matematyki, Instytut Informatyki, Uniwersytet Jagielloński. Praca naukowo-dydaktyczna.

1986 - 1987: stypendysta Fulbrighta w California Institute of Technology, Pasadena, USA. Stypendium przyznane przez Fundację Fulbrighta w celu rozwinięcia teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych i ich zastosowań, oraz napisania książki monograficznej na ten temat, patrz [D11].

1987 - 1988: Associate Professor, University of Southern California w Los Angeles. Praca naukowo-dydaktyczna.

1988 - 1990: Professor of Mathematics w Southwest Missouri State University, Springfield, USA. Praca naukowo-dydaktyczna.

1990 - 1997: kierownik naukowy (Chief Scientist), Scientific Software. Odpowiedzialny za rozwój zespołów badawczych, identyfikację kierunków badań i za nadzór naukowy.

1992 - 1997: profesor (honorowy), University of Adelaide, badania w dziedzinie analizy funkcjonalnej i zastosowań.

1997 - 2000: starszy konsultant, IBM. Odpowiedzialny za rozwój strategii informatycznej, identyfikację technologii i usług, prowadzenie doradztwa klientom, implementację projektów.

2000 - 2002: główny architectkt rozwiązań (Lead Solutions Architect), Cable and Wireless Optus, Sydney. Ogólna odpowiedzialność za identyfikację potrzeb informatycznych firmy telekomunikacyjnej Optus.

2002 - 2010: główny architekt (Principal IT Architect), Telstra Corporation, Melbourne. Odpowiedzialny za planowanie strategiczne dla działu operacji sieciowych.

2005 - 2007: profesor, Swinburne University of Technology, Melbourne. Koordynator sekcji telekomunikacyjnej inicjatywy ASAPM/ASG ufundowanej wspólnie przez rząd Australli i Komisję Europejską.

od 2010: główny konsultant, Hewlett-Packard. Odpowiedzialny za prowadzenie prac konsultacyjnych dla światowych firm telekomunikacyjnych.

od 2010: profesor, School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Sydney, badania naukowe w dziedzinie teorii punktu stałego, geometrii przestrzeni Banacha, przestrzeni funkcyjnych, we współpracy z Computer-Assisted Research Mathematics and its Applications (CARMA) przy University of Newcastle.

3. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art.16 us. 2 ustawy o stopniach nukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

Powyższym osiągnięciem naukowym jest jednotematyczny cykl ośmiu artykułów zatytułowany *Wspólne punkty stałe dla półgrup odwzorowań nieliniowych.*

3.1. Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego ***Wspólne punkty stałe dla półgrup odwzorowań nieliniowych.*** [1]

[H1] Kozlowski, W.M.: *Fixed point iteration processes for asymptotic pointwise nonexpansive mappings in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), 43–52.

[H2] Kozlowski, W.M.: *Common fixed points for semigroups of pointwise Lipschitzian mappings in Banach spaces,* Bull. Austral. Math Soc. 84 (2011), 353–361.

[H3] Kozlowski, W.M.: *On the existence of common fixed points for semigroups of nonlinear mappings in modular function spaces,* Comment. Math., 51.1 (2011), 81–98.

[H4] Kozlowski, W.M., and Sims, B.: *On the convergence of iteration processes for semigroups of nonlinear mappings in Banach spaces,* Computational and Analytical Mathematics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 50 (2013), 463–484.

[H5] Kozlowski, W.M.: *On common fixed points of semigroups of mappings nonexpansive with respect to convex function modulars,* J. Nonlinear Convex Anal., 15.3 (2014), 437–449.

[H6] Kozlowski, W.M.: *Strong convergence of implicit iteration processes for nonexpansive semigroups in Banach spaces,* Comment. Math., 54.2 (2014), 203–208.

[H7] Kozlowski, W.M.: *On the Cauchy Problem for the Nonlinear Differential Equations with Values in Modular Function Spaces,* Differential Geometry, Functional Analysis and Applications, Narosa Publishing House, New Delhi, 2015, 75–105.

[H8] Kozlowski, W.M.: *On convergence of iteration processes for nonexpansive semigroups in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl., 426 (2015), 1182–1191.

[1] Kolejność w jakiej wymieniono publikacje jest zgodna z kolejnością ich akceptacji przez czasopisma, co nie zawsze odpowiada kolejności uzyskania zawartych w nich wyników. *Impact Factor* czasopisma oraz mój procentowy udział w pracy [H4] zostały podane w Załaczniku 3: *Wykaz opublikowanych prac naukowych.*
W niniejszym autoreferacie poza wymienioną listą prac, oznaczonych przy pomocy prefiksu H, znajdują się jeszcze dwa spisy publikacji. Mianowicie, na stronach Z2-41 – Z2-42 wymienione są pozostałe moje prace, oznaczone przy pomocy prefiksu D, natomiast prace innych autorów cytowane w niniejszym opracowaniu można znaleźc na stronach Z2-53 – Z2-56.

3.2. **Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego zatytułowanego *Wspólne punkty stałe dla półgrup odwzorowań nieliniowych.***

Rezultaty wchodzące w skład niniejszego osiągnięcia naukowego dotyczą teorii odwzorowań nieliniowych działających w przestrzeniach liniowo-topologicznych (por. [58]), będącej działem analizy funkcjonalnej. Warto tutaj zauważyć, że istotnym czynnikiem wpływającym na dynamiczny rozwój współczesnej nieliniowej analizy funkcjonalnej jest możliwość wykorzystywania otrzymywanych wyników w innych gałęziach matematyki oraz w innych naukach ścisłych i w technice. Teoria punktów stałych i w szczególności teoria wspólnych punktów stałych półgrup takich odwzorowań może służyć jako doskonały przykład takich zastosowań (por. [67, 18, 29, D30]).

Niech C będzie podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej X. Rozważmy połgrupę nieliniowych odwzorowań zdefiniowanych w C, czyli rodzinę odwzorowań $T_t : C \to C$, gdzie $t \in [0, \infty)$, spełniających następujące warunki: $T_0(x) = x$ oraz $T_{s+t}(x) = T_s(T_t(x))$.

Sytuacja taka jest typowa w matematyce i zastosowaniach. Na przykład w teorii systemów dynamicznych, przestrzeń X będzie przestrzenią stanów, a odwzorowanie $(t, x) \to T_t(x)$ będzie funkcją ewolucji systemu. Wspólne punkty stałe takiej półgrupy mogą być interpretowane jako punkty stacjonarne tego systemu, czyli punkty, które dla dowolnej chwili czasu t nie ulegają zmianie podczas transformacji T_t przestrzeni stanów. W kontekście przedstawianych badań przestrzeń stanów będzie zwykle nieskończenie wymiarowa. Dlatego też w sposób naturalny wyniki nasze będą mogły być stosowane do systemów niedeterministycznych.

Dwoma głównymi pytaniami pojawiającymi się w takich badaniach są: (1) istnienie wspólnych punktów stałych i własności zbioru takich punktów, (2) konstruktywne metody przybliżania takich wspólnych punktów stałych. Badania zawarte w niniejszym opracowaniu omawiają szereg twierdzeń o istnieniu wspólnych punktów stałych, a także zawierają wiele rezultatów o zbieżności pewnych procesów przybliżających takie punkty stałe. Ta dziedzina moich badań naukowych dzieli się w sposób naturalnych na dwie części. W pierwszej założono, że X jest przestrzenią Banacha a zatem metody geometryczne przestrzeni Banacha są używane jako główne narzędzie, podczas gdy w drugiej X jest przestrzenią modularną funkcyjną, gdzie techniki teorii przestrzeni modularnych będą głównym narzędziem badawczym. Warto w tym momencie zaznaczyć, że chociaż te dwie sytuacje sa odmienne i będą przedstawione oddzielnie, to jednak własności geometryczne takie jak jednostajna wypukłość czy własność Opiala [2], nawet jeśli wyrażone nieco inaczej w każdej z tych sytuacji, są jednak w swej istocie całkiem podobne. Związki te, często używane w wynikach tu przedstawionych, były w ostatnich kilku dekadach intensywnie badane zaczynając od pionierskich prac Kamińskiej [26] i Hudzika [21, 22, 23]; patrz także [D14, D17, 10, 11, 12, D20].

Główne założenia teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych były najpierw przedstawione w moich dwóch pracach opublikowanych w Commentationes Mathematicae [D9, D10]. Teoria i jej zastosowania, zarysowane w tych dwóch artykułach, wywołały duże zainteresowanie w społeczności matematycznej i w rezultacie otrzymałem stypendium Fulbrighta i zostałem zaproszony przez W.A.J. Luxemburga do przyłączenia się do jego zespołu badawczego w California Institute of Technology w Pasadenie (USA) w celu kontynuacji badań naukowych w tym kierunku. Rezultatem tej działalności, sponsorowanej przez Fundację Fulbrighta, stała się książka "Modular Function Spaces" ([D11]) opublikowana w 1988 roku przez wydawnictwo Marcel Dekker. Książka ta stworzyła na wiele lat solidne i spoiste podstawy do dalszych badań w dziedzinie teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych.

Reszta niniejszego rozdziału jest zorganizowana w sposób nastepujący:
1. Sekcja 3.2.1 zawiera twierdzenia o istnieniu punktów stałych w przestrzeniach Banacha. Twierdzenie 3.1 oraz Twierdzenie 3.3 dostarczają główne rezultaty dla odpowiednio nierozszerzających i zwężających półgrup.

2. Sekcja 3.2.2 zajmuje się metodami konstrukcji wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań działających w przestrzeniach Banacha. Główne rezultaty dotyczą tu słabej zbieżności uogólnionych procesów Krasnoselskiego-Manna i Ishikawy (Twierdzenia 3.6, 3.7, 3.10, 3.11), silnej zbieżności takich procesów (Twierdzenia 3.8, 3.16), oraz zbieżności procesów niejawnych iteracji (Twierdzenia 3.18 i 3.19).

[2] Własność ta w swej oryginalnej wersji była wprowadzona w pracy Z. Opiala [44]

3. W sekcji 3.2.3 badane jest istnienie wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań działających w przestrzeaniach modularnych funkcyjnych. Główne rezultaty są przedstawione w Twierdzeniu 3.22 dla półgrup ρ-zwężających, a w Twierdzeniu 3.24 dla półgrup ρ-nierozszerzających.

4. Sekcja 3.2.4 zajmuje się metodami konstrukcji wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych. Najważniejszym rezultatem tej sekcji jest twierdzenie o reprezentacji (Twierdzenie 3.25), które pozwala zredukować problem znalezienia wspólnego punktu stałego dla ρ-nierozszerzającej półgrupy do problemu znalezienia punktu stałego dla jednego tylko, odpowiednio wybranego ρ-nierozszerzającego odwzorowania. Używając ten rezultat, można udowodnić zbieżność uogólnionego procesu Manna (Twierdzenie 3.27) oraz uogólnionego procesu Ishikawy (Twierdzenie 3.28).

5. W sekcji 3.2.5 rezultaty z poprzednich dwóch sekcji są zastosowane do rozwiązania problemu początkowego dla zwykłego równania różniczkowego w przestrzeniach modularnych funkcyjnych. Twierdzenie 3.34 opisuje rozwiązanie problemu początkowego jako ρ-granicę rekursywnego ciągu funkcji. Natomiast Twierdzenie 3.35 głosi, że rodzina operatorów opisujących rozwiązanie dla danej wartości początkowej tworzą półgrupę ρ-nierozszerzających odwzorowań. Jak pokazano w Twierdzeniu 3.36, zbiór punktów stałych tej półgrupy jest identyczny ze zbiorem punktów stacjonarnych procesu określonego przez te równanie różniczkowe. Sekcja kończy się przykładem, w którym znajduje się punkty stacjonarne procesu Urysohna.

3.2.1. **Twierdzenia o istnieniu wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych działających w przestrzeniach Banacha.**

W tej sekcji niniejszego opracowania X będzie zawsze oznaczać rzeczywistą przestrzeń Banacha, a C niepusty, domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni X. Kwestia istnienia wspólnych punktów stałych dla rodzin odwzorowań zwężających i nierozszerzających w przestrzeniach Hilberta i przestrzeniach Banacha była badana od ponad pół wieku, patrz na przykład [13, 6, 3, 4, 7, 33]. Jako punkt startu wziąć można twierdzenie Browdera [6], które mówi, że jeśli X jest jednostajnie wypukła i $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ jest silnie ciągłą półgrupą nierozszerzającą (tzn. każde T_t jest nierozszerzające oraz odwzorowanie $t \to T_t(x)$ jest ciągłe w sensie normy dla każdego $x \in C$), to zbiór wspólnych punktów stałych półgrupy $\mathcal{F}$ jest niepusty, domknięty i wypukły. W pracy [H2] uogólniono rezultat Browdera na klasę punktowo lipschitzowskich półgrup oraz na przypadek ogólniejszego zbioru parametryzującego.

Definicja 3.1. [H2, Definitions 2.1, 2.2] *Jednoparametrową rodzinę* $\mathcal{F} = \{T_t : t \in J\}$ *odwzorowań zbioru* C *w siebie nazywamy punktowo lipschitzowską półgrupą na* C *jeśli* $\mathcal{F}$ *spełnia następujące warunki:*

(i) $T_0(x) = x$ *dla* $x \in C$*;*
(ii) $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$ *dla* $x \in C$ *i* $t, s \in J$*;*
(iii) dla każdego $t \in J$*,* T_t *jest odwzorowaniem punktowo lipschitzowskim, czyli istnieje funkcja* $\alpha_t : C \to [0, \infty)$ *taka, że*

$$\|T_t(x) - T_t(y)\| \leqslant \alpha_t(x)\|x - y\| \text{ dla wszystkich } x, y \in C. \tag{3.1}$$

(iv) dla każdego $x \in C$*, odwzorowanie* $t \to T_t(x)$ *jest silnie ciągłe (tj. jest ciągłe w sensie normy).*

Ponadto,

(1) półgrupa $\mathcal{F}$ *nazywa się asymptotycznie punktowo zwężająca* [3] *jeśli* $\limsup_{t\to\infty} \alpha_t(x) < 1$ *dla każdego* $x \in C$*.*
(2) $\mathcal{F}$ *nazywa się asymptotycznie punktowo nierozszerzająca* [4] *jeśli* $\limsup_{t\to\infty} \alpha_t(x) \leqslant 1$ *dla każdego* $x \in C$*.*

Załóżmy, że zbiór parametrów J jest półgrupą liczb nieujemnych, tzn. podpółgrupą półgrupy $[0, \infty)$ z normalnym dodawaniem. Załóżmy także, że $0 \in J$ oraz że J zawiera przynajmniej jedno $t > 0$. To ostatnie założenie oznacza, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru J w sensie topologii naturalnej odziedziczonej z $[0, \infty)$. Typowymi przykładami mogą służyć: $J = [0, \infty)$ i $J = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, ale także ideały postaci $J = \{n\alpha : n = 0, 1, 2, 3, ...\}$ dla ustalonego $\alpha > 0$.

[3] Zwana też w literaturze asymptotycznie zwężającą punktowo lipschitzowską półgrupą.
[4] Zwana też w literaturze asymptotycznie nierozszerzającą punktowo lipschitzowską półgrupą.

W pracy [H2] udowodniono następujące uogólnienie twierdzenia Browdera o punkcie stałym.

Twierdzenie 3.1. [H2, Theorem 3.4] *Załóżmy, że X jest jednostajnie wypukła. Jeśli $\mathcal{F}$ jest asymptotycznie punktowo nierozszerzającą półgrupą na C, to $\mathcal{F}$ ma wspólny punkt stały oraz zbiór takich punktów $F(\mathcal{F})$ jest domknięty i wypukły.*

Jest rzeczą intrygującą, że jakkolwiek a priori żadne z odwzorowań T_t nie musi mieć punktów stałych w C ($T_t \in \mathcal{F}$ nie musi być nierozszerzające gdyż $\alpha_t(x)$ może być silnie większe od 1), to jednak a posteriori wszystkie odwzorowania T_t mają punkty stałe, a ponadto mają one przynajmniej jeden wspólny punkt stały! Ten - na pierwszy rzut oka paradoksalny - rezultat jest oczywiście wynikiem asymptotycznego zachowania półgrupy $\{T_t\}$.

Warto tu wspomnieć niedawne studium specjalnego przypadku gdy zbiór parametrów jest równy zbiorowi $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ oraz $T_n = T^n$, gdzie T^n oznacza n-tą iterację asymptotycznie punktowo nierozszerzającego odwzorowania, tj. takiego $T : C \to C$ że istnieje ciąg funkcji $\alpha_n : C \to [0, \infty)$ spełniających $\|T^n(x)-T^n(y)\| \leqslant \alpha_n(x)\|x-y\|$, por. [30]. W rezultacie twierdzenie Kirka-Xu [30, Theorem 3.5]) może być uznane za szczególny przypadek naszego Twierdzenia 3.1[5].

Dowód powyższego rezultatu w dużym stopniu zależy od nierówności równoległoboku w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha (por. np. [64]), a także od nastepującego lematu udowodnionego w [H2].

Lemat 3.1. [H2, Lemma 3.3] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha, niech $C \subset X$ będzie niepusty, domknięty i wypukły. Istnieje silnie rosnąca, wypukła, ciągła funkcja $\gamma_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ spełniająca $\gamma_2(0) = 0$, zależąca wyłącznie od diam(C), taka że dla każdego punktowo lipschitzowskiego odwzorowania $T : C \to C$, dla każdego $c \in [0, 1]$ i każdego $x, y \in C$ następujące*

[5]Twierdzenie Kirka-Xu uogólnia rezultat Goebla i Kirka [17] udowodniony dla przypadku odwzorowań asymptotycznie nierozszerzających, tj. takich gdzie α_n są stałe. Goebel i Kirk podali przykład odwzorowania liniowego w przestrzeni Hilberta, które jest asymptotycznie nierozszerzające a nie jest nierozszerzające. Zob. też dyskusję asymptotycznego podejścia w książce [D30] str. 111 - 127

warunki są spełnione:

$$\gamma_2\left(\frac{\|T(cx+(1-c)y)-cT(x)-(1-c)T(y)\|}{\alpha(cx+(1-c)y)}\right) \leqslant \|x-y\| - \frac{\|T(x)-T(y)\|}{\alpha(cx+(1-c)y)} \ . \tag{3.2}$$

Proszę zwrócić uwage, że funkcja γ_2 została skonstruowana tak, że spełnia powyższe warunki dla wszystkich punktowo lipschitzowskich odwzorowań C w C. Lemat powyższy jest punktowo lipschitzowską wersją rezultatu Brucka, [8].

Artykuł [H2] rozważa także bardziej praktyczną charakteryzację asymptotycznie punktowo lipschitzowskich półgrup, która w połączeniu z Twierdzeniem 3.1 daje następujący rezultat.

Twierdzenie 3.2. [H2, Theorem 3.5] *Załóżmy, że X jest jednostajnie wypukła. Niech $\mathcal{F}$ będzie asymptotycznie punktowo nierozszerzającą półgrupą na C. Załóżmy, że wszystkie odwzorowania $T_t \in \mathcal{F}$ są w sposób ciągły różniczkowalne w sensie Frécheta na wypukłym zbiorze otwartym A zawierającym C, oraz że dla każdego $x \in C$*

$$\limsup_{t\to\infty} \|(T_t)'_x\| \leqslant 1. \tag{3.3}$$

Wówczas $\mathcal{F}$ ma przynajmniej jeden wspólny punkt stały i zbiór takich punktów stałych $F(\mathcal{F})$ jest domknięty i wypukły.

W tej samej pracy przeanalizowano prostszy przypadek asymptotycznie punktowo zwężających półgrup i udowodniono istnienie jedynego wspólnego punktu stałego oraz silną zbieżność orbit do tego punktu, co jest podsumowane w naszym następnym rezultacie.

Twierdzenie 3.3. [H2, Theorem 3.1] *Załóżmy, że X jest jednostajnie wypukła. Niech $\mathcal{F}$ będzie asymptotycznie punktowo zwężającą półgrupą na C. Wówczas $\mathcal{F}$ ma jedyny wspólny punkt stały $z \in C$ oraz dla każdego $x \in C$, $\|T_t(x) - z\| \to 0$ gdy $t \to \infty$.*

Następujące twierdzenie o punkcie stałym cytowane za [H2] wyrażone jest w formie bardziej praktycznej z punktu widzenia zastosowań.

Twierdzenie 3.4. [H2, Theorem 3.2] *Załóżmy, że X jest jednostajnie wypukła. Niech $\mathcal{F}$ będzie punktowo lipschitzowską półgrupą na C. Załóżmy, że wszystkie* *odwzorowania $T_t \in \mathcal{F}$ są w sposób ciągły różniczkowalne w sensie Frécheta na wypukłym zbiorze otwartym A zawierającym C, oraz że dla każdego $x \in C$*

$$\limsup_{t\to\infty} \|(T_t)'_x\| < 1. \tag{3.4}$$

Wówczas $\mathcal{F}$ ma jedyny wspólny punkt stały $z \in C$ i dla każdego $x \in C$, $\|T_t(x) - z\| \to 0$ gdy $t \to \infty$.

Proszę zauważyć, że $t \to \infty$ w tym kontekście oznacza, że $t \to \infty$ po zbiorze parametrów J.

3.2.2. **Metody konstrukcji wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych działających w przestrzeniach Banacha.**

W tej sekcji niniejszego opracowania X będzie zawsze oznaczać rzeczywistą przestrzeń Banacha posiadającą własnośc Opiala, a C niepusty, domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni X. W poprzedniej sekcji rozważaliśmy istnienie wspólnych punktów stałych dla szerokiej klasy asymptotycznie punktowo nierozszerzających półgrup odzworowań C w C. Jednakowoż dowód miał charakter egzystencjalny i nie proponował żadnej metody konstrukcji takich punktów. W sekcji niniejszej będziemy rozważać pewne konstruktywne rezulaty zawarte w osiagnięciu naukowym. Konstrukcje takie mogą byc zaklasyfikowane do jednej z dwóch grup: (1) procesy iteracyjne, (2) procesy niejawne. Zacznijmy nasze rozważania od przypadku (1).

Wielu autorów rozważało uogólnienia znanych iteracyjnych procesów konstruujących punkty stałe, jak proces Manna (por. np. [37, 20]) lub proces Ishikawy (por. np. [25]), na przypadek asymptotycznych (ale nie punktowo asymptotycznych) odwzorowań nierozszerzających. Istnieje rozległa literatura na temat takich procesów dla przestrzeni Hilberta, przestrzeni Banacha i przestrzeni metrycznych, patrz na przykład [5, 45, 19, 52, 51, 59, 64, 65, 60, 61, 9, 62, 49, 43, 28, 24, 42] i prace tam cytowane. Schu [51] udowodnił słabą zbieżność zmodyfikowanego procesu Manna do punktu stałego asymptotycznego nierozszerzającego odwzorowania w jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha z własnością Opiala, oraz silną zbieżność dla zwartych asymptotycznie nierozszerzających odwzorowań w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha. Tan i Xu [51] udowodnili słabą zbieżność zmodyfikowanych procesów Manna i Ishikawy dla asymptotycznie nierozszerzających odwzorowań w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha z własnością Opiala lub alternatywnie z normą różniczkowalną w sensie Frécheta. Jednakże przypadek asymptotycznie punktowo nierozszerzalnych półgrup nie był uprzednio badany i wymagał w tym przypadku użycia innych, i często nowatorskich technik.

W publikacji [H1] rozważano specjalny przypadek półgrupy generowanej przez jedno odwzorowanie $T : C \to C$, to znaczy półgrupy zdefiniowej jako $\mathcal{F} = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. O odwzorowaniu T założono, że było ono asymptotycznie punktowo nierozszerzające w sensie poniższej definicji. Zauważmy, że w tym przypadku zbiór wszystkich wspólnych punktów stałych półgrupy $\mathcal{F}$ jest identyczny ze zbiorem wszystkich punktów stałych odwzorowania T.

Definicja 3.2. [H1, Definition 2.2] *Niech C będzie podzbiorem przestrzeni Banacha X. Mówimy, że $T : C \to C$ jest odwzorowaniem asymptotycznie punktowo nierozszerzającym, jeśli istnieje ciąg odwzorowań $\alpha_n : C \to [0, \infty)$ taki, że*

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leqslant \alpha_n(x)\|x - y\| \text{ dla wszystkich } x, y \in C,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leqslant 1, \text{ dla wszystkich } x \in C. \tag{3.6}$$

Oznaczając $a_n(x) = \max(\alpha_n(x), 1)$, bez utraty ogólności można założyć, że T jest asymptotycznie punktowo nierozszerzalne jeśli

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leqslant a_n(x)\|x - y\| \text{ dla wszystkich } x, y \in C,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 1,\ a_n(x) \geqslant 1 \text{ dla wszystkich } x \in C, \text{ and } n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Wprowadźmy oznaczenie $b_n(x) = a_n(x) - 1$. Wobec (3.8), zuważamy, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0. \tag{3.9}$$

Przez $\mathcal{T}(C)$ będziemy oznaczać klasę wszystkich asymptotycznie punktowo nierozszerzających odwzorowań $T : C \to C$. Określmy $\mathcal{T}_r(C)$ jako klasę wszystkich $T \in \mathcal{T}(C)$ takich, że

$$(3.10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) < \infty \textit{ dla wszystkich } x \in C,$$

oraz a_n *jest ograniczoną funkcją dla każdego* $n \geqslant 1$.

Przez $F(T)$ *będziemy oznaczać jak zwykle zbiór wszystkich punktów stałych odwzorowania* T.

Następny rezulat jest asymptotycznie punktową wersją zasady półciągłości (por. np. [6, 19, 65]) i został udowodniony w pracy [H1].

Twierdzenie 3.5. [H1, Theorem 3.1] *Niech* X *będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnościa Opiala. Niech* $T \in \mathcal{T}_r(C)$. *Załóżmy, że* $w \in X$ *i* $\{x_n\} \subset X$ *będą takie, że* $x_n \rightharpoonup w$ *oraz* $\|T(x_n) - x_n\| \to 0$ *gdy* $n \to \infty$. *Wtedy* $w \in F(T)$.

Twierdzenie powyższe użyto w dowodach słabej zbieżności uogólnionych iteracyjnych procesów Manna i Ishikawy. Procesy te definiujemy nastepująco.

Definicja 3.3. [H1, Definition 4.1] *Niech* $T \in \mathcal{T}_r(C)$ *i niech* $\{n_k\}$ *będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Załóżmy, że ciąg* $\{t_k\} \subset (0,1)$ *jest ograniczony od* 0 *i* 1. *Uogólniony proces iteracyjny Manna generowany przez odwzorowanie* T, *ciąg* $\{t_k\}$ *oraz ciąg* $\{n_k\}$, *oznaczony jako* $gM(T, \{t_k\}, \{n_k\})$ *jest zdefiniowany przez formułę:*

$$(3.11) \qquad x_{k+1} = t_k T^{n_k}(x_k) + (1 - t_k)x_k, \textit{ gdzie } x_1 \in C \textit{ jest ustalony dowolnie.}$$

Dwustopniowy process Ishikawy jest uogólnieniem jednostopniowego procesu Manna. Proces Ishikawy dopuszcza większą elastyczność w definicji parametrów algorytmu, co jest ważne z punktu widzenia implementacji numerycznej jako że zwykle prowadzi do szybszej zbieżności procesu.

Definicja 3.4. [H1, Definition 5.1] *Niech* $T \in \mathcal{T}_r(C)$ *i niech* $\{n_k\}$ *będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Niech* $\{t_k\} \subset (0,1)$ *będzie ograniczony od* 0 *i* 1, *niech* $\{s_k\} \subset (0,1)$ *będzie ograniczony od* 1. *Uogólniony proces Ishikawy generowany przez odwzorowanie* T, *ciągi* $\{t_k\}$ *i* $\{s_k\}$, *oraz ciąg* $\{n_k\}$, *oznaczany jako* $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\}, \{n_k\})$, *jest zdefiniowany przez formułę:*

(3.12)
$x_{k+1} = t_k T^{n_k}(s_k T^{n_k}(x_k)+(1-s_k)x_k)+(1-t_k)x_k,$ *gdzie* $x_1 \in C$ *jest ustalony dowolnie.*

Mówimy,że uogólniony proces Manna (Ishikawy) jest dobrze określony jeśli

$$\limsup_{k\to\infty} a_{n_k}(x_k) = 1.$$

Założenie to nie jest w rzeczywistości zbyt restryktywne ponieważ, jak można pokazać, poprzez odpowiedni wybór ciągu $\{n_k\}$ proces taki zawsze można uczynić dobrze określonym.

Warto w tym miejscu napomknąć, że dowody poniższych twierdzeń o słabej zbieżności wymagają w istocie udowodnienia całego szeregu technicznych i pomocniczych rezultatów; odsyłamy do [H1] po dalsze detale.

Przypomnijmy, że silnie rosnący ciąg $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$ nazywa sie quasi okresowy jeśli ciąg $\{n_{i+1} - n_i\}$ jest ograniczony.

Twierdzenie 3.6. [H1, Theorem 4.1] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, a C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Niech $T \in \mathcal{T}_r(C)$, $\{t_k\} \subset (0,1)$ będzie ograniczony od 0 i 1. Załóżmy, że uogólniony proces Manna $gM(T, \{t_k\}, \{n_k\})$ jest dobrze określony. Jeśli założymy dodatkowo, że zbiór $\mathcal{J} = \{j : n_{j+1} = 1 + n_j\}$ jest quasi okresowy, to ciąg $\{x_k\}$ generowany przez $gM(T, \{t_k\}, \{n_k\})$ zmierza słabo do punktu stałego dla odwzorowania T.*

Twierdzenie 3.7. [H1, Theorem 5.1] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnościa Opiala, a C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Niech $T \in \mathcal{T}_r(C)$. Niech $\{t_k\} \subset (0,1)$ będzie ograniczony od 0 i 1, $\{s_k\} \subset (0,1)$ ograniczony od 1. Załóżmy, że uogólniony proces Ishikawy $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\}, \{n_k\})$ jest dobrze określony. Jeśli założymy dodatkowo, że zbiór $\mathcal{J} = \{j : n_{j+1} = 1 + n_j\}$ jest quasi okresowy, to ciąg $\{x_k\}$ generowany przez $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\}, \{n_k\})$ zmierza słabo do punktu stałego dla odwzorowania T.*

Warto w tym miejscu podkreślić, że dwa powyższe twierdzenia definiują konstruktywne algorytmy, które mogą być w rzeczywistości zaimplementowane numerycznie. Pracując nad zastosowaniami tych twierdzeń, powinno się wziąć pod uwagę w jaki sposób dodatkowe własności odwzorowań, zbiorów i norm mogą wpłynąć na zbieżność i stabilność algorytmu.

Jest faktem interesującym, że jeśli T^m jest odwzorowaniem zwartym dla pewnego m, to oba te procesy są silnie zbieżne do punktu stałego dla T nawet bez konieczności założenia własności Opiala. Poniższy rezultat uogólnia Twierdzenie 2 z pracy [51] na przypadek odwzorowań asymptotycznie punktowo nierozszerzających.

Twierdzenie 3.8. [H1, Theorem 6.1] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha, a C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Niech $T \in \mathcal{T}_r(C)$. Załóżmy, że T^m jest odwzorowaniem zwartym dla pewnego $m \geqslant 1$. Niech $\{t_k\} \subset (0,1)$ będzie ograniczony od 0 i 1, $\{s_k\} \subset (0,1)$ ograniczony od 1. Załóżmy,że uogólniony proces Manna $gM(T,\{t_k\},\{n_k\})$ (odp. uogólniony proces Ishikawy $gI(T,\{t_k\},\{s_k\},\{n_k\})$) jest dobrze określony. Jeśli założymy dodatkowo, że zbiór $\mathcal{J} = \{j : n_{j+1} = 1 + n_j\}$ jest quasi okresowy, to ciąg $\{x_k\}$ generowany przez $gM(T,\{t_k\},\{n_k\})$ (odp. $gI(T,\{t_k\},\{s_k\},\{n_k\})$) zmierza silnie do punktu stałego dla odwzorowania T.*

Sytuacja ogólna, tj. bez założenia, że półgrupa jest generowana przez pojedyńcze odwzorowanie, jest zdecydowanie bardziej skomplikowana. Przypadek ten badany był w pracy [H4], która była także przedstawiona na międzynarodowych warsztatach z okazji 60-tych urodzin J. Borweina. W pracy tej rozważano poniższe dwa procesy. Przez $\mathcal{S}(C)$ rozumiemy klasę wszystkich asymptotycznie punktowo nierozszerzających półgrup na C takich, że

$$M_t = \sup\{a_t(x) : x \in C\} < \infty, \ \textit{dla wszystkich } t \in J, \tag{3.13}$$

$$\limsup_{t\to\infty} M_t = 1. \tag{3.14}$$

Definicja 3.5. [H4, Definition 2.9] *Niech $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$, $\{t_k\} \subset J$ oraz $\{c_k\} \subset (0,1)$. Uogólniony iteracyjny proces Krasnoselskiego-Manna generowany przez półgrupę $\mathcal{F}$, oraz ciągi $\{c_k\}$ i $\{t_k\}$, jest zdefiniowany wzorem*

$$x_{k+1} = c_k T_{t_k}(x_k) + (1-c_k)x_k, \ \textit{gdzie } x_1 \in C \textit{ jest wybrany dowolnie}, \tag{3.15}$$

oraz

(1) $\{c_k\}$ *jest ograniczony od* 0 *i* 1*,*

(2) $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$*,*

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{t_n}(x) < \infty$ *dla każdego* $x \in C$*.*

Definicja 3.6. [H4, Definition 2.12] *Niech* $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$*,* $\{t_k\} \subset J$*. Niech Let* $\{c_k\} \subset (0,1)$*, oraz* $\{d_k\} \subset (0,1)$*. Uogólniony proces iteracyjny Ishikawy gI(*$\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\}$*) generowany przez półgrupę* $\mathcal{F}$*, oraz ciągi* $\{c_k\}$*,* $\{d_k\}$ *i* $\{t_k\}$*, jest zdefiniowany wzorem*

$$x_{k+1} = c_k T_{t_k}(d_k T_{t_k}(x_k) + (1-d_k)x_k) + (1-c_k)x_k, \tag{3.16}$$

gdzie $x_1 \in C$ *jest dowolnie wybrany, oraz*

(1) $\{c_k\}$*,* $\{d_k\}$ *są ograniczone od* 0 *i* 1*,*

(2) $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$*,*

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{t_n}(x) < \infty$ *dla każdego* $x \in C$*.*

Następująca wersja zasady półciągłości została udowodniona w [H4].

Twierdzenie 3.9. [H4, Theorem 2.3] *Niech* X *będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala,* C *ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem* X*. Załóżmy, że* $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ *oraz że istinieje* $w \in X$ *i* $\{x_n\} \subset C$ *takie że* $x_n \rightharpoonup w$*. Załóżmy ponadto, że istnieje* $s \in J$ *takie że* $\|T_s(x_n) - x_n\| \to 0$ *gdy* $n \to \infty$*. Wtedy* $w \in F(T_{ks})$ *dla dowolnej liczby naturalnej* k*.*

Twierdzenie to razem z kilkoma technicznymi i pomocniczymi rezultatami stanowiło zasadniczy krok niezbędny do uzyskania następującego generycznego twierdzenia o słabej zbieżności takich procesów.

Twierdzenie 3.10. [H4, Theorem 2.4] *Niech* X *będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala,* C *ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem* X*. Załóżmy, że* $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ *oraz że* $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$ *jest dobrze określonym uogólnionym procesem Krasnoselskiego-Manna. Jeśli ciąg* $\{x_k\}$ *wygenerowany przez* $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$ *jest ciągiem przybliżającym punkt stały dla każdego* $s \in A \subset J$ [6]*, gdzie* A *jest zbiorem generującym zbioru* J [7]*, to ciąg* $\{x_k\}$ *jest słabo zbieżny do wspólnego punktu stałego* $w \in F(\mathcal{F})$*.*

[6] Co oznacza, że $\|T_s(x_k) - x_k\| \to 0$.

[7] A jest generujący dla J jeśli dla każdego $s \in J$ istnieją $s_1, s_2 \in A$ i $n \in \mathbb{N}$ takie, że $s = ns_1 + s_2$.

Twierdzenie 3.11. [H4, Theorem 2.7] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Załóżmy, że $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ oraz że $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$ jest dobrze określonym uogólnionym procesem Ishikawy. Jeśli ciąg $\{x_k\}$ wygenerowany przez $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$ jest ciągiem przybliżającym punkt stały dla każdego $s \in A \subset J$, gdzie A jest zbiorem generującym zbioru J, to ciąg $\{x_k\}$ jest słabo zbieżny do wspólnego punktu stałego $w \in F(\mathcal{F})$.*

Powyższe twierdzenia zastosowano do przypadku, gdy zbiór parametryzujący J jest zgenerowany przez zbiór przeliczalny. W szczególności udało się uzyskać dwa następujące ważne rezultaty.

Twierdzenie 3.12. [H4, Theorem 2.5] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Niech $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ będzie półgrupą posiadającą przeliczalny zbiór generujący $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ...\}$. Załóżmy, że $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$ jest dobrze określonym uogólnionym procesem Krasnoselskiego-Manna. Załóżmy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ spełniającego $m \leqslant card(A)$ istnieje silnie rosnący, quasi okresowy ciąg liczb naturalnych $\{j_k(m)\}$ z quasi okresem p_m, taki że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $t_{j_{k+1}(m)} = \alpha_m + t_{j_k(m)}$. Wtedy ciąg $\{x_k\}$ wygenerowany przez $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$ słabo zmierza do wspólnego punktu stałego $w \in F(\mathcal{F})$.*

Twierdzenie 3.13. [H4, Theorem 2.8] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Niech $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ będzie półgrupą posiadającą przeliczalny zbiór generujący $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ...\}$. Załóżmy, że $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$ jest dobrze określonym uogólnionym procesem Ishikawy. Załóżmy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ spełniającego $m \leqslant card(A)$ istnieje silnie rosnący, quasi okresowy ciąg liczb naturalnych $\{j_k(m)\}$ z quasi okresem p_m, taki że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $t_{j_{k+1}(m)} = \alpha_m + t_{j_k(m)}$. Wtedy ciąg $\{x_k\}$ wygenerowany przez $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$ słabo zmierza do wspólnego punktu stałego $w \in F(\mathcal{F})$.*

Zauważmy, że Theorem 4.1 w [H1] (odp. Theorem 5.1) jest w rzeczywistości specjalnym przypadkiem Twierdzenia 3.12 (odp. Twierdzenia 3.13) przy $A = \{1\}$. Jak łatwo zauważyć zawsze można skonstruować ciąg $\{t_k\}$ spełniający założenia

Twierdzenia 3.12 (odp. Twierdzenia 3.13). W trakcie konstrukcji konkretnej implementacji tego algorytmu główną trudnością będzie zapewnienie, że skonstruowany ciąg $\{t_k\}$ nie jest "za rzadki" w takim sensie, że odpowiadający mu proces pozostaje dobrze określony.

Zastosowanie twierdzenia generycznego do ciągłego zbioru parametrów przyniosło następujące dwa twierdzenie. Przypomnijmy, że półgrupa $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ jest równociągła jeśli rodzina odwzorowań $\{t \mapsto T_t(x) : x \in C\}$ jest równociągła w $t = 0$.

Twierdzenie 3.14. [H4, Theorem 2.6] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Załóżmy, że $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ jest równociągła oraz że $B \subset \overline{B} = A \subset J$, gdzie A jest zbiorem generującym dla J. Niech $\{x_k\}$ będzie wygenerowany przez dobrze określony uogólniony proces Krasnoselskiego-Manna $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$. Jeśli dla każdego $s \in B$ istnieje silnie rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_k\}$ spełniających warunki następujące:*

(a) $t_{j_{k+1}} - t_{j_k} \to s$ gdy $k \to \infty$,

(b) $\|x_k - x_{j_k}\| \to 0$ gdy $k \to \infty$,

to ciąg $\{x_k\}$ jest słabo zbieżny do wspólnego punktu stałego $w \in F(\mathcal{F})$.

Twierdzenie 3.15. [H4, Theorem 2.9] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha z własnością Opiala, a C ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem X. Załóżmy, że $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ jest równociągła oraz że $B \subset \overline{B} = A \subset J$, gdzie A jest zbiorem generującym dla J. Niech $\{x_k\}$ będzie wygenerowany przez dobrze określony uogólniony proces Ishikawy $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$. Jeśli dla każdego $s \in B$ istnieje silnie rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_k\}$ spełniających warunki następujące:*

(a) $t_{j_{k+1}} - t_{j_k} \to s$ gdy $k \to \infty$,

(b) $\|x_k - x_{j_k}\| \to 0$ gdy $k \to \infty$,

to ciąg $\{x_k\}$ jest słabo zbieżny do wspólnego punktu stałego $w \in F(\mathcal{F})$.

Zauważmy, że zbiór B w Twierdzeniu 3.14 (odp. Twierdzeniu 3.15) zawsze może być uczyniony przeliczalnym. A zatem ciąg $\{t_k\}$ spełniający założenia Twierdzenia 3.14 (odp. Twierdzenia 3.15) zawsze może być skonstruowany. Jak poprzednio główną trudnością będzie zapewnienie, że odpowiadający proces jest dobrze określony.

Podobnie jak w przypadku półgrupy wygenerowanej przez jedno odwzorowanie, przy założeniu zwartości zbioru C można udowodnić silną zbieżność obu procesów do wspólnego punktu stałego. Ten fakt był ujęty w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.16. [H4, Theorem 2.10] *Niech C będzie zwartym, wypukłym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha X. Niech $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(C)$ oraz $B \subset \overline{B} = A \subset J$ gdzie A jest zbiorem generującym dla J. Niech $\{x_k\}$ będzie wygenerowany przez dobrze określony uogólniony proces Krasnoselskiego-Manna $gKM(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{t_k\})$ (odp. uogólniony proces Ishikawy $gI(\mathcal{F}, \{c_k\}, \{d_k\}, \{t_k\})$). Jeśli dla każdego $s \in B$ istnieje silnie rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_k\}$ taki, że:*

(a) $t_{j_{k+1}} - t_{j_k} \to s$ gdy $k \to \infty$,

(b) $\|x_k - x_{j_k}\| \to 0$ gdy $k \to \infty$,

to ciag $\{x_k\}$ jest silnie zbieżny do wspólnego punktu stałego $x \in F(\mathcal{F})$.

Rozważmy teraz rezultaty osiągnięcia naukowego dotyczące algorytmów niejawnych. Pomysł procesów niejawnych zasadza się na następującej obserwacji. Niech C będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha X. Niech $T : C \to C$ będzie odwzorowaniem nierozszerzającym. Twierdzenie Browdera z 1965 roku [6] głosi, że takie T ma w C punkt stały. Rodzi się natychmiast pytanie jak skonstruować taki punkt stały. Jedna z takich metod bazuje na obserwacji, że dla każdego $0 < c < 1$ oraz dowolnego $x_0 \in C$ równanie

$$x = cT(x) + (1 - c)x_0 \tag{3.17}$$

ma jedyne rozwiązanie $x_c \in C$, którego istnienie jest zagwaratowane twierdzeniem Banacha o punkcie stałym, a które może być uzyskane jako silna granica kolejnych przybliżeń. Browder [6] (odp. Reich [48]) udowodnił, że gdy $c \to 1$, to x_c silnie zmierza do punktu stałego dla T w przestrzeni Hilberta (odp. jednostajnie gładkiej przestrzeni Banacha). Postawmy ważne i ciekawe pytanie, czy taka metoda konstrukcji punktów stałych, zwana często procesem niejawnych iteracji, może być użyta w przypadku półgrup odwzorowań nierozszerzających.

Znane są rezultaty o zbieżności takich procesów dla nierozszerzających półgrup w przestrzeniach Hilberta i przestrzeniach Banacha z własnością Opiala, patrz np. [56, 66, 36, 50, 63]. Jednakowoż wiele ważnych przestrzeni jak np. $L^p[0,1]$ dla $p \neq 2$ nie posiada własności Opiala. W pracy [H8] nie założono własności Opiala, ale założono jednostajną gładkość przestrzeni X. $L^p[0,1]$ dla $p > 1$ są typowymi przykładami takich przestrzeni.

Rozpocznijmy nasze rozważania od podania precyzyjnej definicji procesu niejawnych iteracji, oraz odpowiednich pojęć towarzyszących.

Definicja 3.7. [H8, Definition 3.1] *Przy zadanej półgrupie nierozszerzającej* $\mathcal{F} = \{T_t : t \in [0,\infty)\}$ *na* C*, process niejawnych iteracji* $P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$ *jest zdefiniowany poprzez następującą formułę:*

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{k+1} = c_k T_{t_{k+1}}(x_{k+1}) + (1 - c_k)x_k, \ \text{dla } k \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

gdzie $\{c_k\} \subset (0,1)$ *jest ograniczony od* 0 *i* 1*,* $\{t_k\} \subset (0,\infty)$*. Będziemy też mówić, że ciąg* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *jest generowany przez proces* $P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$ *i pisać*

$$\{x_k\} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\}). \tag{3.19}$$

Dla $k \in \mathbb{N}^0$*,* $u \in C$*,* $w \in C$ *wprowadźmy następujące oznaczenie*

$$P_{k,w}(u) = c_k T_{t_{k+1}}(u) + (1 - c_k)w. \tag{3.20}$$

Ponieważ każde odwzorowanie $P_{k,w}(u) : C \to C$ *jest zwężające, z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że każde* x_{k+1} *w* (3.18) *jest jednoznacznie wyznaczone.*

Ażeby udowodnić zbieżność takiego procesu będziemy musieli nałożyć pewne restrykcje na $\{t_k\}$. To wiedzie nas do pojęcia znormalizowanego procesu niejawnych iteracji.

Definicja 3.8. [H8, Definition 3.2] *Mówimy, że proces niejawnych iteracji*

$$\{x_k\} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$$

jest znormalizowany jeśli

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0 \tag{3.21}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k}\|T_{t_k}(x_k) - x_k\| = 0. \tag{3.22}$$

Warto tu zaznaczyć, że jak pokazano w [H8, Remark 3.1], zawsze można skonstruować ciąg $\{t_k\}$ spełniający warunki (3.21) i (3.22).

Jako przygotowanie do głównego twierdzenia o zbieżności, udowodniono następujące twierdzenie, które wskazuje na związki pomiędzy słabą zbieżnością, ciągami przybliżającymi punkt stały, a wspólnymi punktami stałymi dla nierozszerzających półgrup w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie 3.17. [H8, Theorem 4.1] *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha, C niech będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem X. Niech $\{s_i\}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $s_i > 0$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ i $s_i \to 0$. Niech $\mathcal{F}$ będzie równociągłą nierozszerzającą półgrupą na C, $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C$, $w \in C$ będą takie, że $w_i \rightharpoonup w$ oraz*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{s_i}\|T_{s_i}(w_i) - w_i\| = 0. \tag{3.23}$$

Wtedy $w \in F(\mathcal{F})$.

Lemat następujący bierze na siebie techniczny ciężar dowodu zbieżności.

Lemat 3.2. [H8, Lemma 4.1] *Niech C będzie ograniczonym, domkniętym i wypukłym pozbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha X. Niech $\mathcal{F}$ będzie ciągłą nierozszerzającą półgrupą na C i niech $\{x_k\} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$. Załóżmy, że $w_1,\ w_2 \in F(\mathcal{F})$. Wtedy następująca granica*

$$\lim_{k\to\infty} \|tx_k + (1-t)w_1 - w_2\| \tag{3.24}$$

istnieje dla dowolnego $t > 0$.

Jako konsekwencję Lematu 3.2 dostaniemy następny rezultat, który będzie użyty poniżej do dowodu twierdzenia o zbieżności.

Lemat 3.3. [H8, Lemma 4.2] *Niech C będzie ograniczonym, domkniętym i wypukłym pozbiorem jednostajnie wypukłej i jednocześnie jednostajnie gładkiej przestrzeni Banacha X. Niech $\mathcal{F}$ będzie ciągłą nierozszerzającą półgrupą na C i niech*

$\{x_k\} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$. *Załóżmy, że* $w_1,\ w_2 \in F(\mathcal{F})$. *Niech* $y,\ z$ *będą dwoma punktami skupienia ciągu* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$. *Mamy wtedy*

$$\langle y - z, J(w_1 - w_2)\rangle = 0. \tag{3.25}$$

Lematy poprzednie pozwalają na udowodnienie twierdzenia o słabej zbieżności procesu niejawnych iteracji.

Twierdzenie 3.18. [H8, Theorem 4.2] *Niech* C *będzie ograniczonym, domkniętym i wypukłym pozbiorem jednostajnie wypukłej i jednocześnie jednostajnie gładkiej przestrzeni Banacha* X. *Niech* $\mathcal{F}$ *będzie równociągła nierozszerzającą półgrupą na* C *i niech* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^0} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$ *będzie znormalizowanym procesem niejawnych iteracji. Istnieje wtedy wspólny punkt stały* $w \in F(\mathcal{F})$ *taki, że* $x_k \rightharpoonup w$.

Dowód. Z tego, że $P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$ jest znormalizowany wynika, że $t_k \to 0$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k} \|T_{t_k}(x_k) - x_k\| = 0. \tag{3.26}$$

Niech $y,\ z \in C$ będą dwoma słabymi punktami skupienia ciągu $\{x_k\}$. Isnieją zatem dwa podciągi $\{x_{\alpha_n}\}$ i $\{x_{\beta_n}\}$ ciagu $\{x_k\}$ takie, że $x_{\alpha_n} \rightharpoonup y,\ \ x_{\beta_n} \rightharpoonup z$, oraz poprzez (3.26), takie że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_{\alpha_n}} \|T_{t_{\alpha_n}}(x_{\alpha_n}) - x_{\alpha_n}\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_{\beta_n}} \|T_{t_{\beta_n}}(x_{\beta_n}) - x_{\beta_n}\| = 0.$$

Używając Twierdzenia 3.17 wnioskujemy, że $y \in F(\mathcal{F})$ i $z \in F(\mathcal{F})$. Z Lematu 3.3 wynika, że $\|y - z\|^2 = \langle y - z, J(y - z)\rangle = 0$, co implikuje, że $y = z$. A zatem ciąg $\{x_k\}$ posiada conajwyżej jeden słaby punkt skupienia. Ponieważ C jest słabo ciągowo zwarty więc $\{x_k\}$ posiada dokładnie jeden punkt skupienia $w \in C$. To oznacza, że $x_k \rightharpoonup w$. Z Twierdzenia 3.17 wynika, że $w \in F(\mathcal{F})$, co kończy dowód. □

Silna zbieżność procesów niejawnych iteracji była także rozważana w pracy [H6], gdzie udowodniono następujący rezultat.

Twierdzenie 3.19. [H6, Theorem 2.6] *Niech* C *będzie niepustym, wypukłym i zwartym podzbiorem jednostajnie wypukłej i jednocześnie jednostajnie gładkiej* *przestrzeni Banacha X. Niech $\mathcal{F}$ będzie ciągłą nierozszerzającą półgrupą na C oraz niech $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^0} = P(C, \mathcal{F}, x_0, \{c_k\}, \{t_k\})$ będzie procesem niejawnych iteracji. Załóżmy, że*

(i) $t_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\liminf_{n\to\infty} t_n = 0$

(iii) $\limsup_{n\to\infty} t_n > 0$

(iv) $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0.$

Istnieje wtedy wspólny punkt stały $x \in F(\mathcal{F})$ taki, że $x_k \to x$.

3.2.3. **Istnienie wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych.**

Celem pracy [H3] było udowodnienie istnienia wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych, które są naturalnym uogólnieniem zarówno funkcyjnych jak i ciągowych wariantów wielu ważnych ze względu na zastosowania przestrzeni, takich jak przestrzenie Lebesgue'a, Orlicza, Musielaka-Orlicza, Lorentza, Calderona-Łozanowskiego (por. [10]) i wielu innych. Teoria modularnych przestrzeni funkcyjnych była zainicjowana przeze mnie w dwóch pracach [D9, D10] a następnie usystematyzowana w książce "Modular Function Spaces" [D11]; odsyłamy do tej pozycji po wyczerpująca listę przykładów i przypadków specjalnych. Teoria punktów stałych w przestrzeniach modularnych funkcyjnych wzięła swoje początki w nowatorskiej pracy z 1990 roku, napisanej wspólnie z M.A. Khamsim i S. Reichem [D14]. Warto tu nadmienić, że z punktu widzenia zastosowań warunki typu modularnego są zwykle łatwiejsze do zweryfikowania niż ich metryczne lub normowe odpowiedniki. Więcej, istnieją także ważne rezultaty, które mogą być udowodnione wyłącznie przy użyciu aparatu pojęciowgo przestrzeni modularnych funkcyjnych. Wydana ostatnio ksiażka [D30], rezultat mojej współpracy z M.A. Khamsim, zawiera informację o aktualnym stanie teorii punktów stałych w kontekście przestrzeni modularnych funkcyjnych.

Niech Ω będzie niepustym zbiorem, a Σ pewną nietrywialną σ-algebrą podzbiorów Ω. Niech $\mathcal{P}$ będzie δ-pierścieniem podzbiorów Ω [8] takim, że $E \cap A \in \mathcal{P}$ dla dowolnych $E \in \mathcal{P}$ i $A \in \Sigma$ [9]. Załóżmy, że istnieje rosnący ciąg zbiorów $K_n \in \mathcal{P}$ takich, że $\Omega = \bigcup K_n$. Przez $\mathcal{E}$ oznaczać będziemy przestrzeń liniową wszystkich σ-mierzalnych funkcji prostych zerujących się poza pewnym zbiorem z $\mathcal{P}$. $\mathcal{M}_\infty$ oznacza przestrzeń wszystkich rozszerzonych σ-mierzalnych funkcji (lub krótko: mierzalnych funkcji), tj.wszystkich funkcji $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ takich, że istnieje ciąg $\{g_n\} \subset \mathcal{E}$, $|g_n| \leqslant |f|$ oraz $g_n(\omega) \to f(\omega)$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$. Przez 1_A oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru A.

Definicja 3.9. [H3, Definition 2.1] *Załóżmy, że dana jest nietrywialna, wypukła funkcja parzysta $\rho : \mathcal{M}_\infty \to [0, \infty]$. Mówimy, że ρ jest regularnym, wypukłym pseudomodularem funkcyjnym jeśli:*

(i) $\rho(0) = 0$;
(ii) *ρ jest monotoniczna, t.j. jesli $|f(\omega)| \leqslant |g(\omega)|$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to $\rho(f) \leqslant \rho(g)$, gdzie $f, g \in \mathcal{M}_\infty$;*
(iii) *ρ jest ortogonalnie subaddytywna, t.j. $\rho(f1_{A\cup B}) \leqslant \rho(f1_A) + \rho(f1_B)$ dla dowolnych $A, B \in \Sigma$ takich że $A \cap B \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{M}$;*
(iv) *ρ ma własność Fatou, t.j. jeśli $|f_n(\omega)| \uparrow |f(\omega)|$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$, gdzie $f \in \mathcal{M}_\infty$;*
(v) *ρ jest porządkowo ciągła w $\mathcal{E}$, t.j. jeśli $g_n \in \mathcal{E}$ oraz $|g_n(\omega)| \downarrow 0$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to $\rho(g_n) \downarrow 0$.*

Podobnie jak w przypadku klasycznych przestrzeni miarowych mówimy, że zbiór $A \in \Sigma$ jest ρ-zerowy jeśli $\rho(g1_A) = 0$ dla wszystkich $g \in \mathcal{E}$. Będziemy mówić, że jakaś własność zachodzi ρ-prawie wszędzie (ρ-p.w.) jeśli zbiór wyjątkowy jest ρ-zerowy. Jak zwykle będziemy identyfikować każdą parę zbiorów mierzalnych, których różnica symetryczna jest zbiorem ρ-zerowym, a także każdą parę funkcji mierzalnych różniących się tylko na ρ-zerowym zbiorze. Uwzględniając te konwencje zdefiniujmy

$$\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}, \rho) = \{f \in \mathcal{M}_\infty; |f(\omega)| < \infty \ \rho - p.w\}, \tag{3.27}$$

[8] Rodzina $\mathcal{P}$ jest δ-pierścieniem gdy jest ona zamknięta ze względu na przeliczalne przecięcia oraz ze względu na skończone sumy i różnice mnogościowe.

[9] $\mathcal{P}$ odgrywa w tej teorii rolę analogiczną do roli δ-pierścienia zbiorów o mierze skończonej.

gdzie każda $f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}, \rho)$ jest w rzeczywistością klasą równoważności funkcji równych sobie ρ-p.w. Zwykle będziemy pisać $\mathcal{M}$ zamiast $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}, \rho)$.

Definicja 3.10. [H3, Definition 2.2] *Niech ρ będzie regularnym wypukłym pseudomodularem funkcyjnym.*

(1) Mówimy, że ρ jest regularnym wypukłym semimodularem funkcyjnym jeśli z faktu $\rho(\alpha f) = 0$ dla każdego $\alpha > 0$ wynika, że $f = 0$ $\rho - p.w.$;
(2) Mówimy, że ρ jest regularnym wypukłym modularem funkcyjnym jeśli z faktu $\rho(f) = 0$ wynika, że $f = 0$ $\rho - p.w.$

Klasę wszystkich niezerowych regularnych wypukłych modularów funkcyjnych określonych na Ω oznaczać będziemy symbolem $\Re$.

Oznaczmy $\rho(f, E) = \rho(f 1_E)$ dla $f \in \mathcal{M}$, $E \in \Sigma$. Łatwo wykazać, że $\rho(f, E)$ jest pseudomodularem funkcyjnym w sensie Def.2.1.1 in [D11] (mówiąc precyzyjniej, jest pseudomodularem funkcyjnym posiadającym własność Fatou). Dlategoteż możemy stosować rezultaty standartowej teorii przestrzeni funkcyjnych modularnych, zob.[D9, D10, D11].

Definicja 3.11. [H3, Definition 2.4] [D9, D10, D11] *Niech ρ będzie regularnym wypułym modularem funkcyjnym.*

(a) Modularna przestrzeń funkcyjna jest to przestrzeń liniowa $L_\rho(\Omega, \Sigma)$, lub krótko L_ρ, zdefiniowana następująco

$$L_\rho = \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) \to 0 \text{ gdy } \lambda \to 0\}.$$

(b) Następna formuła definiuje normę w L_ρ (znaną w literaturze jako norma Luxemburga):

$$\|f\|_\rho = \inf\{\alpha > 0 : \rho(f/\alpha) \leqslant 1\}.$$

Poniższe twierdzenie przypomina kilka podstawowych własności przestrzeni modularnych funkcyjnych.

Twierdzenie 3.20. [H3, Theorem 2.5]

(1) $(L_\rho, \|\cdot\|_\rho)$ jest zupełna i norma $\|\cdot\|_\rho$ jest monotoniczna względem naturalnego porządku w $\mathcal{M}$.
(2) $\|f_n\|_\rho \to 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\rho(\alpha f_n) \to 0$ dla każdego $\alpha > 0$.

(3) Jeśli $\rho(\alpha f_n) \to 0$ dla pewnego $\alpha > 0$ to istnieje podciąg $\{g_n\}$ of $\{f_n\}$ taki że $g_n \to 0$ $\rho - p.w.$
(4) Jeśli $\{f_n\}$ zmierza jednostajnie do f na zbiorze $E \in \mathcal{P}$ to $\rho(\alpha(f_n - f), E) \to 0$ dla kazdego $\alpha > 0$.
(5) Niech $f_n \to f$ $\rho - p.w.$ Wtedy istnieje niemalejący ciag zbiorów $H_k \in \mathcal{P}$ taki że $H_k \uparrow \Omega$ oraz $\{f_n\}$ zmierza jednostajnie do f na każdym H_k (Twierdzenie Jegorowa).
(6) $\rho(f) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \rho(f_n)$ gdy $f_n \to f$ $\rho - p.w.$ (własność ta jest równoważna własności Fatou).
(7) Definiując $L^0_\rho = \{f \in L_\rho :\ \rho(f,\cdot)$ jest porządkowo ciągła $\}$ i $E_\rho = \{f \in L_\rho;\ \lambda f \in L^0_\rho$ dla wszystkich $\lambda > 0\}$ mamy:
  (a) $L_\rho \supset L^0_\rho \supset E_\rho$,
  (b) E_ρ ma własność Lebesgue'a, t.j. $\rho(\alpha f, D_k) \to 0$ dla $\alpha > 0$, $f \in E_\rho$, $D_k \downarrow \emptyset$.
  (c) E_ρ jest domknięciem przestrzeni $\mathcal{E}$ (w sensie normy $\|\cdot\|_\rho$).

Następująca własność odgrywa ważną rolę w teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych.

Definicja 3.12. [H3, Definition 2.6] *Niech $\rho \in \Re$. Mówimy, że ρ ma własnosc Δ_2 jeśli $\sup\limits_n \rho(2f_n, D_k) \to 0$ gdy $D_k \downarrow \emptyset$ i $\sup\limits_n \rho(f_n, D_k) \to 0$.*

Twierdzenie 3.21. [H3, Theorem 2.7] *Niech $\rho \in \Re$. Następujące warunki są równoważne:*
(a) ρ ma własność Δ_2,
(b) L^0_ρ jest liniową podprzestrzenią przestrzeni L_ρ,
(c) $L_\rho = L^0_\rho = E_\rho$,
(d) jeśli $\rho(f_n) \to 0$ to $\rho(2f_n) \to 0$,
(e) jeśli $\rho(\alpha f_n) \to 0$ dla pewnego $\alpha > 0$ to $\|f_n\|_\rho \to 0$.

Definicja 3.13. [H3, Definition 2.8] *Niech $\rho \in \Re$.*
(a) Mówimy, że $\{f_n\}$ jest ρ-zbieżny do f i piszemy $f_n \to 0$ (ρ) gdy $\rho(f_n - f) \to 0$.
(b) Ciąg $\{f_n\}$, gdzie $f_n \in L_\rho$, nazywa się ρ-Cauchy jeśli $\rho(f_n - f_m) \to 0$ gdy $n, m \to \infty$.

(c) *Zbiór* $B \subset L_\rho$ *nazywa się* ρ*-domknięty jeśli dla dowolnego ciągu* $f_n \in B$*, zbieżność* $f_n \to f$ (ρ) *pociąga fakt, że* f *należy do* B.

(d) *Zbiór* $B \subset L_\rho$ *nazywa się* ρ*-ograniczony jeśli* $\sup\{\rho(f-g) : f \in B, g \in B\} < \infty$.

(e) *Zbiór* $C \subset L_\rho$ *nazywa się* ρ*-p.w. domknięty jeśli dla ciągu* $\{f_n\}$ *w* C *który* ρ*-p.w. zmierza do pewnego* f*, mamy* $f \in C$;

(f) *Zbiór* $C \subset L_\rho$ *nazywa się* ρ*-p.w. zwarty jeśli dla dowolnego ciągu* $\{f_n\}$ *w* C*, istnieje podciąg* $\{f_{n_k}\}$ *który* ρ*-p.w. zmierza do pewnego* $f \in C$.

(g) *Niech* $f \in L_\rho$ *i* $C \subset L_\rho$. ρ*-odległość pomiędzy* f *i* C *jest zdefiniowana jako*

$$d_\rho(f, C) = inf\{\rho(f-g) : g \in C\}.$$

Zauważmy, że ρ-zbieżność niekoniecznie musi implikować warunek ρ-Cauchey'ego. Ponadto, ogólnie rzecz biorąc $f_n \to f$ nie implikuje $\lambda f_n \to \lambda f$, $\lambda > 1$. Stosując Twierdzenie 3.20 nie jest trudno dowieść nastepującego rezultatu.

Propozycja 3.1. *Niech* $\rho \in \Re$.

(i) L_ρ *jest* ρ*-zupełna,*

(ii) ρ*-kule* $B_\rho(x, r) = \{y \in L_\rho : \rho(x-y) \leqslant r\}$ *są* ρ*-domknięte i* ρ*-p.w. domknięte.*

Zakończmy tę wstępną część podając modularną definicję odwzorowań lipschitzowskich, zwężających i nierozszerzających oraz związanych z nimi definicji półgrup nieliniowych odwzorowań.

Definicja 3.14. [H3, Definition 2.11] *Niech* $\rho \in \Re$ *i niech* $C \subset L_\rho$ *będzie niepusty i* ρ*-domknięty. Odwzorowanie* $T : C \to C$ *nazywa sie* ρ*-lipschitzowskie jeśli istnieje stała* $L > 0$ *taka, że*

$$\rho(T(f) - T(g)) \leqslant L\rho(f-g) \text{ dla dowolnych } f, g \in L_\rho.$$

T *nazywa sie* ρ*-zwężające jeśli* $L < 1$. T *nazywa sie* ρ*-nierozszerzające jeśli* $L = 1$.

Definicja 3.15. [H3, Definition 2.12] *Jednoparametrowa rodzina* $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ *odwzorowań* C *w siebie nazywa się* ρ*-lipschitzowską (odp.* ρ*-nierozszerzającą) półgrupą na* C *jeśli* $\mathcal{F}$ *spełnia następujące warunki:*

(i) $T_0(x) = x$ *dla* $x \in C$;

(ii) $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$ *dla* $x \in C$ *i* $t, s \geqslant 0$;

(iii) *dla każdego* $t \geqslant 0$, T_t *jest* ρ*-lipschitzowskie (odp.* ρ*-nierozszerzające).*

Definicja 3.16. [H3, Definition 2.13] *Jednoparametrowa rodzina* $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ *odwzorowań* C *w siebie nazywa się* ρ*-zwężającą półgrupą na* C *jeśli* $\mathcal{F}$ *spełnia następujące warunki:*

(i) $T_0(x) = x$ *dla* $x \in C$*;*

(ii) $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$ *dla* $x \in C$ *i* $t, s \geqslant 0$*;*

(iii) dla każdego $t \geqslant 0$*,* T_t *jest* ρ*-zwężające ze stałą* $0 < L_t < 1$ *taką, że* $\limsup_{t\to\infty} L_t < 1$*.*

Własność Opiala w przestrzeniach Banacha okazuje się skutecznym narzędziem w badaniu punktów stałych. Nie jest zatem zaskakującym fakt, że modularne wersje własności Opiala zaczęły odgrywać ważną rolę w teorii punktów stałych w przestrzeniach modularnych funkcyjnych.

Definicja 3.17. [H3, Definition 3.1] *Będziemy mówić, że* L_ρ *spełnia* ρ*-p.w. silną własność Opiala jeśli dla każdego* $\{f_n\} \in L_\rho$*, który jest* ρ*-p.w. zbieżny do* 0 *i takim, że istnieje* $\beta > 1$ *dla której*

$$\sup\{\rho(\beta f_n)\} < \infty, \tag{3.28}$$

następująca nierówność jest spełniona dla dowolnego $g \in E_\rho$

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(f_n + g) = \liminf_{n\to\infty} \rho(f_n) + \rho(g). \tag{3.29}$$

Jak wiemy z pracy Khamsiego [27], ρ-p.w. silna własność Opiala implikuje ρ-p.w. własność Opiala, oraz że każdy wypukły i ortogonalnie addytywny modular funkcyjny posiada ρ-p.w. silną własność Opiala. Przypomnijmy, że ρ nazywa się ortogonalnie addytywny jeśli $\rho(f, A\cup B) = \rho(f, A) + \rho(f, B)$ gdy $A \cap B = \emptyset$. Dlategoteż przestrzenie Orlicza i Musielaka-Orlicza muszą mieć ρ-p.w. silną własność Opiala. W szczególności dla każdego $p \geqslant 1$ przestrzeń $L^p[0, 1]$ jest przestrzenią Orlicza, a więc posiada ρ-p.w. silną własność Opiala, a zatem i ρ-p.w. własność Opiala. Ale jak wiadomo dla $p \neq 2$ przestrzenie $L^p[0, 1]$ nie posiadają normowej własności Opiala. Fakt ten pokazuje raz jeszcze skuteczność podejścia modularnego [10].

Typową metodą dowodzenia twierdzeń o punktach stałych w przestrzeniach Banacha jest konstrukcja punktu stałego poprzez szukanie elementu na którym

[10] Więcej informacji na ten temat można znaleźć w [D30].

pewna funkcja typu osiąga minimum. Ażeby móc stosować taką metodę trzeba rzecz jasna wiedzieć, że taki element rzeczywiście istnieje. W refleksywnych przestrzeniach Banacha funkcje typu są słabo półciągłe z dołu, a zatem osiągają minimum w jakimś punkcie w C. W przestrzeniach modularnych funkcyjnych ρ-typy nie są ogólnie rzecz biorąc półciągłe z dołu i dlatego potrzebne jest dodatkowo założenie silnej własności Opiala, które gwarantuje , że ρ-typy osiągają swoje minima.

Lemat 3.4. [H3, Lemma 3.5] *Niech $\rho \in \Re$. Załóżmy, że L_ρ ma ρ-p.w. silną własność Opiala. Niech $C \subset E_\rho$ będzie niepustym, ρ-p.w. zwartym zbiorem takim, że $\delta_\rho(\beta\ C) = \sup\{\rho(\beta(x-y)) : x, y \in C\} < \infty$, dla pewnego $\beta > 1$. Wtedy dowolny ρ-typ określony na C osiąga swoje minimum w C.*

Przypomnijmy, że ρ-typ τ jest funkcją zdefiniowaną przez następującą formułę:

$$\tau(u) = \limsup_{t\to\infty} \rho(u - u_t) \tag{3.30}$$

gdzie $u_t \in C$ dla każdego $t \geqslant 0$. W pracy [H3] użyto lemat powyższy jako jedno z głównych narzędzi dowodowych dla następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.22. [H3, Theorem 3.6] *Niech $\rho \in \Re$. Załóżmy, że L_ρ ma ρ-p.w. silną własność Opiala. Niech $C \subset E_\rho$ będzie niepustym, ρ-p.w. zwartym, wypukłym zbiorem takim, że $\delta_\rho(\beta\ C) = \sup\{\rho(\beta(x-y)) : x, y \in C\} < \infty$, dla pewnego $\beta > 1$. Niech $\mathcal{F}$ będzie ρ-zwężającą półgrupą na C. Wtedy $\mathcal{F}$ ma jedyny wspólny punkt stały $z \in C$ i dla każdego $u \in C$, $\rho(T_t(u) - z) \to 0$ gdy $t \to \infty$.*

W drugiej części artykułu [H3] dyskutowano przypadek ρ-nierozszerzających półgrup. Wymagało to uważnej analizy pewnych elementów geometrycznej teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych. W szczególności było niezbędne wyzyskanie odpowiedniej wersji jednostajnej wypukłości w sensie modularnym [11].

Definicja 3.18. [H3, Definition 4.1] *Niech $\rho \in \Re$. Zdefiniujmy następujące własności typu jednostajnej wypukłości dla modularu funkcyjnego ρ:*

(i) Niech $r > 0, \varepsilon > 0$. Oznaczmy

$$D_1(r,\varepsilon) = \{(f,g) : f, g \in L_\rho, \rho(f) \leqslant r, \rho(g) \leqslant r, \rho(f-g) \geqslant \varepsilon r\}.$$

[11] Szczegółowa informacja na temat geometrycznych własności przestrzeni modularnych funkcyjnych wraz z przykładami może być znaleziona w książce [D30]

Niech

$$\delta_1(r,\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\,\rho\Big(\frac{f+g}{2}\Big); (f,g) \in D_1(r,\varepsilon)\right\}, gdy D_1(r,\varepsilon) \neq \emptyset,$$

oraz $\delta_1(r,\varepsilon) = 1$ *gdy* $D_1(r,\varepsilon) = \emptyset$. *Mówimy, że* ρ *spełnia warunek* $(UC1)$ *jeśli dla każdego* $r > 0, \varepsilon > 0$, $\delta_1(r,\varepsilon) > 0$. *Zauważmy, dla każdego* $r > 0$, $D_1(r,\varepsilon) \neq \emptyset$, *dla* $\varepsilon > 0$ *wystarczająco małych.*

(ii) Mówimy, że ρ *spełnia warunek* $(UUC1)$ *jeśli dla każdego* $s \geqslant 0, \varepsilon > 0$ *istnieje*

$$\eta_1(s,\varepsilon) > 0$$

zależna od s *and* ε *taka, że*

$$\delta_1(r,\varepsilon) > \eta_1(s,\varepsilon) > 0 \text{ dla } r > s.$$

Potrzebować będziemy także własności, która pełniłaby rolę podobną do refleksywności przestrzeni Banacha. To wiedzie nas do następującej definicji.

Definicja 3.19. [H3, Definition 4.5] *Mówimy, że* L_ρ *ma własność* (R) *gdy każdy niemalejący ciąg* $\{C_n\}$ *niepustych,* ρ*-ograniczonych,* ρ*-domkniętych, wypukłych podzbiorów* L_ρ *ma niepuste przecięcie.*

Podobnie jak w przestrzeniach Banacha, modularna jednostajna wypukłośc implikuje własność (R):

Twierdzenie 3.23. [H3, Theorem 4.6] *Niech* $\rho \in \Re$ *spełnia* $(UUC1)$ *wtedy* L_ρ *ma własność* (R).

Następująca własność ciągów minimalizujących dostarcza ostatnie narzędzie potrzebne do udowodnienia twierdzenia o istnieniu dla ρ-nierozszerzających półgrup.

Lemat 3.5. [H3, Lemma 4.7] *Załóżmy, że* $\rho \in \Re$ *jest* $(UUC1)$. *Niech* $C \subset L_\rho$ *będzie* ρ*-ograniczonym,* ρ*-domkniętym, wypukłym zbiorem. Niech* τ *będzie* ρ*-typem wyznaczonym przez sieć* $\{x_t\}_{t\geqslant 0} \subset C$. *Wtedy każdy ciąg minimalizujący* τ *jest* ρ*-zbieżny. Ta* ρ*-granica nie zależy od wyboru ciągu minimalizującego*

Stosując Lemat 3.5 wraz z innymi geometrycznymi własnościami jednostajnie wypukłych przestrzeni modularnych funkcyjnych, udowodniono następujące twierdzenie o punktach stałych.

Twierdzenie 3.24. [H3, Theorem 4.8] *Załóżmy, że* $\rho \in \Re$ *spełnia* $(UUC1)$. *Niech* $C \subset L_\rho$ *będzie niepustym,* ρ*-ograniczonym,* ρ*-domkniętym, zbiorem wypukłym. Niech* $\mathcal{F}$ *będzie* ρ*-nierozszerzającą półgrupą na* C. *Wtedy zbiór* $F(\mathcal{F})$ *wszystkich wspólnych punktów stałych dla tej półgrupy jest niepusty,* ρ*-domknięty i wypukły.*

3.2.4. **Metody konstrukcji wspólnych punktów stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych.**

W pracy [H5] rozważano problem reprezentacji zbioru wszystkich wspólnych punktów stałych ρ-nierozszerzającej półgrupy odwzorowań działających w przestrzeniach modularnych poprzez zbiór punktów stałych jednego tylko, odpowiednio wybranego odzworowania nierozszerzającego. Reprezentacja taka - jak zobaczymy - pozwoli na użycie dla takiej półgrupy znanych algorytmów konstruujących punkt stały dla pojedyńczych odwzorowań nierozszerzających. Ten kluczowy rezultat jest podsumowany w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.25. [H5, Theorem 3.3] *Niech* $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ *będzie silnie ciągłą półgrupa* ρ*-nierozszerzającą określoną na* ρ*-ograniczonym podzbiorze* C *przestrzeni modularnej funkcyjnej* L_ρ, *gdzie* $\rho \in \Re$. *Niech* α *i* β *będą liczbami dodatnimi takimi, że* α/β *jest niewymierne. Ustalmy dowolną liczbę* $\lambda \in (0,1)$. *Wtedy*

$$F(\mathcal{F}) = F\Big(\lambda T_\alpha + (1-\lambda)T_\beta\Big). \tag{3.31}$$

Przypomnijmy, że półgrupa $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ nazywa sie silnie ciągła jeśli dla każdego ustalonego $z \in C$ funkcja

$$\Lambda_z(t) = \rho\Big(T_t(z)) - z\Big)$$

jest ciągła w $[0,\infty)$. Można dowieść, że jeśli półgrupa $\mathcal{F}$ jest ciągła i jednocześnie modular ρ jest jednostajnie ciągły to $\mathcal{F}$ jest silnie ciągła, gdzie ciągłość $\mathcal{F}$ jest rozumiana jako ρ-ciągłość odwzorowania $t \longmapsto T_t(z)$ w przedziale $[0,\infty)$ (przy dowolnie ustalonym $z \in C$). Przypomnijmy także definicję jednostajnej ciągłości modularów funkcyjnech.

Definicja 3.20. [H5, Definition 3.6] *Mówimy, że $\rho \in \Re$ jest jednostajnie ciagły jeśli do każdych $\varepsilon > 0$ i $L > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że*

$$|\rho(x) - \rho(x+h)| \leqslant \varepsilon, \tag{3.32}$$

o ile $\rho(h) < \delta$ oraz $\rho(x) \leqslant L$.

Wspomnijmy tutaj, że jednostajna ciągłość zachodzi dla szerokiej klasy modularów funkcyjnych. Można pokazać na przykład, że w przestrzeniach Orlicza L^φ dla miary bezatomowej [53] oraz dla miary czysto atomowej [26] jednostajna ciągłośc modularu Orlicza jest równoważna odpowiedniej własności Δ_2 funkcji Orlicza φ.

Twierdzenie (3.25) pozwala w pewnych przypadkach zredukować skomplikowane zadanie znalezienia wspólnych punktów stałych dla półgrupy odwzorowań do prostszego zadania znalezienia punktów stałych dla tylko jednego odwzorowania $\lambda T_\alpha + (1-\lambda)T_\beta$. Sekcja 4 pracy [H5] rozwija te ideę, zaczynając od zdefiniowania procesów Manna i Ishikawy dla jednego odwzorowania działającego w przestrzeni modularnej funkcyjnej.

Definicja 3.21. [H5, Definition 4.3] *Niech T będzie odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym zbioru $C \subset L_\rho$. Niech $\{t_k\} \subset (0,1)$ będzie ograniczony od 0 i 1. Uogólniony process Manna generowany przez odwzorowanie T i ciąg $\{t_k\}$, oznaczony przez $gM(T, \{t_k\})$, jest zdefiniowany poprzez następującą formułę iteracyjną:*

$$x_{k+1} = t_k T^k(x_k) + (1-t_k)x_k, \text{ gdzie } x_1 \in C \text{ jest ustalony dowolnie.} \tag{3.33}$$

Definicja 3.22. [H5, Definition 4.6] *Niech T będzie odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym zbioru $C \subset L_\rho$. Niech $\{t_k\} \subset (0,1)$ będzie ograniczony od 0 i 1, $\{s_k\} \subset (0,1)$ ograniczony od 1. Uogólniony process Ishikawy generowany przez odwzorowanie T oraz ciągi $\{t_k\}$ i $\{s_k\}$, oznaczony przez $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\})$, jest zdefiniowany poprzez następującą formułę iteracyjną:*

$$x_{k+1} = t_k T^k(s_k T^k(x_k) + (1-s_k)x_k) + (1-t_k)x_k, \text{ gdzie } x_1 \in C \text{ jest ustalony dowolnie.} \tag{3.34}$$

Następujący rezultat o zbieżności takiego procesu Manna okazał się użyteczny dla przypadku półgrup.

Twierdzenie 3.26. [D23] *Niech $\rho \in \Re$. Załóżmy, że*

(1) ρ spełnia $(UUC1)$,

(2) ρ ma silną własność Opiala,

(3) ρ ma własność Δ_2 i jest jednostajnie ciagły.

Niech $C \subset L_\rho$ będzie niepusty, ciągowo zwarty względem zbieżności ρ-p.w., wypukły, silnie ρ-ograniczony i ρ-domkniety. Niech T będzie ρ-nierozszerzalne. Niech $gM(T, \{t_k\})$ będzie uogólnionym procesem Manna. Wtedy istnieje $x \in F(T)$ taki, że $x_n \to x$ ρ-p.w.

Kombinacja Twierdzenia 3.25 z Twierdzeniem 3.26 daje następujący rezultat o zbieżności do wspólnego punktu stałego dla półgrupy odwzorowań ρ-nierozszerzających.

Twierdzenie 3.27. [H5, Theorem 4.5] *Niech C będzie niepustym, ciągowo zwartym względem zbieżności ρ-p.w., silnie ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym podzbiorem wypukłym przestrzeni L_ρ, gdzie $\rho \in \Re$ jest jednostajnie ciągły i ma własności $(UUC1)$, Δ_2 oraz silną własność Opiala. Niech $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ będzie ciągłą nierozszerzającą półgrupą na C. Niech $\{x_k\}$ będzie ciągiem generowanym przez uogólniony process Manna $gM(T, \{t_k\})$. Istnieje wtedy $x \in F(\mathcal{F})$ taki, że $x_k \to x$ ρ-p.w.*

W sposób podobny, stosując Twierdzenie 6.1 z pracy [D23] razem z Twierdzeniem 3.25, udowodniono następujący rezultat o zbieżności procesu Ishikawy.

Twierdzenie 3.28. [H5, Theorem 4.7] *Niech C będzie niepustym, ciągowo zwartym względem zbieżności ρ-p.w., silnie ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym podzbiorem wypukłym przestrzeni L_ρ, gdzie $\rho \in \Re$ jest jednostajnie ciągły i ma własności $(UUC1)$, Δ_2 oraz silną własność Opiala. Niech $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ będzie ciągłą nierozszerzającą półgrupą na C. Niech $\{x_k\}$ będzie ciągiem generowanym przez uogólniony process Manna $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\})$. Istnieje wtedy $x \in F(\mathcal{F})$ taki, że $x_k \to x$ ρ-p.w.*

W teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych zbieżność ρ-p.w. odgrywa rolę podobną do tej, jaką w przestrzeniach Banacha spełnia słaba zbieżność. Podobnie, ażeby otrzymać zbieżność silniejszego typu do wspólnego punktu stałego trzeba zastąpić zwartość względem zbieżności ρ-p.w. przez silniejszą formę zwartości. Najpierw przypomnijmy twierdzenie o silnej zbieżności dla odwzorowań ρ-nierozszerzających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych, które udowodniono w mojej wspólnej pracy z Dehaish.

Twierdzenie 3.29. [D23] *Niech $\rho \in \Re$ spełnia warunki $(UUC1)$ oraz Δ_2. Niech $C \subset L_\rho$ będzie zbiorem ρ-zwartym, ρ-ograniczonym i wypukłym. Istnieje wtedy $x \in F(T)$ taki, że ciąg $\{x_k\}$ generowany przez $gM(T, \{t_k\})$ (odp. $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\})$) ρ-zmierza do x, to znaczy*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k - x) = 0. \tag{3.35}$$

Połączenie Twierdzeń 3.25 i 3.29 daje następujący rezultat.

Twierdzenie 3.30. [H5, Theorem 4.10] *Niech $\rho \in \Re$ spełnia warunki $(UUC1)$ oraz Δ_2. Niech $C \subset L_\rho$ będzie zbiorem ρ-zwartym, ρ-ograniczonym i wypukłym. Niech $\mathcal{F} = \{T_t : t \geqslant 0\}$ będzie ciągłą ρ-nierozszerzającą półgrupą na C. Istnieje wtedy wspólny punkt stały $x \in F(\mathcal{F})$ taki, że ciąg $\{x_k\}$ generowany przez $gM(T, \{t_k\})$ (odp. $gI(T, \{t_k\}, \{s_k\})$) ρ-zmierza do x, to znaczy*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k - x) = 0. \tag{3.36}$$

Zauważmy, że założenie Δ_2 powoduje, iż ρ-zwartość zbioru C założona w Twierdzeniu 3.29 jest równoważna zwartości w sensie normy Luxemburga wyznaczonej przez modular ρ. Podobnie, ρ-zbieżność w (3.36) jest równoważna zbieżności wedle tej normy.

3.2.5. **Zastosowanie do równań różniczkowych.**

W pacy [H7] rozważano rozwiązanie problemu Cauchy'ego zadanego przez równanie różniczkowe $u'(t) + (I - T)u(t) = 0$, gdzie szukana funkcja u bierze swoje wartości w przestrzeni modularnej funkcyjnej, a T jest nieliniowym odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym. W pracy tej pokazano, że zbiór rozwiązań dla tego problemu tworzy ciągłą ρ-nierozszerzającą półgrupę odwzorowań. Rezultat ten użyto do udowodnienia istnienia wspólnych punktów stałych tej półgrupy, a także do zdefiniowania pewnych algorytmów do konstrukcji takich punktów. Rezultaty te były następnie użyte do konstrukcji punktów stacjonarnych procesu wyznaczonego przez zadany problem Cauchy'ego. Powyższe wyniki zostały zilustrowane przykładem procesu Urysohna, który jest szeroko używany w równaniach całkowych i zastosowaniach.

W myśl poprzednich rozważań ρ-zbieżność i $\|\cdot\|_\rho$-zbieżność generalnie są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ρ spełnia Δ_2. Jednakże można zadać sensowne pytanie na jakich podzbiorach przestrzeni L_ρ taka równowazność może zachodzić, nawet jeśli ρ nie ma Δ_2. W odpowiedzi na to pytanie praca [D25] wprowadziła koncept zbiorów z własnością Vitaliego. Odniesienie do nazwiska Giuseppe Vitaliego jest usprawiedliwione przez następującą wersję twierdzenia Vitaliego o zbieżności, które było udowodnione dla przestrzeni modularnych funkcyjncyh w [D11, Theorem 2.4.3] i jest powtórzone tutaj dla zupełności.

Twierdzenie 3.31. [D11] *Niech $\rho \in \Re$. Niech $f_n \in E_\rho$, $f \in L_\rho$ i $f_n \to f$ ρ-p.w. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in E_\rho$ i $\|f_n - f\|_\rho \to 0$.

(ii) dla wszystkich $\alpha > 0$, miary subaddytywne $\rho(\alpha f_n, \cdot)$ są porządkowo równociągłe, to znaczy, jeśli $E_k \in \Sigma$, $E_k \downarrow \emptyset$ to $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho(\alpha f_n, E_k) = 0$.

Definicja 3.23. [H7, Definition 3.1] *Mówimy, że zbiór $C \subset L_\rho$ posiada własność Vitaliego jeśli $C \subset E_\rho$ i dla dowolnych $g \in L_\rho$ i $g_n \in C$ takich, że $\rho(g_n - g) \to 0$ istnieje podciąg $\{g_{n_k}\}$ ciagu $\{g_n\}$ taki, że dla wszystkich $\alpha > 0$ miary subaddytywne $\rho(\alpha g_{n_k}, \cdot)$ są porządkowo równociągłe.*

Następny rezultat charakteryzuje zbiory z własnością Vitaliego jako takie podzbiory E_ρ na których ρ-zbieżność i $\|\cdot\|_\rho$-zbieżność są rzeczywiście równoważne.

Twierdzenie 3.32. [H7, Theorem 3.2] *Niech $\rho \in \Re$. Zbiór $C \subset L_\rho$ ma własność Vitaliego wtedy i tylko wtedy gdy dwa nastepujące warunki są spełnione:*

(i) $C \subset E_\rho$.

(ii) Jesli $g \in L_\rho$ i $g_n \in C$ sa takie, że $\rho(g_n - g) \to 0$ to $\|g_n - g\|_\rho \to 0$.

Kilka przykładów zbiorów z własnością Vitaliego:

1. Jeśli ρ ma własność Δ_2 to każdy zbiór $C \subset L_\rho$ ma własność Vitaliego.
2. Niech $C \subset E_\rho$. Jeśli istnieje $g \in E_\rho$ takie, że $|f(\omega) \leqslant |g(\omega)|$ ρ-p.w. dla każdego $f \in C$ to C ma własność Vitaliego.
3. Niech $C \subset E_\rho$ będzie zbiorem względnie zwartym w sensie $\|\cdot\|_\rho$. Wtedy C ma własność Vitaliego (por. [D11, Theorem 2.5.1]).

Przy pomocy Twierdzenia 3.32 udowodniono w [H7], że zbiór z własnością Vitaliego jest ρ-domknięty wtedy i tylko wtedy gdy jest $\|\cdot\|_\rho$-domknięty. Niech $C \subset L_\rho$ będzie zbiorem z własnością Vitaliego i niech $a,\ b \in \mathbb{R}$. Niech $u : [a,b] \to C$ będzie funkcją ρ-ciągłą, tzn. $\rho(u(t_n) - u(t)) \to 0$ gdy $t_n \to t$. Wnioskujemy wprost z Twierdzenia 3.32, że u jest $\|\cdot\|_\rho$-ciągła. Niech Z będzie ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni $(E_\rho, \|\cdot\|_\rho)$ i niech $C \subset Z$ ma własność Vitaliego. Załóżmy, że funkcja $u : [a,b] \to C$ jest ρ-ciągła. Wtedy u jest funkcją całkowalną w sensie Bochnera względem miary Lebesgue'a na $[a,b]$, tj. $u \in L^1([a,b], Z, m)$.

W tym kontekście przedyskutujmy zagadnienie ośrodkowości przestrzeni $(E_\rho, \|\cdot\|_\rho)$. Zacznijmy od następującej definicji.

Definicja 3.24. [H7, Definition 3.2] *Modular funkcyjny $\rho \in \Re$ nazywa się ośrodkowy jeśli $\|f\,1_{(\cdot)}\|_\rho)$ jest ośrodkową funkcją zbioru dla wszystkich $f \in \mathcal{E}$, co oznacza, że istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ taka, że do każdego $A \in \mathcal{P}$ istnieje ciąg $\{A_k\}$ elementów rodziny $\mathcal{A}$ spełniający*

$$\rho(\alpha f, A \Delta A_k) \to 0 \tag{3.37}$$

dla każdego $\alpha > 0$, gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną.

Charakteryzację ośrodkowości przestrzeni $(E_\rho, \|\cdot\|_\rho)$ podano w [D11, Theorem 2.5.4].

Twierdzenie 3.33. [D11] *Niech $\rho \in \Re$. Przestrzeń $(E_\rho, \|\cdot\|_\rho)$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy gdy ρ jest ośrodkowa.*

Kombinacja powyższego rezultatu z poprzednimi uwagami daje nam następujace bardzo ważne stwierdzenie.

Propozycja 3.2. [H7, Proposition 3.2] *Niech $\rho \in \Re$ będzie ośrodkowym modularem funkcyjnym. Jeśli $u : [a,b] \to C$ jest funkcją ρ-ciągła, gdzie $C \subset E_\rho$ ma własność Vitaliego, to $u \in L^1([a,b], C, m)$.*

W pracy [H7] rozważano następujący problem początkowy przy szukanej funkcji $u : [0, A] \to C$ i ustalonym zbiorze $C \subset E_\rho$:

$$\begin{cases} u(0) = f \\ u'(t) + (I - T)u(t) = 0, \end{cases} \tag{3.38}$$

gdzie $f \in C$ and $A > 0$ są ustalone a $T : C \to C$ jest ρ-nierozszerzające.

W tej samej pracy omawiano przykłady odwzorowań T, które są ρ-nierozszerzające, ale nie są nierozszerzające w sensie normy Luxemburga. Oznacza to ni mniej ni więcej tylko to, że w przypadku takich T klasyczne metody rownań różniczkowych o wartościach w przestrzeni Banacha nie będą skuteczne. Warto także zaznaczyć, że z powodu definicji normy Luxeburga danej niewprost, często jest znacznie wygodniej obliczać formuły wyrażone wyłącznie poprzez modular, który zwykle jest dany w sposób umożliwiający bezpośrednie numeryczne obliczenia.

Następujące twierdzenie bazuje na rezultatach pracy [D25]; opisuje ono konstruktywną metodę rozwiązania problemu początkowego (3.38). W sformułowaniu tego twierdzenia będziemy używać następujących oznaczeń. Dla dowolnego $t > 0$ oznaczmy

$$K(t) = 1 - e^{-t} = \int_0^t e^{s-t} ds. \tag{3.39}$$

Zdefiniujmy ρ-średnicę zbioru $C \subset L_\rho$ jako

$$\delta_\rho(C) = \sup_{f,g \in C} \rho(f - g). \tag{3.40}$$

Zauważmy, że $\delta_\rho(C) < \infty$ gdy zbiór C jest ρ-ograniczony.

Twierdzenie 3.34. [H7, Theorem 4.1] *Niech $\rho \in \Re$ będzie ośrodkowy. Niech $C \subset E_\rho$ będzie niepustym, wypukłym, ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym zbiorem posiadającym własność Vitaliego. Niech $T : C \to C$ będzie odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym. Ustalmy $f \in C$ i $A > 0$. Zdefiniujmy ciąg funkcji $u_n : [0, A] \to C$ poprzez następującą formułę indukcyjną:*

$$\begin{cases} u_0(t) = f \\ u_{n+1}(t) = e^{-t} f + \int_0^t e^{s-t} T(u_n(s)) ds. \end{cases} \tag{3.41}$$

Wtedy dla każdego $t \in [0, A]$ istnieje $u(t) \in C$ takie, że

$$\rho(u_n(t) - u(t)) \to 0. \tag{3.42}$$

Funkcja $u : [0, A] \to C$ określona przez (3.42) *jest rozwiązaniem problemu początkowego* (3.38)*. Ponadto rozwiązanie to można rozszerzyć na cały przedział $[0, +\infty)$. Zachodzi także oszacowanie*

$$\rho(f - u_n(t)) \leqslant K^{n+1}(A)\delta_\rho(C). \tag{3.43}$$

W kontekście Twierdzenia 3.34, wprowadźmy następujące oznaczenie: niech $f \in C$, przez u_f oznaczmy rozwiązanie problemu początkowego (3.38) uzyskanego przez ρ-granicę (3.42). Dla dowolnego $t \geqslant 0$ zdefiniujmy odwzorowanie $S_t : C \to C$ wzorem

$$S_t(g) = u_g(t). \tag{3.44}$$

Oznaczmy $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \geqslant 0}$ oraz $F(\mathcal{S}) = \{f \in C : S_t(f) = f, \ for \ all \ t \geqslant 0\}$. Moim celem w pracy [H7] było udowodnienie, że $\mathcal{S}$ jest ciągłą ρ-nierozszerzającą półgrupą odwzorowań nieliniowych. Wynik ten będzie następnie użyty do dowodu istnienia i konstrukcji punktu stacjonarnego procesu określonego przez system (3.38).

Wprowadźmy najpierw następującą dogodną notację:

$$U : C \times [0, +\infty) \ni (g, t) \mapsto U(g, t) = u_g(t) = S_t(g) \in C. \tag{3.45}$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $U_n : C \times [0, +\infty) \to C$ przy użyciu formuły

$$\begin{cases} U_0(g, t) = g \\ U_{n+1}(g, t) = e^{-t}g + \int_0^t e^{s-t}T(U_n(g, s))ds. \end{cases} \tag{3.46}$$

Następny, bardzo ważny techniczny rezultat został uzyskany w [H7].

Lemat 3.6. [H7, Lemma 5.1] *Niech $\rho \in \Re$ będzie ośrodkowy. Niech $C \subset E_\rho$ będzie niepustym, wypukłym, ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym zbiorem posiadającym własność Vitaliego. Niech Let $T : C \to C$ będzie odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym. Wtedy dla każdego $g \in C$, $t \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$*

$$\rho\Big(U_n(U(g, \mu), t) - U_{n+m}(g, t + \mu)\Big) \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m+1} K^i(\mu)\delta_\rho(C) + K^{n+1}(t)\delta_\rho(C). \tag{3.47}$$

Lemat ten został zastosowany w dowodzie następującego kluczowego rezultatu.

Twierdzenie 3.35. [H7, Theorem 5.1] *Niech $\rho \in \Re$ będzie ośrodkowy. Niech $C \subset E_\rho$ będzie niepustym, wypukłym, ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym zbiorem* *posiadającym własność Vitaliego. Załóżmy, że $T : C \to C$ jest odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym. Oznaczmy $S_t(f) = u_f(t)$, gdzie $t \geqslant 0$, $f \in C$ i $u_f(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego* (3.41). *Wtedy $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ jest ciągłą ρ-nierozszerzającą półgrupą odwzorowań nieliniowych na C.*

Widzimy natychmiast, że jeśli $f \in C$ jest wspólnym punktem stałym półgrupy $\mathcal{S}$ to $S_t(f) = f$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, co oznacza, że $u_f(t) = f$ dla każdego takiego t. Zatem proces wyznaczony przez równanie (3.41) ma f jako punkt stacjonarny. Podajmy w tym kontekście interpretację naszych poprzednich rezultatów. Kombinacja Twierdzeń 3.24, 3.34 i 3.35 daje nam następujący rezultat.

Twierdzenie 3.36. [H7, Theorem 6.1] *Niech $\rho \in \Re$ będzie ośrodkowy i $(UUC1)$, $C \subset E_\rho$ niech będzie niepustym, wypukłym, ρ-ograniczonym, ρ-domkniętym zbiorem posiadającym własność Vitaliego. Załóżmy, że $T : C \to C$ jest odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym. Oznaczmy $S_t(f) = u_f(t)$, gdzie $t \geqslant 0$, $f \in C$ i $u_f(t)$ jest rozwiązaniem problemu poczatkowego* (3.41). *Wtedy $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t\geqslant 0}$ tworzy ciągłą ρ-nierozszerzającą półgrupę odwzorowań nieliniowych na C. Ponadto zbiór punktów stacjonarnych procesu wyznaczonego przez równanie różniczkowe* (3.41) *z funkcją ewolucji $(t, x) \to S_t(x)$, jest identyczny ze zbiorem $F(\mathcal{S})$ wspólnych punktów stałych półgrupy $\mathcal{S}$, który jest niepusty, ρ-domknięty i wypukły.*

Umiejętność skonstruowania algorytmicznie takiego punktu stacjonarnego to zupełnie inne zagadnienie. Na szczęście, co pokazaliśmy uprzednio, w pewnych przypadkach to niebanalne zadanie może być zastąpione przez prostsze zadanie skonstruowania punktu stałego jednego tylko odwzorowania ρ-nierozszerzającego. W takiej sytuacji możemy zastosować uogólniony proces Manna lub Ishikawy, których zbieżność była pokazana w Twierdzeniach 3.27 i 3.28.

Zakończmy tę sekcję przykładem jak rezulaty poprzednie mogą zostać wykorzystane do konstrukcji punktu stacjonarnego dla procesu zdefiniowanego przez operator Urysohna:

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(x, y, |f(y)|)dy + f_0(x).$$

Jak pokazano w [H7, Examples 4.2, 4.3] przy odpowiednich założeniach T staje się odwzorowaniem ρ-nierozszerzającym; wypukły modular funkcyjny ρ zadany jest przez

$$\rho(f) = \int_0^1 \Big\{ \int_0^1 k(x, y, |f(y)|)dy \Big\} dx. \tag{3.48}$$

Ustalmy $r > 0$ oraz zbiór $C = \{f \in E_\rho : \rho(f - f_0) \leqslant r\}$; zauważmy, że C ma własność Vitaliego. Nietrudno zaobserwować, że $T : C \to C$. Jeśli założymy dodatkowo, że istnieje stała $M > 0$ oraz całkowalna w sensie Bochnera funkcja $h : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, \infty)$ taka, że dla każdego $u \geqslant 0$ i $x, y \in [0, 1]$

$$k(x, y, 2u) \leqslant Mk(x, y, u) + h(x, y), \tag{3.49}$$

to modular ρ ma własność Δ_2 w sensie Definicji 3.12. Stosując Twierdzenie 3.34 widzimy, że przy zadanej $f \in C$ problem początkowy

$$\begin{cases} u(0) = f \\ u'(t) + (I - T)u(t) = 0, \end{cases} \tag{3.50}$$

ma rozwiązanie $u_f : [0, +\infty] \to C$. Jak pokazano w Twierdzeniu 3.35 wzór

$$S_t(f) = u_f(t)$$

definiuje półgrupę odwzorowań ρ-nierozszerzających. Zwróćmy uwage na fakt, że w tym przykładzie ρ jest ortogonalnie addytywne, a więc posiada silną własność Opiala. Dlategoteż, założywszy że ρ jest $(UUC1)$ oraz jednostajnie ciągłe, możemy użyć algorytmicznych metod uogólnionego procesu Manna lub Ishikawy w celu skonstruowania wspólnego punktu stałego półgrupy $\{S_t\}$, który będzie punktem stacjonarnym procesu Urysohna zdefiniowanego przez funkcję ewolucji $(t, f) \to u_f(t) \in C$.

4. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

4.1. Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego.

[D1] Kozlowski, W.M.: *Nonlinear operators in Banach function spaces,* Comment. Math., 22 (1980), 85–103.

[D2] Kozlowski, W.M., and Dzwonko, Z.: *Analiza głównych współrzędnych i jej zastosowanie w synekologii,* Wiad. Ekol., 26.3 (1980), 265–277.

[D3] Kozlowski, W.M.: *A note on the continuity of nonlinear operators,* Coll. Math. Soc. Jan. Bolyai, 35 (1980), 745–750.

[D4] Kozlowski, W.M., and Szczypinski, T.: *Some remarks on on the nonlinear operator measures and integration,* Coll. Math. Soc. Jan. Bolyai, 35 (1980), 751–756.

[D5] Kozlowski, W.M., and Szczypinski, T.: *A note on the Hammerstein operator in Kothe spaces,* Prac. Mat., 22 (1981), 147–150.

[D6] Kozlowski, W.M.: *Boundedness of G-dominated oeprators,* Approximation and Function Spaces, Ed. Z. Ciesielski, Proc. Int. Conf. Gdansk 1979, North Holland 1981, 377–382

[D7] Kozlowski, W.M., and Szczypinski, T.: *Convergences theorems for integrals with respect to nonlinear operator measures,* Constructive Function Theory 1981, Sofia 1983, 389–392.

[D8] Kozlowski, W.M., and Lewicki, G.: *On polynomial approximation in modular function spaces,* In: "Function Spaces", Musielak, J. (Ed.), Teubner-Texte zur Mathematik, Band 103 (1986), 63–68.

[D9] Kozlowski, W.M.: *Notes on modular function spaces I,* Comment. Math., 28 (1988), 91–104.

[D10] Kozlowski, W.M.: *Notes on modular function spaces II,* Comment. Math., 28 (1988), 105–120.

[D11] Kozlowski, W.M.: *Modular Function Spaces*, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol.122, Dekker, New York/Basel, 1988.

[D12] Kozlowski, W.M.: *On domains of some nonlinear operators* J. Math. Anal. Appl., 139.1 (1989), 243–267.

[D13] Kozlowski, W.M., and Lewicki, G.: *Analyticity and polynomial approximation in modular function spaces,* J. Approx Theory, 58.1 (1989), 243–267.

[D14] Khamsi, M.A., Kozlowski, W.M., and Reich, S.: *Fixed point theory in modular function spaces,* Nonlinear Analysis, 14 (1990), 935–953.

[D15] Kilmer, S.J., Kozlowski, W.M., Lewicki, G.: *Best approximants in modular function spaces,* J. Approx. Theory, 63 (1990), 338–367.

[D16] Kilmer, S.J., Kozlowski, W.M., and Lewicki, G.: *Sigma order continuity and best approximants in L_ρ spaces,* Comment. Math. Univ. Carolin., 32.2 (1991), 241–250.

[D17] Khamsi, M.A., Kozlowski, W.M., and Chen, S.: *Some geometrical properties and fixed point theorems in Orlicz spaces,* J. Math. Anal. Appl., 155.2 (1991), 393–412.

[D18] Kilmer, S.J., and Kozlowski, W.M.: *On some properties of sets of best approximants in Musielak-Orlicz spaces,* Comment. Math. , 31 (1991), 59–71 .

[D19] Khamsi, M.A., and Kozlowski, W.M.: *On asymptotic pointwise contractions in modular function spaces,* Nonlinear Analysis, 73 (2010), 2957–2967.

[D20] Khamsi, M.A., and Kozlowski, W.M.: *On asymptotic pointwise nonexpansive mappings in modular function spaces,* J. Math. Anal. Appl., 380.2 (2011), 697–708.

[D21] Kozlowski, W.M.: *On the construction of common fixed points for semigroups of nonlinear mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces,* Comment. Math. 52.2 (2012), 113–136.

[D22] Kozlowski, W.M.: Advancements in fixed point theory in modular function spaces, Arab J. Math., doi:10.1007/s40065-012-0051-0, (2012).

[D23] Bin Dehaish, B.A., and Kozlowski, W.M.: *Fixed point iterations processes for asymptotic pointwise nonexpansive mappings in modular function spaces,* Fixed Point Theory and Applications 2012:118 (2012).

[D24] Kozlowski, W.M.: *Pointwise Lipschitzian mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces,* Nonlinear Anal. 84 (2013), 50–60.

[D25] Kozlowski, W.M.: *On Nonlinear Differential Equations in Generalized Musielak-Orlicz Spaces,* Comment. Math., 53.2 (2013), 113–133.

[D26] Kozlowski, W.M.: *An Introduction to Fixed Point Theory in Modular Function Spaces,* In "Topics in Fixed Point Theory", Ed: S. Almezel, Q.H. Ansari, M.A. Khamsi, Springer Verlag, New York Heidelberg Dordrecht London, 2014.

[D27] Alsulami, M., and Kozlowski, W.M.: *On the set of common fixed points of semigroups of nonlinear mappings in modular function spaces,* Fixed Point Theory and Applications, 2013:214 (2013).

[D28] Bin Dehaish, B.A. , Khamsi, M.A., and Kozlowski, W.M.: *Common fixed points for asymptotic pointwise Lipschitzian semigroups in modular function spaces,* Fixed Point Theory and Applications, 2013:214 (2013).

[D29] Bin Dehaish, B.A. , Khamsi, M.A., and Kozlowski, W.M.: *On the convergence of iteration processes for semigroups of nonlinear mappings in modular function spaces,* Fixed Point Theory and Applications, 2015:3 (2015).

[D30] Khamsi, M.A., and Kozlowski, W.M.: *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*, Birkhauser Mathematics, Springer International Publishing, Basel, 2015.

4.2. **Krótkie omówienie wyników publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego.**

Publikacja [D5], inspirowana przez moją pracę magisterską "Operator Hammersteina w przestrzeniach Orlicza" napisana była wspólnie z T. Szczypińskim. W pracy tej znaleziono warunki na operator Hammersteina działający w unormowanej przestrzeni Köthego wystarczające na to, by ten operator spełniał warunek Lipschitza. Używając nierówności Höldera obliczono wartość stałej Lipschitza wyrażoną poprzez stowarzyszoną normę funkcyjną. Operator Hammersteina, tak ważny w zastosowaniach m.in. w teorii sprężystości, i jego uogólnienie - operator Urysohna, stanowił motywację i ilustrację wielu moich późniejszych badań, patrz np. [D25, H7, D30]

Prace [D1, D3, D6] zawierają wyniki związane z tematem mojej pracy doktorskiej "Operatory nieliniowe w przestrzeniach funkcji mierzalnych o wartościach wektorowych", w której badałem warunki na ograniczoność i ciągłość szerokiej klasy abstrakcyjnie określonych operatorów nieliniowych działających w liniowo-topologicznych przestrzeniach funkcji mierzalnych. W pracy [D1] udowodniono szereg rezultatów o ograniczoności i ciągłości operatorów nieliniowych działających w przestrzeniach funkcyjnych Banacha [12], używając m.in. różnych wariantów prawidłowości funkcyjnych przestrzeni Banacha. Te abstrakcyjne rezultaty były następnie zastosowane do badania operatorów Hammersteina i Nemytskiego. Podobnie, w pracy [D3] omówiono zagadnienie ciągłości ortogonalnie addytywnych funkcji zbiorów o wartościach w przestrzeniach liniowo-topologicznych, a także wskazano na zastosowania tych wyników w teorii operatorów nieliniowych. Koncepcje te kontynuowano w pracy [D6], gdzie wprowadzono pojęcie operatorów G-zdominowanych dla operatorów nieliniowych działających pomiędzy dwoma prawidłowymi przestrzeniami funkcji mierzalnych. W pracy tej badano związek pomiędzy G-dominacją [13] i ograniczonością takich operatorów.

Opisana powyżej tematyka wiąże się także z zagadnieniem rozszerzenia operatora ortogonalnie addytywnego określonego na zbiorze wszystkich mierzalnych

[12]Teoria przestrzeni funkcyjnych Banacha została zapoczątkowana przez W.A.J. Luxemburga w [34] i rozwinięta w serii wspólnych publikacji Luxemburga i Zaanena [35].

[13]Klasa operatorów G-zdominowanych zawiera operatory ortogonalnie addytywne.

funkcji prostych $\mathcal{E}$ do możliwie największej F-przestrzeni funkcji mierzalnych z własnością Lebesgue'a [14] zachowując równocześnie ciągłość operatora. Problem ten został rozwiązany w pracy [D12], gdzie udowodniono, że ta największa przestrzeń jest równa najmniejszej przestrzeni liniowej zawierającej zbiór wszystkich funkcji f takich, że $\rho(f, D_k) \to 0$ gdy $D_k \downarrow \emptyset$, gdzie $\rho(f, A) = \sup\{\|T(g)\|_H : g \in \mathcal{E},\ |g(x)| \leqslant 1_A(x)|f(x)|\}$. Wynik ten zastosowano do znalezienia maksymalnej dziedziny pewnych operatorów nieliniowych m.in operatora Nemytskiego, nieliniowego operatora Fouriera [15] oraz operatora Hammersteina. Ponieważ, jak wykazano w tej pracy, powyżej zdefiniowane ρ jest semimodularem funkcyjnym, rezultaty te dały silną motywację do kontynuacji szczegółowych badań nad teorią przestrzeni modularnych funkcyjnych, którą rownocześnie rozwijano w pracach [D9, D10, D11] [16].

Innym kierunkiem badań była praca (wspólnie z T. Szczypińskim) nad rozwinięciem konceptu nieliniowych miar operatorowych i ich zastosowaniem do zagadnienia reprezentacji takich operatorów. Liniowe miary operatorowe były badane przez Dobrakova w serii publikacji zapoczątkowanych pracami [14] and [15]. Całkowanie funkcji ograniczonych względem nieliniowych miar operatorowych rozważane było przez Batta [2] a także przez Friedmana i Tonga [16] w związku z problemem reprezentacji operatorów ortogonalnie addytywnych. Całka taka została w pracy [D4] rozszerzona na szerszą klasę $\mathcal{M}(\mu)$. W pracy [D7] rozwinięto podstawy tej teorii i udowodniono szereg twierdzeń o zbieżności całki względem nieliniowych miar operatorowych. Wyniki te były później rozszerzone w [57]. Jak później wykazano, przestrzeń funkcji całkowalnych względem takich miar operatorowych jest w rzeczywistości przestrzenią modularną funkcyjną zadaną przez odpowiednio określony modular funkcyjny, co wskazało na naturalny związek między obydwoma teoriami, por. [D11, D30].

[14]Mówimy, że funkcja mierzalna f ma wlasność Lebesgue'a jeśli $\|f1_{D_k}\| \to 0$ dla $D_k \downarrow \emptyset$, gdzie symbol 1_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru mierzalnego A.

[15]Do rozwiązanie problemu rozszerzenia dziedziny nieliniowego operatora Fouriera wykorzystano także wcześniejsze wyniki Labudy i Szeptyckiego [31].

[16]Problem rozszerzenia dziedziny został dokładnie przebadany w [D11] przy użyciu w pełni już wówczas rozwiniętej teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych.

Jak wzmiankowano uprzednio, podstawy teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych zostały przedstawione w [D9, D10]. Teoria ta i jej zastosowania zarysowane w tych pracach (wraz z innymi publikacjami uprzednio omawianymi) wzbudziły znaczne zainteresowanie w środowisku matematycznym, co spowodowało, że przyznano mi stypendium Fulbrighta w ramach którego zostałem zaproszony przez W.A.L. Luxemburga do kontynuacji moich badań w California Institute of Technology w Pasadenie (USA). Rezultatem tych, sponsorowanych przez Fundację Fulbrighta, badań była książka 'Modular Function Spaces" ([D11]) wydana w 1988 roku przez wydawnictwo Marcel Dekker. Książka ta stworzyła na wiele lat solidną i spójną podstawę do studiów nad przestrzeniami modularnymi funkcyjnymi, włącznie z wynikami osiągnięcia naukowego opisanego poprzednio. Ponadto książka ta zawiera wyczerpującą listę przykładów, a także omawia zastosowania tej teorii do m.in aproksymacji, równań calkowych, teorii punktu stałego i teorii operatorów nieliniowych.

Okres mojej działalności naukowej w ramach stypendium Fulbrighta zaowocował także zawiązaniem się kilku przypadków współpracy badawczej. Współpraca z G. Lewickim i S.J. Kilmerem w dziedzinie aproksymacji w przestrzeniach modularnych funkcyjnych dała w wyniku serię publikacji [D8, 32, D13, D15, D18]. W pracach [D8, D13] rozważano zagadnienie analitycznego rozszerzenia funkcji mierzalnych. Pomysł wyrażenia własności rozszerzenia poprzez aproksymację wielomianową ma swe początki w klasycznym wyniku analizy zespolonej pochodzącym od S.N. Bernsteina: jeśli funkcja ciągła $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ daje się rozszerzyć do funkcji holomorficznej $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ gdzie U jest otwartym otoczeniem (w $\mathbb{C}$) przedziału $[0,1]$ a $\widetilde{f} = f$ on $[0,1]$, to wtedy $\limsup_{k\to\infty}[dist_{\|\cdot\|}(f,P_k)]^{\frac{1}{k}} < 1$. Symbol $dist_{\|\cdot\|}(f,P_k)$ oznacza tu odległość w sensie normy supremalnej pomiędzy funkcją f i klasą wielomianów stopnia niewiększego niż k. Pomysł ten został rozwinięty i uogólniony przez J. Siciaka w [54, 55]. Pierwsze próby osiągnięcia podobnych rezultatów dla funkcji mierzalnych i odległości różnej od normy supremum były podjęte w [46, 47] przez W. Pleśniaka, który znalazł odpowiednie warunki na przestrzeń Orlicza L^φ, gdzie φ jest funkcją Orlicza z własnością Δ_2. Nasze wspólne prace badawcze z Lewickim, ogłoszone w [D8] i rozwinięte w większym stopniu w [D13], dały w wyniku warunki wystarczające i konieczne na tego typu rozszerzalność. Używając aparatu badawczego przestrzeni modularnych funkcyjnych mogliśmy nie tylko rozszerzyć poprzednie wyniki na szersze klasy funkcji, ale także usunąć restrykcje warunku Δ_2 oraz osłabić warunki na wypukłość modularu ρ.

Artykuł [D15] opublikowany wspólnie z Kilmerem i Lewickim zapoczatkował prace nad zagadnieniem znalezienia najlepszych przybliżeń w sensie modularu funkcyjnego. Jeden z głównych rezultatów tej pracy wykazał dla danej $\mathcal{B}$, σ-podalgebry σ-algebry Σ, istnienie najlepszego ρ-przybliżenia dowolnej funkcji ograniczonej $f \in L_\rho(\Sigma)$ względem modularnej podprzestrzeni funkcyjnej $L_\rho(\mathcal{B})$, tj. istnienie takiego $g \in L_\rho(\mathcal{B})$ że $\rho(f-g) = \inf\{\rho(f-h) : h \in L_\rho(\mathcal{B}\}$. Problem rozwiązany przez ten wynik można przełożyć na terminologię probabilistyczną jako następujące zagadnienie nieliniowego przewidywania: mając daną $\mathcal{B} \subset \Sigma$, σ-algebrę generowaną przez ciąg Σ-mierzalnych zbiorów $\{B_k\}$ oraz zmienną losową $f \in L_\rho(\Sigma)$, znaleźć funkcję g, stałą na każdym B_k, taką że $\rho(f-g)$ jest najmniejsze. W wielu przypadkach $\rho(f-g)$ przedstawia utratę informacji czyli uśredniony błąd popełniony gdy zastąpimy f przez g. Najlepsze ρ-przybliżenia znane są pod różnymi nazwami w różnych sytuacjach. W przestrzeniach L^p znane są dla $p = 2$ jako oczekiwania warunkowe, jako p-predyktory przy $p > 1$, jako warunkowe mediany dla $p = 1$. W przestrzeniach Orlicza to pojęcie znane jest jako φ-przybliżenie. W niektórych przypadkach zbiór najlepszych ρ-przybliżeń może mieć bardzo dogodne własności. Na przykład, jak pokazano w [D18], dla przestrzeni Musielaka-Orlicza ten zbiór okazuje się być domkniętym przedziałem porządkowym, czyli posiada on element największy i element najmniejszy (w sensie naturalnego porządku) oraz każda funkcja w jest najlepszym ρ-przybliżeniem o ile $u \leqslant w \leqslant v$ dla pewnych najlepszych ρ-przybliżeń u, v. W pracy [D16] pokazano interesujący fakt, że w przestrzeniach Musielaka-Orlicza istnienie najlepszych $\|\cdot\|_\rho$-przybliżeń funkcji $f \in E_\rho$ względem jakiejkolwiek normowo domkniętej podkraty przestrzeni L_ρ jest równoważne warunkowi Δ_2.

W tym miejscu trzeba wspomnieć o innym kierunku moich działań badawczych i publikacyjnych, mianowicie działań związanych z szeroko rozumianymi zstosowaniami matematyki i informatyki połączonej z telekomunikacją. Po ukończeniu studiów matematycznych na sekcji teoretycznej i podjęciu pracy w Zakładzie Zastosowań Matematyki UJ zainicjowałem współpracę naukową z Instytutem Botaniki UJ. Rezultatem tej współpracy była wspólna praca z Z. Dzwonko

[D2]. Praca ta rozważa matematyczne podstawy metody zwanej analizą głównych współrzędnych, która jest rozszerzeniem znanej w statystyce metody głównych składowych, oraz jej zastosowanie w ekologii dla klasyfikacji fitosocjologicznych danych opisujących zmienność pewnych środowisk leśnych w polskiej części Karpat Wschodnich. Podczas gdy metoda głównych składowych może być używana wyłącznie dla metryki euklidesowej, stosując metodę głównych współrzędnych mogliśmy rozszerzyć analize na inne metryki i funkcje podobieństwa, które - jak pokazaliśmy - lepiej ilustrują rzeczywiste relacje ekologiczne. Metody i algorytmy opracowane w tej publikacji zostały poźniej zastosowane przy tworzeniu Atlasu Roślin Polski Południowej, projektu sponsorowanego przez Polską Akademię Nauk. Warto tu także nadmienić istnienie szeregu technicznych raportów i analiz rynku telekomunikacyjnego opublikowanych w ramach mojej konsultacyjnej działalności informatyczno/telekomunikacyjnej.

Możliwość zastosowania wyników i metod teorii przestrzeni modularnych funkcyjnych do rozwiązywania zagadnień punktu stałego była jednym z oryginalnych czynników motywujących rozwój tej teorii. Opierało sie to na przesłance, że przestrzenie modularne funkcyjne zapewniaja bogate środowisko poznawcze, w którym własności punktu stałego mogą być badane przy użyciu modularów funkcyjnych i odpowiadających im norm Luxemburga (lub innych równoważnych norm), a także umożliwiając stosowanie zarówno metod geometrii przestrzeni Banacha, ogólnej teorii przestrzeni modularnych, jak i pewnych konceptów teorii funkcji mierzalnych (jak np. zbieżności prawie wszędzie). Równocześnie elastyczność tej teorii pozwala na tworzenie przestrzeni, w których dany operator nieliniowy, jak np. operator Urysohna, ma żądane własności jak ciągłość lub nierozszerzalność. Rzeczywiście już w 1990 roku wspólna praca z M.A. Khamsim i S. Reichem [D14] zbudowała podwaliny pod teorię punktów stałych w przestrzeniach modularnych funkcyjnych, która to teoria stała sie szybko przedmiotem intensywnych badań naukowych. W pracy tej pokazano, że pewne normowe i modularne koncepty jak np. nierozszerzalność są istotnie różne (Example 2.15), co pozwala na stosowanie modularnej teorii punktów stałych w sytuacjach gdy twierdzenia typu normowego zawodzą. Ten fakt pozwolił nam też na proste wytłumaczenie słynnego kontrprzykładu Alspacha [1] używając wyłącznie podstawowych modularnych własności przestrzeni L^1. Poza udowodnieniem twierdzeń o istnieniu punktów stałych dla odwzorowań ρ-zwężających i ρ-nierozszerzających w pracy tej podjęto pierwsze próby wprowadzenia elementarnych pojęć geometrii modularnej jak np. odpowiedniej modularnej wersji jednostajnej wypukłości lub struktury normalnej. Pojęcia te zostały zastosowane w kontekście przestrzeni Orlicza we wspólnej pracy z S. Chen i M.A. Khamsi [D17], gdzie rozważano pewne geometryczne własciwości modularu Orlicza w przypadku skończonej miary bezatomowej. Własności te zostały użyte do dowodu pewnych twierdzeń o punktach stałych dla odwzorowań nierozszerzających względem modularów Orlicza. Rezultaty te pozwoliły na uzyskanie twierdzeń o punktach stałych w przypadku gdy modular Orlicza nie spełnia warunku Δ_2. Jak wiadomo w takim przypadku typowe normowe twierdzenia o punktach stałych zwykle nie mogą być stosowane; na przykład takie przestrzenie nie są refleksywne w sensie normy chociaż mogą mieć własność (R) w sensie modularowym (tzn. przecięcie nierosnącego ciągu zbiorów niepustych wypukłych i ρ-domkniętych jest zbiorem niepustym) o ile odpowiadająca funkcja Orlicza jest bardzo wypukła (zob. [D17, Theorem 2.12]). Dzieki temu mogliśmy wykazać, że jeśli funkcja Orlicza jest bardzo wypukła to każde ρ-nierozszerzające odwzorowanie zbioru niepustego, wypukłego, ρ-domkniętego i ρ-ograniczonego w siebie posiada punkt stały ([D17, Theorem 3.12].

Niełatwy temat istnienia punktów stałych dla szerszej klasy odwzorowań działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych został zaatakowany ponownie w pracach [D19, D20], gdzie takie twierdzenia zostały udowodnione dla odpowiednio asymptotycznie punktowo zwężających i asymptotycznie punktowo nierozszerzających odwzorowań. Ta druga praca skodyfikowała także podstawy podejścia geometrycznego do teorii punktów stałych dla odwzorowań ρ - nierozszerzających działających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych. Te dwie prace mogą być rozumiane jako modularne równoważniki pracy Goebla i Kirka o odwzorowaniach asymptotycznie nierozszerzających [17] i pracy Kirka i Xu o odwzorowaniach asymptotycznie punktowo nierozszerzających w przestrzeniach Banacha [30]. Asymptotycznie punktowo nierozszerzające odwzorowania moga być widziane jako przykłady półgrup odwzorowań. W tym sensie praca [H3] będąca częścią osiągnięcia naukowego a zatem omawiana we wcześniejszych sekcjach tego dokumentu, może być rozumiana jako uogólnienie [D20]. We wspólnej pracy z Dehaish i Khamsim uogólniono dalej ten rezultat dowodząc, że w przypadku jednostajnie wypukłych przestrzeni modularnych funkcyjnych zbiór wspólnych punktów stałych asymptotycznie punktowo ρ-nierozszerzającej półgrupy jest niepusty, wypukły i ρ-domknięty, [D28, Theorem 3.2].

Twierdzenia o istnieniu punktów stałych dla uogólnionych odwzorowań nierozszerzających, omawiane powyżej, naogół nie dostarczają konstruktywnych metod znajdywania takich punktów. Praca [H5] będącą częścią osiągnięcia naukowego opisuje jedną z takich metod dla przypadku półgrup ρ-nierozszerzających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych. W pracy tej zastosowano reprezentację zbioru wspólnych punktów stałych dla półgrupy odwzorowań poprzez zbiór punktów stałych dla jednego tylko, odpowiednio wybranego odwzorowania. Podobne podejście zostało użyte w [D27], gdzie udowodniono przy innych założeniach na półgrupę, [17] że zbiór wszystkich wspólnych punktów stałych tej półgrupy może być przedstawiony jako przecięcie zbiorów punktów stałych dwóch odpowiednio wybranych odwzorowań [18]. Reprezentacja ta pozwala użyć uogólnionych procesów Manna i Ishikawy do konstrukcji wspólnych punktów stałych. Analogiczne uogólnienie tych procesów zostało zastosowane w [D23], gdzie omówiono zbieżność takich procesów do punktów stałych dla odwzorowań asymptotycznie punktowo ρ-nierozszerzających w przestrzeniach modularnych funkcyjnych. We wspólnej pracy z Dehaish i Khamsim [D29] badano problem aproksymacji wspólnych punktów stałych dla asumptotycznie punktowo ρ-nierozszerzających półgrup. Wyniki tej pracy uogólniają rezultaty [D23]. W [D25], napisanej na cześć Juliana Musielak z okazji jego 85-tych urodzin, rozważałem zwykłe równania różniczkowe z funkcją niewiadomą przyjmującą wartości w zadanej przestrzeni modularnej funkcyjnej. Udowodniono, że przy pewnych naturalnych warunkach problem Cauchy'ego zadany przez takie równanie posiada rozwiązanie. Omówiono także proces konstrukcji takiego rozwiązania. Praca ta zainspirowała autora do zbadania własności półgrupowych zbioru rozwiązań (zob. praca [H7] będąca częścią osiągnięcia naukowego).

W zwiazku z teorią punktów stałych w przestrzeniach Banach i pracami [H1, H2, H4, H6, H8] wchodzącymi w skład osiągnięcia naukowego, warto wymienić

[17] Założono w tej pracy tylko ciągłość półgrupy, a nie silną ciągłość jak to było zrobione w [H5], jednakże założono równocześnie jednostajną wypukłość modularu.

[18] Podobne podejście w przestrzeniach Banacha zostało użyte przez Brucka [7].

publikacje [D21, D24]. Pierwsza z nich badała słabą zbieżność uogólnionych procesów Manna i Ishikawy do wspólnych punktów stałych dla półgrup punktowo lipschitzowskich odwzorowań określonych na ograniczonych, domkniętych, wypukłych podzbiorach jednostajnie wypukłych i jednostajnie gładkich przestrzeni Banacha, podczas gdy druga z nich zajmowała się pewnymi warunkami wystarczającymi na słabą zbieżność takich procesów do punktów stałych asymptotycznie punktowo nierozszerzających odwzorowań działających w takich przestrzeniach.

Kończąc tę sekcję podkreślmy, że teoria punktów stałych w przestrzeniach modularnych funkcyjnych jest tematem intensywnych badań od lat piętnastu. Około roku 2010 stało się oczywiste, że teoria ta wymaga jakiejś formy unifikacji, że potrzeba zebrać i podsumować różnorodne rezultaty, że różnice terminologiczne winny być rozwiązane. Artykuł przeglądowy [D22] omawiający niedawne postępy w tej dziedzinie, ustanowił pierwszy krok w tym kierunku. Następnie ukazał sie artykuł [D26] opublikowany jako jeden z rozdziałów książki 'Topics in Fixed Point Theory" wydanej przez firmę Springer. Artykuł ten przedstawił wstęp do teorii punktów stałych w przestrzeniach modularnych funkcyjnych stawiając sobie za cel wprowadzenie w ten temat czytelnika pozbawionego wcześniejszego kontaktu z tymi zagadnieniami. Pozycja wieńcząca ten przegląd to książka "Fixed Point Theory in Modular Function Spaces", [D30], napisana wspólnie z M.A. Khamsim, a opublikowana w 2015 roku przez wydawnictwo Springer/Birkhauser. Książka ta przedstawia w sposób dogłębny obecny stan teorii punktów stałych dla odwzorowań działających w przestrzeniach modularnych funkcyjncyh i w związku z tym omawia wiekszość tematów poruszonych powyżej, jak i oczywiście rezultaty osiągnięte przez wielu matematyków z różnych częsci świata, rezultaty, w których uzyskaniu nie miałem bezpośredniego udziału.

4.3. **Udział w projektach badawczych.**
Atlas Roślin Południowej Polski, 1979 - 1983 (projekt sponsorowany przez Polską Akademię Nauk):
- opracowanie metod matematycznych (opartych na analizie głównych współrzędnych) pozwalających na użycie ogólnych funkcji podobieństwa służących do

porównywania skomplikowanych danych empirycznych poprzez grupowanie podobnych obiektów (clustering) i graficzną dwywymiarowa prezentację wielowymarowego zbioru danych;
- opracowanie programów komputerowych implementujących te metody.

Koordynator Telekomunikacji (Telecommunications Industry Coordinator) w projekcie ASAPM (Adaptive Services and Project Management) sponsorowanym przez - Australian Research Council (agencja australijskiego rządu federalnego), 2005 - 2007, w ramach wspólnej inicjatywy z Unią Europejską pod nazwą ASG (Adaptive Services Grid)

4.4. **Nagrody, wyróznienia i stypendia naukowe.**
Stypendium naukowe Ministerstwa Szkolnictwa Wyższego i Nauki, Poznań 1983
Stypendium Fundacji Fulbrighta, 1986 - 1988, California Institute of Technology
Prefosor Honorowy (Honorary Professor), University of Adelaide, 1992 - 1997
The Open Group Distinguished Certified IT Architect w kategorii Chief/Lead Architect, 2009

4.5. **Aktywny udział w konferencjach naukowych.**
International Conference on Approximation and Function Spaces, Gdańsk 1979
International Conference on Functions, Series, Operators, Budapest 1980
International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1981
International Congress of Mathematicians, Warszawa 1983
International Conference on Function Spaces, Poznan 1986
AMS Annual Meeting, San Antonio, Texas, 1986
Conference on Function Spaces, Southern Illinois University at Edwardsville, 1990
International Oracle Conference, Adelaide 1993
CRM Conference, Sydney 2001
Joint Service Oriented Computing Research Initiative Swinburne (SOCRIS) and Adaptive Service Agreement and Process Management (ASAPM) Conference, Melbourne 2005
International Conference on Functional and Nonlinear Analysis, Newcastle 2010
TMF Management World, Orlando 2010

International Meeting to Celebrate the 60th Birthday of Jonathan Borwein, Newcastle 2011
TMF Management World, Dublin 2011
The International Mathematical Workshop on Fixed Point Theory and Applications, Tabuk 2012
International Conference in Differential Geometry, Functional Analysis and Applications, Jamia Millia Islamia University, New Delhi, India 2012
Seminarium na temat: Aproksymacja w przestrzeniach funkcyjnych, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2013
Seminarium na temat: Metody niejawnych iteracji w przestrzeniach Banacha, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2014

4.6. **Wykłady na specjalne zaproszenie.**
Zaproszony do wygłoszenia wykładów w nastepujących instytucjach:
Uniwersytet Adama Mickiewicza, Poznań
California Institute of Technology, Pasadena, USA
University of Iowa, Iowa City, USA
University of Missouri-Columbia, USA
University of Southern California, Los Angeles, USA
Southwestern Missouri State University, Springfield, USA
Flinders University, Adelaide, Australia
University of Adelaide, Adelaide, Australia
Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia
Monash University, Melbourne, Australia
University of Newcastle, Newcastle, Australia
The University of New South Wales, Sydney, Australia
Uniwersytet Jagielloński, Kraków
King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia
Jamia Millia Islamia University, New Delhi, India
Research Centre for Computer-Assisted Research Mathematics and its Applications (CARMA), Newcastle, Australia

4.7. **Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego.**
Według bazy *Journal Citation Reports*, Sumaryczny *Impact Factor* publikacji

naukowych: **26,916**.

Liczba cytowań publikacji według bazy *Web of Science*:
wszystkie cytowania: **140**,
cytowania bez autocytowań: **93**.

Index Hirscha opublikowanych publikacji według bazy *Web of Science*: **6**.

Użyto dostępnych w bazie *Web of Science* wartości *Impact Factor* najbliższych daty opublikowania. Warto nadmienić, że niektóre z moich starszych publikacji, włącznie z książką "Modular Function Spaces" nie wystepują we właściwej bazie *Web of Science*. Raport *Web of Science Cited Reference Search* podaje rezultat **289** cytowań.

5. Literatura

[1] Alspach, D.: *A fixed point free nonexpansive mapping,* Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981), 423–424.

[2] Batt, J.: *Nonlinear integral operators on C(S,E),* Studia Math., 48.2 (1973), 145–177.

[3] Belluce, L.P., and Kirk, W.A.: *Fixed-point theorems for families of contraction mappings*, Pacific. J. Math., 18 (1966), 213–217.

[4] Belluce, L.P., and Kirk, W.A.: *Nonexpansive mappings and fixed-points in Banach spaces*, Illinois. J. Math., 11 (1967), 474–479.

[5] Bose, S.C.: *Weak convergence to the fixed point of an asymptotically nonexpansive map,* Proc. Amer. Math. Soc., 68 (1978), 305–308.

[6] Browder, F.E.: *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 54 (1965), 1041–1044.

[7] Bruck, R.E.: *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math., 53 (1974), 59–71.

[8] Bruck, R.E.: *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel. J. Math., 32 (1979), 107–116.

[9] Bruck, R.E., Kuczumow, T., and Reich, S., *Convergence of iterates of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces with the uniform Opial property,* Coll. Math., 65.2 (1993), 169–179.

[10] Cerda, J., Hudzik, H., and Mastylo, M., *On the geometry of some Calderon-Lozanovskii interpolation spaces*, Indagationes Math., 6.1 (1995), 35–49.

[11] Cui, Y., and Hudzik, H., *On the Uniform Opial property in some modular sequence spaces*, Functiones et Approximatio, XXVI (1998), 93–102.

[12] Cui, Y., Hudzik, H., and Yu, F., *On Opial properties and Opial modulus for Orlicz sequence spaces*, Nonlinear Analysis, 55 (2003), 3335–3350.

[13] DeMarr, R.E.: *Common fixed-points for commuting contraction mappings*, Pacific. J. Math., 13 (1963), 1139–1141.

[14] Dobrakov, I.: *On integration in Banach spaces I,* Czech. Math. J., 20 (1970), 511–536.

[15] Dobrakov, I.: *On integration in Banach spaces II,* Czech. Math. J., 20 (1970), 680–695.

[16] Friedman, N., Tong, A.E.: On additive operators, Canad. J. Math. 23 (1971), 468–480.

[17] Goebel, K., and Kirk, W.A.: *A fixed points theorem for asymptotically nonexpansive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), 171 – 174.

[18] Goebel, K., and Kirk, W.A.: *Topics in Metric Fixed Point Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 244 pp.

[19] Gornicki, J.: *Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces,* Comment. Math. Univ. Carolin., 30 (1989), 249–252.

[20] Groetsch, C.W.: *A note on segmenting Mann iterates,* J. Math. Anal. Appl., 40 (1972), 369–372.

[21] Hudzik, H.: *Uniform convex Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg's norm,* Comm. Math., 23.1 (1983), 21–32.

[22] Hudzik, H.: *Convexity in Musielak-Orlicz spaces,* Hokkaido Math. J., 14.1 (1985), 85–96.

[23] Hudzik, H.: *An estimation of the modulus of convexity in a class of Orlicz spaces,* Math. Japon., 32.2 (1987), 227–237.

[24] Hussain, N., and Khamsi, M.A.: *On asymptotic pointwise contractions in metric spaces,* Nonlinear Analysis, 71.10 (2009), 4423–4429.

[25] Ishikawa, S.: *Fixed points by a new iteration method,* Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974), 147–150.

[26] Kaminska, A.: *On uniform convexity of Orlicz spaces,* Indag. Math. 44.1 (1982), 27–36.

[27] Khamsi, M.A.: *A convexity property in Modular function spaces,* Math. Japonica, 44.2 (1996), 269–279.

[28] Khamsi, M.A.: *On Asymptotically Nonexpansive Mappings in Hyperconvex Metric Spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), 365–373.

[29] Khamsi, M.A., Kirk, W.A.: *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory,* John Wiley, New York, 2001.

[30] Kirk, W.A., and Xu, H-K.: *Asymptotic pointwise contractions*, Nonlinear Anal., 69 (2008), 4706–4712.

[31] Labuda, I., and Szeptycki, P.: *Extended domains of some integral operators with rapidly oscillating kernels*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 89.1 (1986), 87–98.

[32] Lewicki, G.: *On a theorem by S.N. Bernstein and its application in modular function spaces,* In: "Function Spaces", Musielak,J. (Ed.), Teubner-Texte zur Mathematik, Band 103 (1986), 69–74.

[33] Lim, T.C.: *A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math., 53 (1974), 487–493.

[34] Luxemburg, W.A.J.: *Banach Function Spaces,* Thesis, Delft, (1955)

[35] Luxemburg, W.A.J., and Zaanen, A.C.: *Notes on Banach function spaces I - XIII,* Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A-66(1963), 135–153, 239–263, 496–504, 655–681; A-64(1964), 101–119; A-67(1964), 360–376, 493–543.

[36] Kim, G.E., and Takahashi, W. *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups in Banach spaces,* Sci. Math. Japon., 63 (2006), 31–36.

[37] Mann, W.R.: *Mean value methods in iteration,* Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506–510.

[38] Musielak, J.: *Orlicz Spaces and Modular Spaces,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1983.

[39] Musielak, J., and Orlicz, W.: *On modular spaces,* Studia Math., 18 (1959), 49–65 .

[40] Musielak, J., and Orlicz, W.: *Some remarks on modular spaces,* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 7 (1959), 661–668.

[41] Nakano, H.: *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen Co., Tokyo, 1950.

[42] Nanjaras, B., and Panyanak, B.: *Demiclosed principle for asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces,* Fixed Point Theory and Applications, 2010:268780 (2010).

[43] Noor, M.A.,and Xu, B.: *Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl., 267 (2002), 444–453.

[44] Opial, Z.: *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings,* Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 591–597.

[45] Passty, G.B.: *Construction of fixed points for asymptotically nonexpansive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 212–216.

[46] Plesniak, W.: *Quasianalytic functions in the sense of Bernstein,* Dissertationes Math., 147 (1977), 1–66.

[47] Plesniak, W.: *Quasianalyticity in F-spaces of integrable functions,* Approximation and Function Spaces, Ed. Z. Ciesielski, Proc. Int. Conf. Gdansk 1979, North Holland 1981, 558-571,

[48] Reich, S.: *Strong convergence theorems for for resolvents of accretive operators in Banach in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 287–292.

[49] Rhoades, B.E.: *Fixed point iterations for certain nonlinear mappings,* J. Math. Anal. Appl., 183 (1994), 118–120.

[50] Saejung, S.: *Strong Convergence Theorems for Nonexpansive Semigroups without Bochner Integrals,* Fixed Point Theory and Applications, 2008:745010 (2008).

[51] Schu, J.: *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings,* Bull. Austral. Math. Soc., 43 1991, 153–159.

[52] Schu, J.: *Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings,* J. Math. Anal. Appl., 158 (1991), 407–413.

[53] Chen, S.: *Geometry of Orlicz Spaces,* Dissertationes Mathematicae, 356 (1996).

[54] Siciak, J.: *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables,* Trans. Amer. Math. Soc., 105.2 (1962), 322–357.

[55] Siciak, J.: *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$*,* Ann. Polon. Math., 39 (1981), 175–211.

[56] Suzuki, T.: *On strong convergence to common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 131.7 (2002), 2133–2136.

[57] Szczypinski, T.: Non-linear operator valued measures and integration, Comment. Math., 27 (1988), 313–333.

[58] Takahashi, W.: *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[59] Tan, K-K., and Xu, H-K.: *The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 114 (1992), 399–404.

[60] Tan, K-K., and Xu, H-K.: *A nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings,* Bull. Austral. Math. Soc., 45 (1992), 25–36.

[61] Tan, K-K., and Xu, H-K.: *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process,* J. Math. Anal. Appl., 178 (1993), 301–308.

[62] Tan, K-K., and Xu, H-K.: *Fixed point iteration processes for asymptotically nonexpansive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 733–739.

[63] Thong, D.V.: *An implicit iteration process for nonexpansive semigroups,* Nonlinear Anal., 74 (2011), 6116–6120.

[64] Xu, H-K: *Inequalities in Banach spaces with applications,* Nonlinear Anal., 16 (1991), 1127–1138.

[65] Xu, H-K: *Existence and convergence for fixed points of asymptotically nonexpansive type,* Nonlinear Anal., 16 (1991), 1139–1146.

[66] Xu, H-K: *A strong convergence theorem for contraction semigroups in Banach spaces,* Bull. Austral. Math. Soc. 72 (2005), 371–379.

[67] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems,* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986, 897 pp.