Recenzja rozprawy doktorskiej pana Jakuba Tomaszewskiego

Rozprawa doktorska Pana Jakuba Tomaszewskiego poświęcona jest badaniu mnożników punktowych w funkcyjnych kratach Banacha. Ujmując rzecz ogólnie są to operatory liniowe mnożenia punktowego przez funkcje mierzalne. Podstawowym problemem jest opisanie normy takiego operatora, czyli podanie warunków - najlepiej koniecznych i dostatecznych - aby był operatorem ograniczonym. Chodzi tu o warunki wyrażone w terminach norm w dziedzinie i obrazie. W pracy rozpatrywane są zarówno przestrzenie symetryczne, konkretnie przestrzenie Orlicza oraz przestrzenie Calderona - Łozanowskiego, jak i funkcyjne kraty nie będące przestrzeniami symetrycznymi - przestrzenie Musielaka - Orlicza. Zagadnienie opisu mnożników punktowych w tych przestrzeniach jest badane już od co najmniej sześćdziesięciu lat, na przestrzeni których udalo się osiągnąć wiele częściowych rezultatów, pozwalających na opis przestrzeni mnożników w przestrzeniach Orlicza przy założeniu rozmaitych specjalnych warunków na parę funkcji Younga. Pełen opis tych operatorów pozostawał jednak jak dotąd zadaniem otwartym.

Praca pana Tomaszewskiego podaje całkowite rozwiązanie tego problemu dla przestrzeni Orlicza. Co więcej - zaprezentowany dowód jest na tyle ogólny, że daje się zastosować również dla przestrzeni Musielaka - Orlicza, oraz przestrzeni Calderona - Łozanowskiego.

Zagadnieniem związanym z mnożnikami punktowymi jest tzw. problem faktoryzacji. Polega on, pokrótce na rozstrzygnięciu kiedy dwuliniowy operator mnożenia z produktu kraty X i przestrzeni punktowych mnożników $M(X,Y)$ do kraty Y jest surjektywny. Oczywiście niezbędnym krokiem do rozstrzygnięcia tego problemu jest charakteryzacja przestrzeni mnożników. Nic więc dziwnego, że posiadając takową autor z sukcesem stosuje ją do problemu faktoryzacji tak w przestrzeniach Orlicza jak i Calderona - Lozanowskiego i Musielaka - Orlicza. O ile jednak dla przestrzeni Orlicza oraz Calderona - Łozanowskiego udaje się otrzymać charakteryzację, o tyle w przestrzeniach Musielaka - Orlicza jedynie warunek dostateczny.

Kolejnym zagadnieniem rozpatrywanym w tezie pana Tomaszewskiego jest słaba zwartość w kratach funkcyjnych. Badana jest rola zbiorow X-jednostajnie całkowalnych, kryterium Dunforda - Pettisa w przestrzeniach 1 - rozłącznie jedorodnych. Motywacją do tego rozdziału pracy jest jego zastosowanie do opisu słabej zwartości operatorów mnożenia punktowego między kratami funkcyjnymi.

Praca składa się (oprocz zwięzłego wstępu) z czterech rozdziałów. Pierwszy rozdział poświęcony jest szybkiemu, ale i wyczerpującemu zdefiniowaniu podstawowych pojęć z zakresu krat funkcyjnych i przestrzeni symetrycznych. Zdefiniowane są również przstrzenie będące przedmiotem badań w kolejnych rozdziałach pracy oraz operatory punktowego mnożenia, jak i wprowadzone jest zagadnienie faktoryzacji. Rodział ten jest bardzo przystępnie napisany, zawiera wszystkie niezbędne pojęcia i jest zilustrowany przykładami.

Drugi rozdział jest zasadniczym osiągnięciem pracy. W rozdziale tym autor dowodzi, że przestrzeń mnożników punktowych między funkcyjnymi przestrzeniami Orlicza jest przestrzenią Orlicza oraz podaje wzór na funkcję Younga dla tej przestrzeni. Tą funkcją okazuje się być najmniejsza funkcja Younga ϕ_0 spełniająca równość $\phi_0(u) \geq \phi(uv) - \phi_1(v)$ dla wszystkich $v, u > 0$, gdzie ϕ_1 i ϕ są odpowiednio funkcjami Younga definiującymi dziedzinę i obraz. Tą funkcję autor nazywa uogólnioną funkcją dopełniającą w sensie Younga funkcji ϕ_1 względem ϕ. Tu należy podkreślić, że jest to funkcja znana od dawna, lecz wszystkie dotychczasowe znane wyniki wymagały specjalnych założeń na funkcje ϕ i ϕ_1. Niewątpliwym osiągnięciem pracy jest prezentacja dowodu bez zakładania jakichkolwiek dodatkowych własności tych funkcji. Dowód jest bardzo elegancki i, w przypadku inkluzji $M(L^\phi, L^{\phi_1}) \subset L^{\phi \ominus \phi_1}$ dość trikowy. W dalszej części rozdziału powyższy wynik zastosowany jest do rozwiązania problemu faktoryzacji. Podane są również konkretne przykłady pokazujące, że bez wyników tej pracy, a jedynie przy pomocy dotychczasowej wiedzy, nie dałoby się rozstrzygnąć problemu faktoryzacji.

Trzeci rozdział pracy doktorskiej zawiera rozszerzenie wyników z rozdziału drugiego na przestrzenie Musielaka - Orlicza i Calderona - Łozanowskiego. Zdefiniowana jest uogólniona funkcja dopełniająca Younga (tak jak można się spodziewać - punktowo). Zasadniczo dowód charakteryzacji (przy naturalnym dodatkowym założeniu że nośnik funkcji Musielaka - Orlicza obrazu jest całym obszarem) jest podobny do dowodu z rozdziału drugiego, jednak do pokonania są pewne dodatkowe trudności związane z brakiem symetrii. Oczywiście z uwagi na bardziej skomplikowaną postać normy wszystko jest nieco trudniejsze, jednak zdecydowanie jest to uogólnienie dowodu dla przestrzeni Orlicza. Kolejno dowodzi się analogicznej charakteryzacji dla przestrzeni Calderona - Łozanowskiego. Tu już dowód naśladuje przypadek Orliczowski nieomal verbaim zupełnie. Reszta rozdziału trzeciego poświęcona jest zastosowaniom powyższych charakteryzacji do zagadnienia faktoryzacji.

I znów - przypadek przestrzeni Calderona - Łozanowskiego jest nietrudną konsekwencją charakteryzacji i znanych rezultatów. Ale już brak symetrii w przestrzeniach Musielaka - Orlicza powoduje, że tu analogiczna charakteryzacja nie zachodzi, na co podany jest na zakończenie rozdziału trzeciego stosowny przykład. Podkreślić należy, że rezultatu tego rozdziału znane były uprzednio jedynie dla bardzo wąskiej klasy krat funkcyjnych.

Czwarta część pracy pana Tomaszewskiego ma nieco inny zakres tematyczny. Motywacją dla jej powstania była co prawda chęć zbadania słabej zwartości operatorów mnożenia punktowego działających między kratami funkcyjnymi. Cel ten został osiągnięty dla operatorów idących do krat posiadających własność 1-rozłącznej jednorodności. Własność ta z grubsza oznacza że z każdego ciągu ograniczonego z dołu i z góry elementów o rozłącznych nośnikach można wyjąć podciąg równoważny z kanoniczną bazą ℓ^1. Przykładami takich przestrzeni są funkcyjne przestrzenie Orlicza na odcinku skonczonym z funkcją Younga spełniającą warunek Δ_2^∞ i jednocześnie funkcją sprzężoną spełniającą warunek Δ_0. Jest to więc całkiem szeroka (i ciekawa) klasa krat bliskich L^1. Dowodzi się w tym rozdziale kilku własności takich przestrzeni. Przede wszystkim w klasie funkcyjnych krat Banacha 1-rozłączna jednorodnść jest równoważna kryterium Dunforda - Pettisa. Przy okazji podane zostało kryterium charakteryzujące zbiory Banacha-Saksa w kratach funkcyjnych oraz uogólnienie kryterium de la Vallee Poussina X-jednostajnej całkowalności dla podzbiorów krat symetrycznych nad przedziałem skończonym. Wykorzystując powyższe wyniki udało się opisać slabo zwarte operatory mnożenia idące do krat 1-rozłącznie jednorodnych. Dodatkowymi wynikami ostatniego rozdziału jest (nowa) charakteryzacja przestrzeni 1-rozłącznie jednorodnych w klasie przestrzeni Orlicza na przedziale nieskończonym. Na koniec zbadano związek warunku Δ_0 z indeksami Younga i Simonenki.

Wyniki pracy doktorskiej pana Tomaszewskiego są w większości już opublikowane (w dobrych czasopismach) w pracach wspołautorskich. Z tego, co mi wiadomo, wkład pana Tomaszewskiego w powstanie tych prac jest decydujący.

Pora na konkluzję. Moja opinia o pracy jest bardzo dobra. Otrzymane wyniki są wartościowe, ostateczne (w sensie - spora ich część to charakteryzacje). Nie bez znaczenia jest fakt, że od wielu lat problem przyciągał uwagę matematyków. Praca jest napisana w bardzo elegancki sposób, przyjemnie się ją czyta. Jest w pewnym sensie kompletna. Dodatkowo zaświadcza o umiejętności współpracy autora z kolegami po fachu. Z całą pwnością praca doktorska spełnia wymogi ustawy o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę o dopuszczenie pana Tomaszewskiego do dalszych etapów obrony oraz, proponuję uznać pracę za wyróżniającą.

Michał Wojciechowski

Michał Wojciechowski