dr hab. Tomasz Połacik, prof. UŚ
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 25 października 2021

Ocena rozprawy doktorskiej Pana magistra Pawła Płaczka

Rozszerzenia rachunków Lambeka: systemy sekwentowe, zachowawczość i złożoność obliczeniowa [1]

Tło i motywacje badań

W latach trzydziestych dwudziestego wieku powstały nowe doniosłe wyniki i teorie. W szczególności, rozwija się metamatematyka i logika matematyczna. Opublikowane zostały przełomowe wyniki Kurta Gödla, Gerharda Gentzena, David Hilberta i Alfreda Tarskiego i innych.

W tym czasie powstały również badania formalizmów składni języka naturalnego. Wśród filozofów i matematyków, którzy rozwijali nowe idee był Kazimierz Ajdukiewicz, który w latach trzydziestych, wprowadził pojęcia gramatyki kategorialnej. Prace te były intensywnie rozwijane przez Yehoshua Bar-Hillela oraz Joachima Lambeka. W roku 1958 został opublikowany przez Lambeka artykuł zawierający twierdzenie o eliminacji cięcia dla systemu sekwentów Gentzena dla Rachunku Lambeka L. Fakt ten, w konsekwencji, implikuje rozstrzygalność Rachunku L.

Od tego czasu, rośnie zainteresowanie badaniami oraz literaturą związaną z rachunkiem Lambeka. Nowy impakt interesujących badań prowadzonych przez Richarda Montague w latach siedemdziesiątych, przyczynił się do rozwoju logiki matematycznej oraz filozofii i języka.

W drugiej połowie lat osiemdziesiątych Jean-Yves Girard opublikował prace, w której logikę o cechach logiki klasycznej oraz logiki intuicjonistycznej w taki sposób, że logika klasyczna i intuicjonistyczna jednocześnie się tolerują. Ponadto logika liniowa zawiera w pełni inwolucyjną negację przy zachowaniu silnej konstruktywnej interpretacji. W ten sposób logika liniowa Girarda otworzyła nowe możliwości badawcze.

Pan mgr Paweł Płaczek w swojej rozprawie nawiązuje do tego typu badań.

[1] W oryginalnej postaci tytułu: *Extensions of Lambek caculii: Sequent systems, conservativeness and computational complexity.*

Zawartość rozprawy

Rozprawa doktorska Pana mgr. Pawła Płaczka jest napisana w języku angielskim. Składa się z czterech rozdziałów i Bibliografii, w liczebności 37 pozycji.[2] Wybór źródeł jest trafny, obejmuje nowe pozycje oraz klasyczne.

Rozdział 1. W krótkim wstępnym podrozdziale Autor przedstawia struktury, które będą przedmiotem zainteresowania w dalszym ciągu pracy. W pierwszym podrozdziale mgr. Płaczek streszcza bardzo skrótowo zawartość wszystkich rozdziałów rozprawy. Czytelnik może przypomnieć sobie podstawowe definicje i fakty. I tak: Autor podaje definicję częściowego porządku, kraty, algebry Heytinga, negacji (pseudo/dopełnienie), algebry Boole'a i filtru. Następny podrozdział krótko poświęcił algebrom rezydualnym. Ostatni z podrozdziałów poświęcony jest kwantalom.

Rozdział 2. Autor w Definicji 2.1, zdefiniował aksjomaty i reguły dla systemów sekwentów dla NL, NL_1, $FNL_\perp$, oraz $FNL_{1\perp}$. Ponadto, Autor sporządził zestawienie logik z odpowiednią algebrą. Uważam że, takie zestawienie jest użyteczne. Na zakończenie podrozdziału 2.1 Autor przedstawił dowód pełności i zgodności Lindenbauma-Tarskiego dla w przypadku $FNL_{1\perp}$.

W drugim podrozdziale rozważano cztery systemy: InL, InNL oraz drugą parę InL_1, InNL, $InNL_1$. Następnie Autor rozważa logiki InFL, InFNL oraz $InFL_1$, $InFNL_1$ i, po dołączeniu stałych $\top$ i $\perp$. W konsekwencji otrzymuje się kolejne logiki: InFL$\perp$, InFNL$\perp$ oraz $InFL_{1\perp}$, $InFNL_{1\perp}$. Autor podaje aksjomaty i reguły dla logiki InNL oraz ilustruje związki rozważanych logik i algebr.

W trzecim podrozdziale rozważane są systemy CyL, CyNL, CyL_1 oraz $CyNL_1$. Autor wprowadza kolejną serię systemów: CyFL, CyFNL $CyFL_\perp$, $CyFNL_\perp$ i $CyFL_\perp$, $CyFNL_\perp$, $CyNL_{1\perp}$, $CyFNL_{1\perp}$. Jak poprzednio, Autor podaje aksjomaty i reguły logiki CyNL.

Czwarty podrozdział przynosi kilka twierdzeń. Przede wszystkim, [W. Buszkowski, 10] udownił, że CNL jest silnym konserwatywnym rozszerzeniem NL. Pan mgr. Płaczka uzupełnił szereg wyników na wzór pozycji [W. Buszkowski, 10], w której zamieszczono dowody Twierdzeń 2.2, 2.4, 2.8, 2.10.

***Rozdział* 3.** Ostatnie dwa rozdziały rozprawy Pana mgr. Pawła Płaczka zawierają główne wyniki Autora.

W tym rozdziale Pan mgr Płaczek przedstawił syntaktyczny dowód twierdzenia o eliminacji dla jednostronnych systemów $InFNL_{1\perp}$ oraz $CyFNL_{1\perp}$. Autor opiera się na wynikach w [W. Buszkowski, 11]. We wspomnianej pracy znajdujemy jednostronne systemy sekwentów dla InNL, które mają własność elimi-

[2] W tym jedna pozycja autorska mgr. Płaczka: *One-sided sequent systems for nonassociative bilinear logic: Cut and complexity.* Bulletin of the Section of Logic 50,1 (2021), 55-80.

nacji cięcia. Autor skupia się na różnicach metod i wyników. Zasadnicza różnica polega na tym, że W. Buszkowski [W. Buszkowski, 11] rozważa tylko sekwenty składające się z co najmniej dwóch formuł, co znacznie upraszcza dowody. Autor rozważa też wszystkie niepuste sekwencje. Ponadto Autor przedstawia dowód o eliminacji cięcia dla lewostronnego systemu.

Dowód eliminacji cięcia dla niełącznych logik przebiega podobnie jak w logikach łącznych [W. Buszkowski, 10], [J.-Y. Girard, 20], [J. Lambek, 24]. Okazuje się, że należy wykluczyć regułę (r-shift) i zastąpić nimi słabszymi regułami. Kluczowe lematy dla tego rozdziału stanowią Lematy 3.2, 3.4, 3.6, 3.7. Autor korzystał z [W. Buszkowski, 11]. Za pomocą twierdzenia o eliminacji cięcia można udowodnić, rozstrzygalność $\mathrm{InFNL}_{1\perp}$. Dzięki twierdzeniu o eliminacji cięcia można udowodnić rozstrzygalność $\mathrm{InFNL}_{1\perp}$. Analogiczny wynik mamy w przypadku InNL [W. Buszkowski, 11].

Celem tego rozdziału jest udowodnienie, że InNL_1 ma złożoną *PTIME*. Dowód został przedstawiony w kilku twierdzeniach i lematów. Najważniejsze etapy głównego dowodu obejmują trzy kroki.

Najpierw zdefiniujemy **S** za pomocą następujących postulatów: (1) $\mathrm{InFLN}_{1\perp}$ bez własności cięcia; (2) bez reguły (r–shift); (3) z (r-⊕3) oraz (r-⊕4).

Twierdzenie 3.9. *Reguły cięcia są dopuszczalne w* **S**.

Definiujemy **S'** przez postulaty: (1) $\mathrm{CyFLN}_{1\perp}$ bez własności cięcia; (2) bez reguł (r–shift), (r–cyc); (3) z (r-⊕3), (r-⊕4).

Twierdzenie 3.10. *Reguły cięcia są dopuszczalne w* **S'**.

Poniższe Twierdzenie stanowi pierwszy z dwóch głównych wyników Autora:

Twierdzenie 3.15. *InNL_1 ma złożoność PTIME.*

***Rozdział* 4.** W ostatnim rozdziale rozprawy, Autor rozważa sześć wariantów rachunków Lambeka i ich złożoności: $\mathrm{DFNL}_{\perp}$, $\mathrm{DFNL}_{1\perp}$, BFNL, BFNL_1, HFNL i HFNL_1, które wprowadzili [Jipsen & Galatos, 18]. [Shkatov & Van Alten, 35] wprowadzili finitarną relację konsekwencji rachunku $\mathrm{DFNL}_{\perp}$, o złożoności EXPTIME-complete. Ponadto, Autor korzystał z wyników [O'Hearni & Pym, 30], [Kozak, 22] oraz [Buszkowski & Farulewski, 14].

Rozdział 4 podzielony jest na trzy podrozdziały. W pierwszym podrozdziałem Autor sformułował reguły i aksjomaty dla formuł $\mathrm{DFNL}_{\perp}$. Ponadto, Autor zdefiniował reguły i aksjomaty dla HFNL: Heyting Full Nonassociative Lambek Calculus. HFNL jest rozszerzeniem $\mathrm{DFNL}_{\perp}$ o implikację. Na koniec pierwszego podrozdziału Autor zdefiniował reguły dla $\mathrm{DFNL}_{1\perp}$ i $\mathrm{FNL}_{1\perp}$.

Następujące podrozdziały zawierają dowód drugiego głównego wyniku.

Główne drugie twierdzenie Autora:

Twierdzenie 4.37. *Relacje konsekwencji skończonych* HFNL, HFNL_1 *mają złożoność EXPTIME.*

Ocena merytoryczna rozprawy

Rozprawa Pana mgr. Pawła Płaczka traktuje interesujących współczesnych zagadnień dotyczących rozszerzeń rachunków Lambeka za pomocą systemów sekwentowych, zachowawczość i złożoność obliczeniową. Badania, które podjął Autor, wymagały szerokiego spektrum wiedzy i narzędzi, takich jak rachunków Lambeka oraz narzędzi algebraicznych, logicznych, złożoności obliczeniowej. Pod tym kątem Autor wykazał się dużą wiedzą i umiejętnościami.

Konkluzja

Pan mgr Paweł Płaczek podjął w swojej pracy doktorskiej interesujący i ambitny problem badawczy, pod tytułem *Rozszerzenia rachunków Lambeka: systemy sekwentowe, zachowawczość i złożoność obliczeniowa.* W moim przeświadczeniu, Pan mgr Paweł Płaczek legitymuje się wysokimi kompetencjami formalnymi w zakresie logiki matematycznej, algebry uniwersalnej i złożoności obliczeniowej, erudycją matematyczną oraz zawiera oryginalne wyniki Autora.

Zatem, zgodnie z zapisami na podstawie przepisów ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce,* stwierdzam, że przedłożona do oceny rozprawa Pana mgr. Pawła Płaczka stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w zakresie rachunków Lambeka, algebry uniwersalnej, logiki, systemów sekwentowych oraz złożoności obliczeniowej. Wnioskuję więc o dopuszczenie Pana mgr. Pawła Płaczka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

T. Potacz