Lublin, 20 października 2019 r

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Anny Golińskiej
"The classical operators on the space of real analytic functions"

Pierwszy rozdział recenzowanej rozprawy (Introduction) zawiera krótkie wprowadzenie do tematyki tej rozprawy oraz opis zawartych w niej wyników Doktorantki. W następnym rozdziale (Preliminaries) omówiono podstawowe własności przestrzeni rzeczywistych funkcji analitycznych (real analytic functions) $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ oraz przestrzeni dualnej $\mathcal{A}(\mathbb{R})'$. Rozdział ten zawiera również informacje dotyczące półgrup operatorów na przestrzeniach lokalnie wypukłych. Trzeci rozdział dotyczy operatorów na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ zwanych mnożnikami Hadamara oraz C_0-półgrup generowanych przez pewne takie operatory. Następne rozdziały poświęcone są operatorom Hankela, operatorom Toeplitza i komutatorom operatorów Toeplitza na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywamy rzeczywistą funkcją analityczną ($f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$), jeśli f jest lokalnie na $\mathbb{R}$ sumą swojego szeregu Taylora. Oznacza to, że funkcja f może być przedłużona jako funkcja holomorficzna na pewne otwarte otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ zbioru $\mathbb{R}$. Niech dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$, $H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych na U z topologią niemal jednostajnej zbieżności. Jeśli $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ są otwartymi zbiorami zawierającymi $\mathbb{R}$, to dwie funkcje $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ definiują tę samą funkcję należącą do $\mathcal{A}(\mathbb{R})$, jeśli istnieje zbiór otwarty $U \supset \mathbb{R}$ taki, że $f_1|U = f_2|U$. W przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ określona jest topologia granicy induktywnej

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \mathrm{ind}_U\, H(U),$$

gdzie U przebiega rodzinę zbiorów otwartych zawierających $\mathbb{R}$. Jest to najsilniejsza lokalnie wypukła topologia, przy której odwzorowanie $r_U : H(U) \to \mathcal{A}(\mathbb{R})$ jest ciągłe. Ponadto lokalnie wypukła przestrzeń $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ posiada własności, które zapewniają możliwość stosowania w niej twierdzeń z analizy funkcjonalnej takich jak twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, czy twierdzenie o domkniętym wykresie. Takie istotne własności przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ zostały wymienione w rozdziale drugim. Chociaż wielomiany stanowią gęstą podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$, jednomiany $z \to z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, nie stanowią bazy Schaudera tej przestrzeni.

Niech $\mathcal{A}(\mathbb{R})'$ oznacza przestrzeń dualną do przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ z topologią jednostajnej zbieżności na ograniczonych podzbiorach $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Z twierdzenia dualnego Köthego-Grothendiecka-da Silvy wynika, że $\mathcal{A}(\mathbb{R})'$ może być identyfikowana z przestrzenią

$$H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{R}) = \mathrm{ind}_K\, H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus K),$$

gdzie K przebiega rodzinę zwartych i spójnych podzbiorów $\mathbb{R}$, a $H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus K)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych na $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ znikających w ∞.

Przestrzeń $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{X}(\mathbb{R})$, którą definiujemy wzorem

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}) = \operatorname{ind}_U H(U \setminus K),$$

gdzie U przebiega rodzinę zbiorów otwartych zawierających $\mathbb{R}$, a K rodzinę zwartych podzbiorów $\mathbb{R}$.

Następujące relacje, wykazane w pracy P. Domańskiego i M. Jasiczaka z 2018 roku (Banach J. Math. Anal.), odgrywają zasadniczą rolę w teorii operatorów na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{A}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R})' \cong \mathcal{A}(\mathbb{R}) \oplus H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{R}).$$

Niech $L(X)$ oznacza przestrzeń ciągłych operatorów liniowych na lokalnie wypukłej przestrzeni X. Również w rozdziale drugim zdefiniowana została tzw. C_0-półgrupa (silnie ciągła półgrupa) $(T_t)_{t\geq 0}$ operatorów z $L(X)$. Proposition 2.2.5 pokazuje prostą zależność pomiędzy wartościami własnymi generatora C_0-półgrupy $(T_t)_{t\geq 0}$ na przestrzeni lokalnie wypukłej, a wartościami własnymi operatorów T_t, $t \geq 0$.

W rozdziale trzecim recenzowanej rozprawy Autorka zajmuje się operatorami ciągłymi na $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ zwanymi mnożnikami Hadamara. Ciągły operator $M : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}(\mathbb{R})$ jest mnożnikiem Hadamara jeśli każdy jednomian jest jego wektorem własnym, tzn. $Mx^n = m_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$. W swoich badaniach przedstawionych w tym rozdziale Doktorantka nawiązuje do twierdzeń P. Domańskiego i M. Langenbrucha (2012) opisujących algebrę mnożników na przestrzeniach $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ oraz $\mathcal{A}(\mathcal{C}_\infty \setminus \mathbb{R})$. Główne wyniki Doktorantki zawarte w tym rozdziale to twierdzenia 3.2.4, 3.2.5 oraz 3.3.4. Dotyczą one konkretnych operatorów (będących mnożnikami) takich jak różniczkowy operator Eulera i operator Hardy'ego, i zawierają odpowiedzi na pytanie czy te operatory generują C_0-półgrupę $(T_t)_{t\geq 0}$ operatorów na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Wyniki te zostały już opublikowane w samodzielnym artykule Doktorantki w *Annales Polonici Mathematici.* W rozdziale czwartym badane są operatory Hankela na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Ciągły operator $\Gamma : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}(\mathbb{R})$ jest operatorem Hankela, jeśli istnieje ciąg zespolony $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że w pewnym otoczeniu zera

$$\Gamma(x^n)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\xi^k.$$

Autorka wykazuje, że przestrzeń operatorów Hankela na $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ jest topologicznie izomorficzna z przestrzenią funkcji całkowitych $H(\mathbb{C})$ (twierdzenie 4.1.6). Oznacza to w szczególności, że Γ jest operatorem Hankela wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja całkowita $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ taka, że $\Gamma(x^n)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\xi^k = \Gamma_\varphi(x^n)(\xi)$. Ważnym wynikiem w tym rozdziale jest charakteryzacja skończenie wymiarowych operatorów Hankela. Rozdział piąty poświęcony jest operatorom Toeplitza na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Badania operatorów Toeplitza na $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ zostały zapoczątkowane w pracy P. Domańskiego i M. Jasiczaka (Banach J. Math. Anal. (2018)), a następnie kontynuowane przez M.Jasiczaka (J. Operator Theory (2018), Studia Mathematica, to appear). Przedstawione w rozprawie wyniki można uznać za kontynuację tych badań.

Ciągły operator $T : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}(\mathbb{R})$ nazywamy operatorem Toeplitza, jeśli istnieje ciąg liczb zespolonych $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ taki, że w pewnym otoczeniu zera

$$T(x^n)(\xi) = a_{-n} + a_{-n+1}\xi + a_{-n+2}\xi^2 + \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

P. Domański i M. Jasiczak (Banach J. Math. Anal. (2018)) wykazali, że T jest operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $F \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ takie, że $T = \mathcal{C}M_F = T_F$, gdzie $\mathcal{C}$ oznacza projekcję Cauchy'ego, a M_F–operator mnożenia przez F. Główny wynik przedstawiony w rozprawie mówi, że operator Toeplitza $T_F : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$, jest odwracalny prawostronnie wtedy i tylko wtedy gdy T_F jest surjektywnym operatorem Fredholma. Przedstawiony dowód tego wyniku jest długi (kilkanaście stron). W dowodzie istotną rolę odgrywają wyniki dotyczące operatorów Toeplitza na przestrzeni $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ otrzymane przez P. Domańskiego i M. Jasiczaka, a w szczególności twierdzenie Jasiczaka opisujące własności operatora Toeplitza T_F w zależności od miejsc zerowych funkcji $F \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. Poza tym ważnymi składnikami tego dowodu są faktoryzacja typu Wienera-Hopfa operatorów Toeplitza T_F będących operatorami Fredholma (Twierdzenie 5.1.9) oraz Twierdzenie 5.2.4 dotyczące operatora sprzężonego T'_F. W rozdziale tym zawarte są również wyniki dotyczące komutatorów operatorów Toeplitza.

Podsumowując uważam, że recenzowana rozprawa doktorska zawiera dużo ciekawych i nietrywialnych wyników dotyczących operatorów na przestrzeni rzeczywistych funkcji analitycznych. Powyższy opis zawiera tylko najważniejsze (moim zdaniem) rezultaty Doktorantki w niej zawarte. Praca ta świadczy o szerokiej wiedzy Doktorantki i opanowaniu przez nią narzędzi współczesnej analizy.

Praca jest napisana w sposób zwięzły, raczej w stylu artykułów w czasopismach matematycznych. Brakuje mi opisania szerszego kontekstu badań i dokładniejszego omówienia wyjściowych znanych wyników. Doktorantka skupiła się na prezentowaniu znacznej liczby swoich wyników. Nie mam wątpliwości, że recenzowana praca spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim w Ustawie o stopniach i tytule naukowym, i wnioskuję o dopuszczenie Pani Anny Golińskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

MNowak

Maria Teresa Nowak

Instytut Matematyki UMCS